

**INSTITUTO
FEDERAL**

Alagoas

INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS MACEIÓ

CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE FIRMINO FELIX DA SILVA

**ESTUDO DOS GRÁFICOS E RAÍZES DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU:
UMA INVESTIGAÇÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

MACEIÓ, ALAGOAS

2025

ALEXANDRE FIRMINO FELIX DA SILVA

ESTUDO DOS GRÁFICOS E RAÍZES DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU:
UMA INVESTIGAÇÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Hugo Santos Nunes

MACEIÓ, ALAGOAS
2025



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
Campus Maceió
Biblioteca Benevides Monte

510.1
S586e

Silva, Alexandre Firmino Félix da.

Estudo dos gráficos e raízes das funções polinomiais do 2º grau [recurso eletrônico] / Alexandre Firmino Félix da Silva. - Dados eletrônicos (1 arquivo : 1,3 MB) . - 2025.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: Internet.

Orientação: Prof. Me. Hugo Santos Nunes.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió, Maceió, 2025.

1. Função quadrática. 2. Representação gráfica. 3. História da matemática.
I. Título.

Bibliotecária Nalva Maria Amaral / CRB-4/989

ALEXANDRE FIRMINO FELIX DA SILVA

ESTUDO DOS GRÁFICOS E RAÍZES DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU:
UMA INVESTIGAÇÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 18/12/2025.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Me. Hugo Santos Nunes (Orientador)
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

Prof. Me. Diogo Meurer de Souza Castro
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

Prof. Me. Lucas de Stefano Meira Henriques
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

Dedico este trabalho à Matemática, que me desafiou desde o início, confirmou todas as dificuldades e, ainda assim, me ensinou e me transformou ao longo do caminho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder forças nos dias difíceis, sabedoria nas decisões e fé para continuar mesmo quando tudo parecia incerto.

À minha esposa, Jennefer Barbosa, minha companheira de vida e de jornada acadêmica, que esteve ao meu lado nos momentos de cansaço, dúvidas e vitórias. Seu apoio, amor e paciência foram fundamentais para que este trabalho se tornasse realidade.

Ao meu orientador, Hugo Nunes, pela orientação firme, pelas palavras de incentivo e pela confiança no meu potencial. Sua dedicação foi essencial para a construção deste trabalho. E a mim mesmo, por não ter desistido.

Por cada noite em claro, por cada página escrita com esforço, por cada desafio vencido, celebro-me por ter chegado até aqui com dignidade e determinação.

”Hoje me sinto mais forte
Mais feliz, quem sabe
Só levo a certeza
De que muito pouco sei
Ou nada sei”.
Almir Sater

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar as funções polinomiais do 2º grau, com ênfase nos seus aspectos históricos e de seus gráficos e raízes. A pesquisa abordou inicialmente o contexto histórico da Matemática, destacando as contribuições das civilizações babilônica, egípcia, grega e indianas para o desenvolvimento das equações quadráticas. Em seguida, foram analisados os principais elementos que compõem a função do 2º grau, como concavidade, vértice, eixo de simetria, ponto máximo e mínimo, além do sinal da função, enfatizando suas representações gráficas e aplicações. A partir dessa investigação, observou-se que o estudo das funções quadráticas é fundamental para a compreensão do comportamento das curvas. Além disso, constatou-se sua importância no processo de ensino-aprendizagem, conforme orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por favorecer o raciocínio lógico, a interpretação gráfica e a resolução de problemas. Assim, o trabalho evidencia que o estudo das funções quadráticas, quando aliado ao seu resgate histórico e à contextualização prática, contribui para uma aprendizagem mais significativa e integrada do ensino da Matemática.

Palavras-chaves: função quadrática; representação gráfica; história da matemática.

ABSTRACT

This work aims to study second-degree polynomial functions, emphasizing their historical aspects, graphs, and roots. The research initially addressed the historical context of mathematics, highlighting the contributions of Babylonian, Egyptian, Greek, and Indian civilizations to the development of quadratic equations. Subsequently, the main elements that compose a second-degree function were analyzed, such as concavity, vertex, axis of symmetry, maximum and minimum points, as well as the sign of the function, emphasizing their graphical representations and applications. From this investigation, it was observed that the study of quadratic functions is fundamental to understanding the behavior of curves. Furthermore, its importance in the teaching-learning process was confirmed, as guided by the Brazilian National Common Curriculum Base (BNCC), by favoring logical reasoning, graphical interpretation, and problem-solving. Thus, this work demonstrates that the study of quadratic functions, when combined with their historical background and practical contextualization, contributes to a more meaningful and integrated learning of mathematics education.

Keywords: quadratic function; graphical representation; history of mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	–	Tabuleta Plimpton 322, contendo cálculos matemáticos babilônicos	15
Figura 2	–	Exemplos de documentos matemáticos egípcios.	17
Figura 3	–	Método de René Descartes.	25
Figura 4	–	Ilustração da concavidade de uma parábola em função do coeficiente a de uma equação quadrática.	29
Figura 5	–	Gráfico da função $f(x) = ax^2$: variação do grau de abertura de parábolas com diferentes valores de a	29
Figura 6	–	Ilustração dos efeitos do coeficiente $b < 0$ na função quadrática. O sinal negativo de b indica que a parábola é decrescente no ponto em que intercepta o eixo y	29
Figura 7	–	Ilustração dos efeitos do coeficiente $b > 0$ na função quadrática. O sinal positivo de b indica que a parábola é crescente no ponto em que intercepta o eixo y	30
Figura 8	–	Ilustração do efeito do coeficiente c no deslocamento vertical da parábola. O valor c define o ponto de interceptação do eixo y , $(0, c)$	30
Figura 9	–	Relação entre o valor do discriminante (Δ) e o número de raízes reais da função quadrática.	31
Figura 10	–	Relação entre a concavidade da parábola e seus pontos extremos. Para $a < 0$, a parábola possui concavidade voltada para baixo, apresentando um ponto de máximo.	32
Figura 11	–	Relação entre a concavidade da parábola e seus pontos extremos. Para $a > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima, apresentando um ponto de mínimo.	33
Figura 12	–	Ilustração do vértice, o ponto extremo da parábola.	35

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS	13
2.1	ORIGENS ANTIGAS	13
2.2	BABILÔNIA	14
2.3	EGITO	16
2.4	GRÉCIA	18
2.5	CONTRIBUIÇÃO ÁRABE	19
2.6	CONTRIBUIÇÃO INDIANAS	21
2.7	CONTRIBUIÇÃO EUROPEIAS	22
2.7.1	François Viète	23
2.7.2	René Descartes	24
3	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS	26
3.1	DEFINIÇÃO E FORMA CANÔNICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA . . .	26
3.2	ZEROS OU RAÍZES DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA	27
3.3	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA	28
3.3.1	Análise dos parâmetros da função quadrática	28
3.3.2	Pontos de intersecção com os eixos	31
3.3.3	Máximo, mínimo e vértice da parábola	31
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
	REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

A Matemática sempre esteve presente no desenvolvimento da sociedade desde os tempos antigos, desempenhando papel fundamental na construção do raciocínio lógico e na capacidade de resolver problemas em diferentes contextos históricos. Ainda assim, permanece para muitos estudantes e cidadãos como uma disciplina abstrata e distante da realidade. Entre os conteúdos que mais geram dúvidas e inseguranças destacam-se as funções polinomiais do segundo grau, cuja representação algébrica pode parecer complexa e cujas aplicações nem sempre são percebidas com clareza. A função quadrática, como é amplamente conhecida, ocupa posição central no currículo da Educação Básica, sendo estudada nos anos finais do Ensino Fundamental e ao longo do Ensino Médio, e possui relevância que extrapola o ambiente escolar, pois permite modelar fenômenos naturais, situações econômicas e diversos problemas cotidianos que envolvem relações de variação.

No entanto, o ensino tradicional raramente contempla a trajetória histórica dessas funções. A equação do segundo grau possui um percurso que atravessa diversas civilizações — desde os babilônios e egípcios até os gregos, árabes, indianos e matemáticos da Modernidade — revelando um processo rico e culturalmente diverso de construção desse conhecimento. Esse aspecto histórico, frequentemente negligenciado nas salas de aula, constitui uma chave importante para compreender não apenas a evolução das representações e métodos de resolução, mas também o papel do contexto sociocultural no desenvolvimento matemático. Assim, investigar a função quadrática sob a perspectiva da História da Matemática permite resgatar esse percurso e aproximar o estudante da natureza humana e dinâmica do conhecimento matemático, alinhando-se ao entendimento de que o ensino deve valorizar os contextos históricos e culturais em que o saber é produzido.

A motivação para este estudo surge, em parte, da constatação de que a Matemática escolar foi frequentemente apresentada de forma abstrata, centrada na memorização de procedimentos e na aplicação mecânica de fórmulas, especialmente no estudo das funções quadráticas. Essa metodologia, apesar de amplamente utilizada, tende a afastar os estudantes, reforçando a percepção equivocada de que a Matemática consiste apenas em regras descontextualizadas. Ao longo da formação no curso de Licenciatura em Matemática, torna-se evidente a importância de incorporar uma abordagem histórica ao processo de ensino-aprendizagem, de modo a enriquecer a compreensão dos conteúdos e torná-los mais acessíveis e significativos. Nesse sentido, investigar a origem das equações do segundo grau, os sujeitos históricos envolvidos em sua evolução e a forma como essas ideias foram transformadas até chegarem às notações utilizadas atualmente contribui para uma prática pedagógica mais contextualizada e integrada.

Este trabalho tem como objetivo geral investigar os aspectos matemáticos e históricos das funções polinomiais do segundo grau, relacionando a construção algébrica, o estudo das raízes e a análise gráfica com o desenvolvimento histórico desse objeto matemático. Para alcan-

çar esse propósito, busca-se analisar propriedades algébricas e gráficas das funções quadráticas, compreender o papel das raízes e do vértice na construção e interpretação de seus gráficos, investigar sua origem em diversas civilizações e destacar a contribuição de Al-Khwarizmi para a sistematização dos métodos de resolução.

A pesquisa desenvolvida apresenta natureza qualitativa, com abordagem histórica e bibliográfica, fundamentada em livros, artigos e outras produções acadêmicas que tratam da evolução histórica das equações do segundo grau e da construção de seus gráficos. Essa metodologia permite compreender a formação histórica do objeto matemático estudado e reunir contribuições relevantes da literatura educacional e histórica, possibilitando uma análise integrada entre o desenvolvimento conceitual e a trajetória cultural da função quadrática. Além disso, a investigação procura mapear o estado da arte sobre o tema, identificando lacunas e destacando potencialidades para subsidiar práticas pedagógicas mais contextualizadas e significativas, alinhadas à valorização da História da Matemática no ensino contemporâneo.

2 HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

O estudo das equações do 2º grau, também conhecidas como equações quadráticas, não pode ser compreendido apenas a partir de sua formulação algébrica moderna, como nós a conhecemos hoje, que é do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$; é necessário situá-lo em um processo histórico que atravessa diferentes civilizações. Cada cultura, em seu tempo, desenvolveu formas diferentes de lidar com problemas que hoje utilizamos métodos mais práticos para resolver. No entanto, para eles da época, esses problemas estavam vinculados a atividades práticas, como medições de terras, construções arquitetônicas, repartições de bens ou observações astronômicas.

Segundo Boyer (1996), a história da Matemática evidencia que os conceitos não surgem de forma pronta e acabada, mas são construídos gradualmente, a partir das necessidades concretas e do desenvolvimento intelectual das sociedades. Nesse sentido, compreender a evolução das equações quadráticas permite não apenas valorizar a riqueza cultural das diferentes tradições matemáticas, mas também evidenciar aos estudantes que a Matemática é resultado de um processo humano coletivo, marcado por transformações e contínuo aperfeiçoamento.

Diante disso, neste capítulo, busca-se apresentar a trajetória das equações do segundo grau desde suas origens na Antiguidade até sua formalização algébrica moderna. Para tanto, será adotada uma abordagem de caráter cronológico, na qual serão analisadas as contribuições da Babilônia, do Egito, da Grécia, dos povos árabes e indianos, culminando na consolidação algébrica dessas equações. Destacam-se, nesse percurso, não apenas os métodos de resolução desenvolvidos em cada período, mas também os contextos culturais e sociais que motivaram o surgimento dessas ideias, ressaltando o caráter histórico, cultural e humano da Matemática.

2.1 ORIGENS ANTIGAS

Antes do surgimento de uma linguagem algébrica sintetizada, os povos da Antiguidade já enfrentavam e resolviam problemas cujas características se aproximam daquilo que atualmente se compreende como equações do segundo grau. Mesmo na ausência de símbolos e de uma formalização completa, as primeiras manifestações do pensamento matemático surgiram da necessidade de solucionar questões práticas do cotidiano, como a divisão de terras, a construção de templos, o cálculo de impostos e a realização de medições agrícolas.

Essas demandas estimularam o desenvolvimento de métodos baseados no raciocínio lógico e em operações numéricas progressivamente mais elaboradas. Em regiões como a antiga Suméria, civilização que floresceu entre os rios Tigre e Eufrates por volta de 3000 a.C., há registros do uso de sistemas numéricos aplicados à medição de grãos, áreas de terra e unidades de trabalho. De modo semelhante, no Vale do Indo — região correspondente, em grande parte, aos atuais territórios da Índia e do Paquistão —, entre aproximadamente 2500 e 1500 a.C., desenvolveram-se sistemas padronizados de pesos, medidas e práticas comerciais. Tais

sistemas apresentavam uma lógica quantitativa ainda elementar, porém eficaz para as necessidades da época, apesar de seu caráter inicial e rudimentar.

A escrita, desenvolvida nesse mesmo contexto histórico, desempenhou papel fundamental no registro, na transmissão e no desenvolvimento desses conhecimentos. Conforme destaca Boyer (1996), a Matemática teve origem nas necessidades práticas da vida social, como a agricultura, a construção e a organização econômica dos povos antigos. Esses registros escritos possibilitaram a preservação de procedimentos e técnicas matemáticas, contribuindo para sua progressiva sistematização ao longo do tempo.

Embora ainda não existisse um método formal de resolução de equações, é possível identificar, nos registros mais antigos, procedimentos que se assemelham àqueles utilizados posteriormente no tratamento de incógnitas, como operações de divisão e multiplicação, bem como a verificação de resultados por meio de tentativa e erro. Para Katz (2009), esse período caracteriza-se pelo desenvolvimento de uma “álgebra empírica”, baseada na repetição e na comparação de soluções, e não na dedução algébrica formal. Nesse sentido, Miorim (2002) ressalta que tais práticas matemáticas, ainda que não sistematizadas, foram fundamentais para o surgimento da álgebra, ao estabelecerem uma base intuitiva e prática para o tratamento de quantidades desconhecidas, posteriormente aprofundada por civilizações como a babilônica, egípcia, grega e árabe.

Reconhecer essa origem prática da álgebra contribui para uma abordagem pedagógica mais significativa, pois revela a dimensão humana e histórica do conhecimento matemático Miorim (2002). Essa perspectiva reforça um ponto essencial: a Matemática nasceu das demandas do cotidiano, e não de uma abstração filosófica pura. Aquilo que hoje se compreende como equações do segundo grau constituiu, em seus primórdios, uma tentativa humana de solucionar problemas concretos, herança que se consolidaria, com maior clareza e estrutura, nas civilizações babilônica e egípcia.

2.2 BABILÔNIA

A Babilônia, situada na antiga Mesopotâmia, região correspondente ao atual Iraque, constituiu-se como um dos principais centros de desenvolvimento matemático da Antiguidade, especialmente entre os séculos XVIII e VI a.C. A Matemática desempenhava papel central na vida cotidiana babilônica, sendo aplicada em atividades como a agricultura, a administração de terras, a construção de obras públicas, o comércio e as observações astronômicas. Essas demandas práticas impulsionaram o desenvolvimento de técnicas numéricas e geométricas notavelmente sofisticadas para a época, incluindo procedimentos destinados à resolução de problemas que, na atualidade, são reconhecidos como equações do segundo grau ou equações quadráticas Boyer (1996), Robson (2008).

Um traço característico da Matemática babilônica era a utilização do sistema sexagesimal, baseado na base 60, distinto do sistema decimal empregado atualmente. Esse sistema possibilitava o trabalho com frações, bem como a realização de operações de multiplicação, di-

visão e extração de raízes quadradas, ferramentas essenciais para a resolução de problemas do cotidiano. Embora não utilizassem a notação algébrica moderna, os babilônios registravam seus procedimentos matemáticos em tabletas de argila, muitos dos quais chegaram até os dias atuais, fornecendo evidências detalhadas acerca de seus métodos de cálculo Friberg (2007).

Segundo Boyer (1996), os babilônios abordavam as equações quadráticas a partir de uma perspectiva geométrica. Uma equação da forma $x^2 + bx = c$ era interpretada como uma soma de áreas: onde o termo x^2 correspondia à área de um quadrado de lado x enquanto o termo bx correspondia à área de retângulos que se acrescentavam a esse quadrado, formando uma figura maior. Para determinar a solução do problema, aplicava-se um procedimento análogo ao que atualmente se denomina “completar o quadrado”, reorganizando as áreas de modo a permitir a extração da raiz quadrada. Esse método evidencia a estreita relação entre álgebra e geometria na Matemática babilônica, revelando uma forma de álgebra geométrica notavelmente avançada para o período.

Figura 1. Tabuleta Plimpton 322, contendo cálculos matemáticos babilônicos



Fonte: VEJA (2017)

Um exemplo desse procedimento pode ser observado na resolução da equação quadrática

$$x^2 + 10x = 39.$$

O objetivo é completarmos o quadrado para reescrevê-la em uma forma que permita a determinação direta das raízes.

Primeiro passo: divide-se o coeficiente do termo linear por dois. Como o termo linear é $10x$,

tem-se:

$$\frac{10}{2} = 5.$$

Segundo passo: adiciona-se o quadrado dessa metade a ambos os lados da equação, de modo a completar o quadrado perfeito:

$$x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 5^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

Terceiro passo: extrai-se a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade:

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{64}$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Portanto, o procedimento de completar o quadrado conduz à solução $x = 3$.

Esse exemplo evidencia como os babilônios, mesmo na ausência de uma notação algébrica simbólica, eram capazes de resolver equações por meio de procedimentos sistemáticos e de natureza visual. Dessa forma, a Matemática desenvolvida por essa civilização não apenas atendia às suas necessidades práticas, mas também antecipava conceitos que seriam formalizados séculos mais tarde no âmbito da álgebra moderna.

2.3 EGITO

A civilização egípcia, florescida às margens do rio Nilo, trouxe à humanidade avanços notáveis em arquitetura e astronomia, os quais exigiam conhecimentos matemáticos mais sofisticados para a época. A matemática egípcia era essencialmente prática e utilitária, voltada para a solução de problemas concretos como divisão de terras, cálculo de impostos, construções e transações comerciais (BOYER, 1996; EVES, 2004). Seus registros, embora escassos devido à fragilidade do papiro, revelam um pensamento matemático embrionário que, inclusive, abordava problemas que hoje classificamos como equações do segundo grau.

Os principais suportes documentais que nos permitem acessar a matemática egípcia são o Papiro de Rhind ou de Ahmes, c. 1650 a.C. e o Papiro de Moscou c. 1850 a.C. Entretanto, para problemas de natureza quadrática, o documento mais revelador é o Papiro de Berlim (c. 1950 a.C.), que contém um dos exemplos mais antigos de um problema que recai em um sistema de equações, uma das quais é quadrática (PEDROSO, 2010) (PEDROSO, 2010; MIATELLO, 2012).

Figura 2. Exemplos de documentos matemáticos egípcios.



(a) Papiro de Rhind



(b) Papiro de Moscou

Fonte: Papiro de Rhind ()

Um problema emblemático do Papiro de Berlin, citado por Pedroso (2010) e Silva (2019), pode ser assim traduzido:

“A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é igual ao quádruplo do lado do outro. Quais são os lados dos quadrados?”.

Em notação algébrica moderna, expressaríamos esse problema pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x = 4y \text{ ou } y = \frac{3x}{4} \end{cases}$$

A solução apresentada pelo escriba egípcio não utilizava simbolismo algébrico, mas sim o método da falsa posição, uma técnica característica da matemática egípcia aplicada inicialmente a equações lineares e adaptada para este caso mais complexo. O procedimento, como reconstituído por Eves (2004) e detalhado por Silva (2019), era executado retoricamente em passos lógicos:

1º PASSO: Suposição inicial (Falsa Posição): Assume-se um valor conveniente para uma das incógnitas. Para evitar frações, toma-se $x = 4$ e $y = 3$, já que $y = \frac{3x}{4}$.

2º PASSO: Verificação: Calcula-se o resultado com os valores assumidos: $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. O resultado desejado era 100, não 25.

3º PASSO: Como 25 deve ser multiplicado por 4 para chegar a 100, logo: $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$, aplica-se este fator aos valores assumidos.

4º PASSO: Os lados procurados são $x = 4 \cdot 2 = 8$ e $y = 3 \cdot 2 = 6$. De fato, quando calcularmos com os novos valores temos: $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$.

Este método revela uma sofisticação conceitual notável. Os egípcios não manipulavam equações abstratas, mas operavam sobre quantidades numéricas específicas, utilizando a proporcionalidade inerente ao problema para encontrar a solução correta a partir de uma suposição inicial incorreta. Essa abordagem é um testemunho de um pensamento matemático prático e intuitivo, mas profundamente lógico.

É crucial contextualizar que os egípcios não possuíam o conceito de equação quadrática como o entendemos hoje. Eles resolviam *problemas* que, em *nossa interpretação moderna*, podem ser modelados por equações de segundo grau. Sua matemática era retórica e geométrica: os números estavam sempre associados a grandezas concretas, como medidas de lado, área ou quantidade de grãos (ROQUE, 2012; ESPINOZA, 2024).

Evidências encontradas no Papiro de Kahun, que envolvem problemas de soma de quadrados, acabam por colaborar ainda mais com o que os escribas egípcios escreviam: não se limitavam a soluções casuais, mas dominavam uma técnica algorítmica sistemática, o método da falsa posição para abordar uma classe de problemas. Esta é, talvez, sua contribuição mais duradoura, não uma fórmula específica, mas a concepção pioneira de um algoritmo, uma sequência de passos lógicos e generalizáveis que podia ser aplicada a diferentes contextos numéricos. Sob esta ótica, o método da falsa posição se revela como um precursor conceptual dos métodos iterativos numéricos, nos quais uma suposição inicial é refinada sistematicamente para se aproximar de uma solução, prática que permanece fundamental na computação científica atual.

Em suma, o Egito Antigo não nos deu a fórmula de Bhaskara, mas nos presenteou com a poderosa ideia de que é possível partir de um chute inicial errado e, através de uma lógica clara e consistente, chegar à resposta certa. Esse princípio, fundamentado na proporcionalidade e na experimentação numérica, é um marco fundamental na história da resolução de problemas matemáticos.

2.4 GRÉCIA

A civilização grega foi responsável por uma das mais profundas transformações no pensamento matemático da Antiguidade. Atuando entre os séculos VI a.C. e III d.C., os matemáticos gregos promoveram uma mudança de paradigma em relação às culturas que os precederam: em vez de se basearem apenas em métodos empíricos e práticos, como era comum entre babilônios e egípcios, buscavam construir um conhecimento sistemático, lógico e dedutivo. Essa mudança está diretamente ligada ao surgimento da filosofia grega, que valorizava a razão como instrumento de compreensão do mundo.

A matemática grega está fortemente ligada à geometria, e essa conexão marcou profundamente a forma como os gregos abordaram problemas que hoje classificamos como equações do 2º grau. Por não possuírem uma linguagem algébrica simbólica, a resolução desses problemas era feita a partir de construções geométricas rigorosas, apoiadas por demonstrações formais. O mais importante registro dessa tradição é a obra *Elementos*, de Euclides (c. 300 a.C.), composta por treze livros que sistematizam o conhecimento geométrico da época.

Em Elementos, especialmente nos livros II e VI, encontram-se proposições que equivalem à resolução geométrica de equações quadráticas. Uma das mais notáveis é a Proposição II.6, que, em linguagem moderna, pode ser interpretada como:

“Se dois segmentos de reta a e b forem somados e multiplicados entre si, ou seja, $a \cdot b$, então o produto pode ser representado como a diferença entre o quadrado da média aritmética e o quadrado da semidiferença.”

Ou seja, os gregos visualizavam expressões como $x^2 + bx = c$ como construções compostas de áreas, em que um quadrado de lado x era somado a um retângulo de área bx . Para resolver a equação, construía-se então um novo quadrado cuja área total fosse c . Dessa forma, o valor de x era obtido extraindo-se a raiz quadrada dessa área.

Por exemplo, considere a equação $x^2 + 6x = 16$. Para os gregos x^2 representava a área de um quadrado de lado x , enquanto $6x$ correspondia a um retângulo justaposto a esse quadrado. A tarefa consistia em completar a figura de modo a formar um quadrado maior com área total 16. Construindo esse novo quadrado, eles chegavam ao lado igual a $x + 3$, pois adicionavam ao quadrado inicial as partes necessárias para completar o retângulo em um quadrado perfeito. Assim, obtinha-se a relação $(x + 3)^2 = 25$ cuja solução era $x = 2$.

2.5 CONTRIBUIÇÃO ÁRABE

A consolidação da álgebra como campo de conhecimento autônomo e sistematizado deve-se, em grande medida, aos eruditos do mundo islâmico medieval. Eles não foram meros preservadores do conhecimento grego e indiano, mas sim sintetizadores e inovadores que lhes deram uma nova estrutura metodológica. A figura central desse movimento foi Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780–850 d.C.), cuja obra permitiu que a álgebra emergisse da sombra da geometria.

Al-Khwarizmi, trabalhando na Casa da Sabedoria (*Bayt al-Hikma*) em Bagdá, expôs seu método em sua obra mais famosa: *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala* (“O Livro Compêndio sobre Cálculo por Completação e Balanceamento”). O título introduz as duas operações fundamentais de seu método: o al-jabr e o al-muqabala.

O termo al-jabr, que significa “restauração”, referia-se ao ato de transpor um termo subtraído para o outro lado da equação, tornando-o positivo. Essa operação representava o primeiro passo na resolução das equações, conforme o método descrito por Al-Khwarizmi.

Exemplo 2.1. *Considere a equação*

$$x^2 = 40x - 4x^2.$$

Para aplicar o procedimento de al-jabr, soma-se $(4x^2)$ a ambos os lados, obtendo-se

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

$$4x^2 + x^2 = 40x - 4x^2 + 4x^2.$$

Em seguida, somam-se os termos semelhantes do primeiro membro, resultando em

$$5x^2 = 40x.$$

Dessa forma, a equação é transformada segundo o princípio de al-jabr, isto é, por meio da restauração dos termos.

A segunda operação, denominada al-muqabala, significa “balanceamento” e corresponde ao processo de simplificar ou equilibrar termos semelhantes em ambos os lados da equação.

Exemplo 2.2. Considere a equação

$$50 + 3x + x^2 = 29 + 10x.$$

Aplicando o método de al-muqabala, subtraem-se os termos semelhantes de ambos os lados:

$$\begin{aligned} 50 - 29 + 3x - 10x + x^2 &= 29 - 29 + (10x - 10x) \\ 21 - 7x + x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos em ordem decrescente de grau, obtém-se a forma canônica:

$$x^2 - 7x + 21 = 0.$$

Assim, os métodos de al-jabr e al-muqabala constituem as bases do pensamento algébrico desenvolvido por Al-Khwarizmi, revelando uma abordagem sistemática para a resolução de equações e um marco essencial na formação da álgebra como campo autônomo do conhecimento matemático.

A monumental contribuição de Al-Khwarizmi foi classificar as equações de primeiro e segundo grau em seis tipos canônicos, nos quais os coeficientes eram sempre números positivos. Para as quadráticas, os tipos eram:

1. $ax^2 = bx$ Quadrados iguais a raízes
2. $ax^2 = c$ Quadrados iguais a números
3. $c = bx$ Raízes iguais aos números
4. $ax^2 + bx = c$ Quadrado mais raízes iguais a números
5. $ax^2 + c = bx$ Quadrado mais números iguais a raízes
6. $ax^2 = bx + c$ Raízes mais números iguais a quadrado

Al-Khwarizmi, em sua obra seminal, ilustrava o quarto tipo de equação quadrática, quadrados e raízes iguais a números com um problema concreto: um Mal e dez Jidhr igualam 39 dinares (ROQUE, 2012). Na notação matemática contemporânea, esse problema corresponde à equação $x^2 + 10x = 39$. O procedimento resolutivo descrito por ele, de forma inteiramente retórica, seguia os seguintes passos:

1. Tome a metade da quantidade de Jidhr (nesse exemplo é dado como 5, de modo que $10/2 = 5$).
2. Multiplique essa quantidade por si mesma ($5 \cdot 5 = 25$).
3. Some no resultado os Adad (ou seja, temos: $25 + 39 = 64$)
4. Extraia a raiz quadrada do resultado (como a resposta foi 64, temos: $\sqrt{64} = 8$).
5. Subtraia desse resultado a metade dos Jidhr, encontrando a solução ($8 - 5 = 3$).

Tomando uma equação qualquer do tipo $ax^2 + bx - c = 0$ ou ainda $ax^2 + bx = c$, podemos observar que a solução procurada pode ser dada:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Seguindo essa linha de raciocínio, torna-se inegável o valor das contribuições árabes, particularmente no desenvolvimento da álgebra e da geometria. Embora a profundidade teórica dos gregos permaneça insuperável em certos aspectos, a importância dos avanços árabes é singular. Eles foram os grandes responsáveis pela preservação e disseminação do conhecimento da Antiguidade, tarefa monumental realizada por meio de instituições como a Casa da Sabedoria em Bagdá. Dessa forma, mais do que criadores isolados, os árabes atuaram como sintetizadores fundamentais, assegurando a continuidade do pensamento matemático e preparando o terreno para os desenvolvimentos futuros na Europa.

2.6 CONTRIBUIÇÃO INDIANAS

A civilização hindu teve um papel fundamental no desenvolvimento da Álgebra e, em particular, na resolução das equações quadráticas.

Entre aproximadamente 400 e 1200 d.C., período considerado o auge da matemática indiana, surgiram grandes pensadores que contribuíram de maneira decisiva para o avanço da ciência matemática. Entre eles, destaca-se Aryabhata (século VI d.C.), reconhecido como o primeiro matemático indiano a propor um método sistemático para a resolução das equações completas do segundo grau. Em suas obras, Aryabhata descreveu procedimentos para encontrar raízes e resolver equações, apresentando regras aritméticas para a extração de raízes quadradas e cúbicas, além de métodos práticos para solucionar equações do tipo

$$ax^2 + bx = c.$$

Ele indicava passos sequenciais que envolviam operações de soma, divisão e multiplicação até a obtenção do valor da incógnita, o que se aproxima do que hoje chamamos de *algoritmo de resolução*.

Segundo SILVEIRA (2015), os hindus já discutiam a existência dos números negativos, sendo o primeiro registro explícito feito pelo matemático Brahmagupta:

“Os hindus já discutiam a existência dos números negativos, sendo o primeiro registro explícito de número negativo feito pelo matemático Brahmagupta.” (SILVEIRA; ÊNIO, 2015, p. 15)

O trabalho de Brahmagupta teve impacto significativo nas construções matemáticas posteriores, pois popularizou o conceito do zero e definiu regras para a aritmética com números negativos — que ele denominava “*dívidas*” — e com o zero, em concepções próximas ao entendimento atual da matemática moderna. Em sua obra *Brahmasphutasiddhanta*, ele estabeleceu que:

1. A soma de duas dívidas é uma dívida: $-a + (-b) = -(a + b)$;
2. O produto de duas dívidas é uma fortuna: $-a \cdot -b = ab$;
3. A subtração de uma dívida de uma fortuna é equivalente à sua soma: $a - (-b) = a + b$.

Brahmagupta também forneceu procedimentos equivalentes às fórmulas modernas para casos como

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

demonstrando, pela primeira vez, uma abordagem verdadeiramente geral e abstrata para o problema das equações quadráticas.

Outro nome de destaque na tradição matemática hindu é Bhaskara (1114–1185), que introduziu métodos inovadores e sistemáticos para a solução de problemas, incluindo as equações do segundo grau. Recorrendo aos conhecimentos de sua época, escreveu sua grande obra *Sidhanta Ciromani*, na qual consolidou definitivamente os estudos sobre as equações quadráticas, apresentando a fórmula que até hoje leva o seu nome a fórmula de Bhaskara.

2.7 CONTRIBUIÇÃO EUROPEIAS

A partir do século XV, a Europa tornou-se o centro de importantes avanços matemáticos, especialmente no campo da álgebra. Com a recuperação e tradução de textos árabes e gregos, os estudiosos europeus não apenas assimilaram conhecimentos anteriores, mas também introduziram inovações significativas na notação, na generalização de métodos e na resolução de equações quadráticas. Dois nomes se destacam nesse processo: François Viète e René Descartes, cujas contribuições permitiram a consolidação da álgebra como a conhecemos hoje.

2.7.1 François Viète

François Viète, matemático francês, é frequentemente chamado de “pai da álgebra moderna” devido à sua introdução sistemática do uso de letras para representar quantidades conhecidas e desconhecidas. Em sua obra *In Artem Analyticem Isagoge* (1591), Viète propôs que as consoantes representassem valores conhecidos (coeficientes) e as vogais as incógnitas. Essa inovação permitiu que as equações fossem tratadas de forma geral, e não apenas por meio de exemplos numéricos. No espaço das equações quadráticas, ele desenvolveu um método que consiste na mudança de variável, a qual transforma-o de sua forma completa em uma incompleta.

De acordo com o texto de Pedroso (2010), dada uma equação geral da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, tome $x = u + v$ e substitua na equação original, obtendo:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a(u+v)^2 + b(u+v) + c &= 0 \\ a(u^2 + 2uv + v^2) + bu + bv + c &= 0 \\ au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c &= 0 \\ av^2 + v(2au + b) + au^2 + bu + c &= 0. \end{aligned}$$

Buscando valores de u para que v seja nulo, tem-se:

$$2au + b = 0 \implies u = -\frac{b}{2a}.$$

Substituindo esse valor de u na equação com a nova variável, obtém-se:

$$\begin{aligned} au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c &= 0 \\ a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + 2a\left(-\frac{b}{2a}\right)v + av^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + bv + c &= 0 \\ a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - bv + av^2 - \frac{b^2}{2a} + bv + c &= 0 \\ \frac{b^2}{4a} - bv + av^2 - \frac{b^2}{2a} + bv + c &= 0 \\ av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0 \\ av^2 + \frac{b^2 - 2b^2}{4a} + c &= 0 \\ av^2 - \frac{b^2}{4a} + c &= 0 \\ av^2 &= \frac{b^2}{4a} - c \\ av^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ v^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$v = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Encontramos, portanto, o valor de x . Como $u = -\frac{b}{2a}$ e $v = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, substituindo na variável $x = u + v$ tomada inicialmente, obtemos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Essa expressão corresponde à conhecida fórmula de Bhaskara, utilizada para determinar as raízes reais de uma equação do segundo grau.

A notação criada por Viète possibilitou a generalização dos métodos algébricos, permitindo resolver equações a partir de seus coeficientes, classificar os diferentes tipos de equações e identificar casos particulares. A partir do momento em que se escreveu uma fórmula geral, resolver cada caso específico tornou-se apenas uma aplicação mecânica do procedimento. Tal avanço nos leva à conhecida fórmula de Bhaskara, que só passou a ser expressa na forma atual após a introdução do simbolismo por Viète. No entanto, não podemos atribuir a ele a criação do método, já que a técnica para resolver equações quadráticas era conhecida há muito tempo, como afirma Roque (2012).

2.7.2 René Descartes

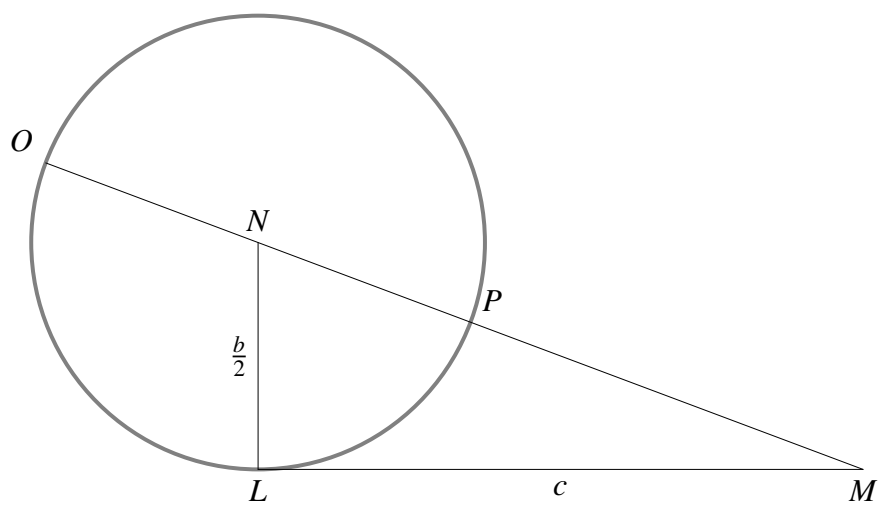
Além de Viète, outros matemáticos foram surgindo com suas respectivas colaborações para expressar a fórmula geral da equação geral de 2º grau, dentre eles está René Descartes, que foi um filósofo, matemático e físico francês, amplamente considerado um dos fundadores da filosofia moderna e da matemática contemporânea. Sua obra mais influente, *Discurso do Método* (1637), inclui um apêndice intitulado *A Geometria (La Géométrie)*, que revolucionou o modo como a álgebra e a geometria eram concebidas e integradas.

Descartes deu continuidade ao trabalho de François Viète no uso de simbolismo algébrico. Enquanto Viète usava vogais para incógnitas e consoantes para coeficientes, Descartes propôs o uso das últimas letras do alfabeto (x, y, z) para representar incógnitas, e das primeiras (a, b, c) para parâmetros conhecidos convenção que permanece até hoje.

Em *A Geometria*, Descartes apresentou métodos para resolver equações quadráticas usando construções geométricas. Por exemplo, para a equação $z^2 = az + b^2$ ele propôs a seguinte construção:

1. Construa um triângulo retângulo NLM , com $LM = c$ e $NL = \frac{b}{2}$
2. Prolongue a hipotenusa NM até um ponto O tal que $NO = NL$
3. Assim, obteremos uma linha $OM = P$

Figura 3 – Método de René Descartes.



Fonte: Autor (2025)

3 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

3.1 DEFINIÇÃO E FORMA CANÔNICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição 3.1. Chamaremos de *função quadrática*, ou *função polinomial do segundo grau*, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ os valores $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

A forma canônica de uma função quadrática consiste em reescrever o trinômio de segundo grau de modo a evidenciar sua estrutura como um *quadrado perfeito*. Tal procedimento é obtido por meio do método de completar quadrados, o qual permite não apenas desenvolver a função de maneira analítica, mas também identificar parâmetros fundamentais relacionados à sua representação geométrica.

Considere, então, o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Colocando o coeficiente a em evidência e aplicando o método de completar quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observa-se, portanto, que o termo $b^2 - 4ac$ desempenha um papel importante na estrutura da função, sendo tradicionalmente denominado de discriminante e representado pela letra grega Δ . Com essa notação, a função quadrática (3.1) pode ser reescrita de forma simplificada como:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \tag{3.2}$$

Outra forma equivalente de escrever a função quadrática (3.2) é $f(x) = a(x - m)^2 + k$, onde:

$$m = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Essa forma é denominada forma canônica ou forma de vértice, pois permite identificar diretamente o vértice da parábola representada pela função, sendo suas coordenadas dadas por $V(m, k)$. Essa representação será explorada com maior profundidade nas seções seguintes, em que serão analisadas as propriedades gráficas da função quadrática, incluindo o vértice, o ponto máximo e o ponto mínimo da parábola.

3.2 ZEROS OU RAÍZES DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Ao desenvolvermos a função em sua forma canônica, uma consequência natural dessa representação é a possibilidade de determinar as raízes ou zeros da função quadrática.

Definição 3.2. Chamam-se de raízes (ou zeros) da função do segundo grau os valores de x que tornam nula a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, aqueles que satisfazem a condição $f(x) = 0$.

Considerando, então, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e utilizando o que foi desenvolvido anteriormente em (3.1), dividindo ambos os lados por a , com $a \neq 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} &= 0 \\ \frac{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}}{a} &= \frac{0}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Como visto anteriormente, o discriminante da equação é dado por $\Delta = b^2 - 4ac$, assim, a expressão das raízes pode ser escrita de forma simplificada como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Como a , b e c são coeficientes reais, segue que o discriminante também pertence ao conjunto dos números reais, isto é, $\Delta \in \mathbb{R}$. Assim, podem-se distinguir três casos possíveis:

- **Caso 1:** Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas. De fato, quando $\Delta > 0$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Conclui-se, portanto, que $x_1 \neq x_2$, o que caracteriza duas raízes distintas.

- **Caso 2:** Se $\Delta = 0$, a equação possui uma única raiz real. Neste caso:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm 0}{2a}. \end{aligned}$$

Assim:

$$x_1 = \frac{-b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, $x_1 = x_2$, isto é, há uma única raiz real (raiz dupla).

- **Caso 3:** Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Como estamos trabalhando no conjunto dos números reais, o discriminante negativo implica que a expressão $\sqrt{\Delta}$ não está definida em \mathbb{R} . Dessa forma, conclui-se que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ não possui soluções reais quando $\Delta < 0$.

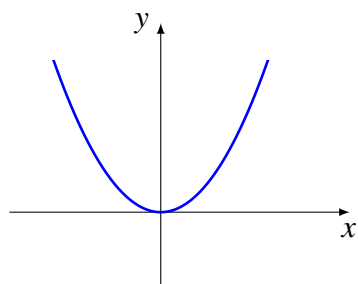
3.3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

A representação gráfica de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma curva denominada parábola. Os valores a , b e c são chamados de coeficientes (ou parâmetros) da função e determinam a forma, a posição, a concavidade da parábola, bem como a quantidade de pontos em que ela intercepta o eixo x .

3.3.1 Análise dos parâmetros da função quadrática

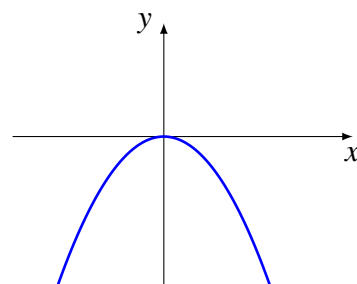
O coeficiente a é responsável pela concavidade e pela abertura da parábola. Quando $a > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima, enquanto, para $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo (ver Figura 4).

Figura 4 – Ilustração da concavidade de uma parábola em função do coeficiente a de uma equação quadrática.



(a) Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima

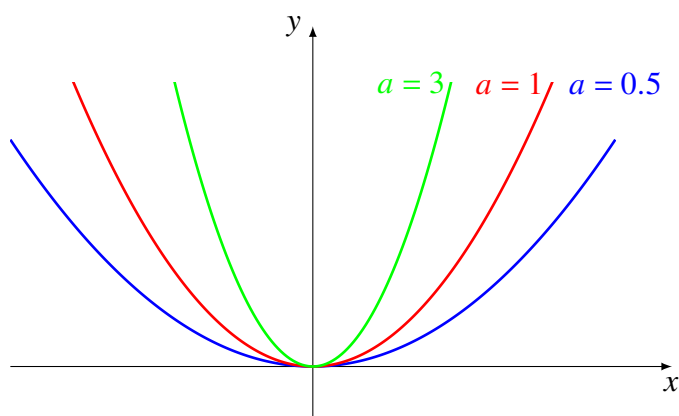
Fonte: Autor (2025)



(b) Quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Além disso, o valor absoluto de a altera o grau de abertura da curva, ver Figura 5: quanto maior $|a|$, mais estreita será a parábola; quanto menor $|a|$, mais larga ela se apresentará.

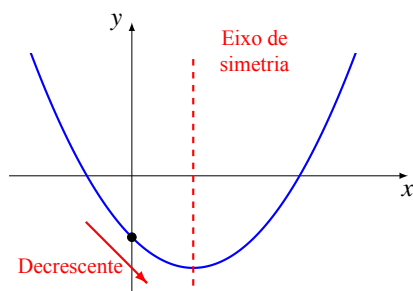
Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = ax^2$: variação do grau de abertura de parábolas com diferentes valores de a .



Fonte: Autor (2025)

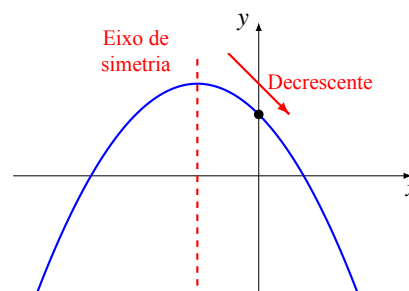
O coeficiente b exerce influência direta sobre a inclinação da parábola em relação ao eixo y . Esse parâmetro determina a direção inicial da curva após a interseção com o eixo, indicando se o ramo da parábola apresenta comportamento crescente ou decrescente nesse ponto.

Figura 6 – Ilustração dos efeitos do coeficiente $b < 0$ na função quadrática. O sinal negativo de b indica que a parábola é decrescente no ponto em que intercepta o eixo y .



(a) Quando $a > 0$ e $b < 0$, o eixo de simetria da parábola é deslocado para a direita

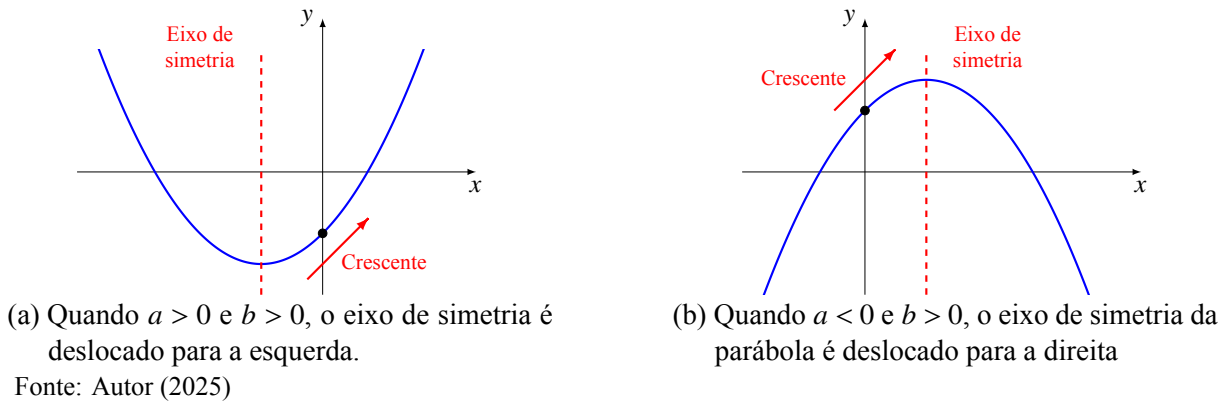
Fonte: Autor (2025)



(b) Quando $a < 0$ e $b < 0$, o eixo de simetria é deslocado para a esquerda.

Para $b < 0$, a parábola decresce imediatamente após cruzar o eixo y (ver Figura 6); para $b > 0$, apresenta crescimento (ver Figura 7); e, quando $b = 0$, a curva se mostra simétrica em relação a esse eixo (ver Figura 4). Ademais, o valor absoluto de b está associado à intensidade dessa inclinação: quanto maior $|b|$, mais acentuada será a variação da parábola ao redor do eixo y .

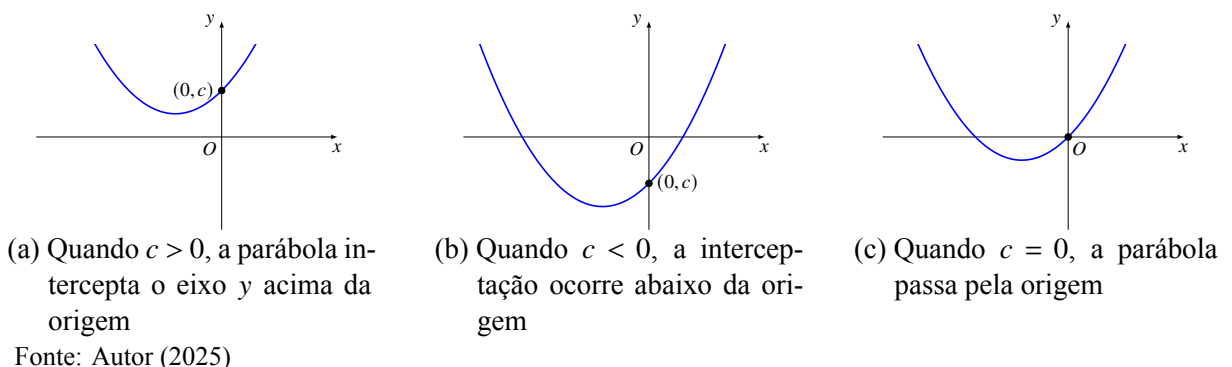
Figura 7 – Ilustração dos efeitos do coeficiente $b > 0$ na função quadrática. O sinal positivo de b indica que a parábola é crescente no ponto em que intercepta o eixo y .



Além de influenciar a inclinação, o coeficiente b também afeta o deslocamento horizontal da parábola no plano cartesiano. O sentido desse deslocamento depende da relação entre os sinais dos coeficientes a e b . Quando esses sinais são diferentes — isto é, $a > 0$ e $b < 0$, ou $a < 0$ e $b > 0$ —, a parábola desloca-se para a direita (ver Figura 6a e Figura 7b). Por outro lado, quando os sinais de a e b são iguais — $a > 0$ e $b > 0$, ou $a < 0$ e $b < 0$ —, observa-se um deslocamento para a esquerda (ver Figura 7a e Figura 6b).

O coeficiente c está associado ao deslocamento vertical da parábola e representa o ponto em que a função quadrática intercepta o eixo y . Em termos analíticos, esse valor corresponde a $f(0) = c$, indicando que, independentemente dos demais coeficientes, o termo constante define a altura inicial da parábola no plano cartesiano. Assim, o coeficiente c não altera a concavidade nem a abertura da curva, mas apenas sua posição vertical.

Figura 8 – Ilustração do efeito do coeficiente c no deslocamento vertical da parábola. O valor c define o ponto de interceptação do eixo y , $(0, c)$.



Quando $c > 0$, a parábola encontra-se deslocada para cima em relação à origem (ver Figura 8a); quando $c < 0$, encontra-se deslocada para baixo (ver Figura 8b); e, no caso de $c = 0$, a parábola passa exatamente pela origem do sistema de coordenadas (ver Figura 8c). A variação de c implica, portanto, uma translação vertical da curva, mantendo inalterados os valores de a e b , e, conseqüentemente, preservando a forma geral da parábola.

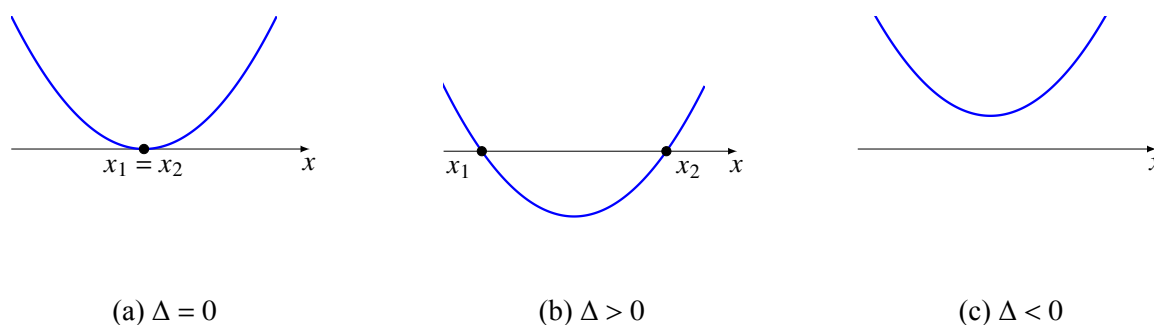
3.3.2 Pontos de intersecção com os eixos

A parábola associada à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta intersecção obrigatória com o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$, determinado diretamente pelo valor do termo constante. Essa intersecção indica o ponto em que a função assume o valor de $f(0)$, correspondendo, portanto, ao deslocamento vertical analisado anteriormente (ver Figura 8).

No que se refere ao eixo das abscissas, a parábola pode interceptá-lo em um, dois ou nenhum ponto, dependendo do valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Essa grandeza é fundamental para determinar a quantidade e a natureza das raízes reais da equação quadrática associada, refletindo-se diretamente na forma como a parábola se posiciona em relação ao eixo x . Assim:

- Para $\Delta = 0$, a parábola intercepta o eixo x em um único ponto, apresentando uma raiz real dupla (ver Figura 9a);
- Para $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos, correspondendo a duas raízes reais e diferentes (ver Figura 9b);
- Para $\Delta < 0$, a parábola não possui intersecção com o eixo x , uma vez que, nesse caso, não existem raízes reais (ver Figura 9c).

Figura 9 – Relação entre o valor do discriminante (Δ) e o número de raízes reais da função quadrática.



Fonte: Autor (2025)

3.3.3 Máximo, mínimo e vértice da parábola

A análise dos pontos de máximo e mínimo de uma função quadrática é uma das aplicações gráficas mais importantes da parábola. Esses pontos extremos estão intrinsecamente ligados ao vértice da curva, cujas coordenadas foram estabelecidas na Seção 3.1 através da forma canônica da função.

Diz-se que uma função quadrática apresenta um **valor máximo** quando atinge o maior valor possível de sua imagem. Essa situação ocorre quando o coeficiente a é negativo, isto é, $a < 0$, resultando em uma parábola com concavidade voltada para baixo. Formalmente:

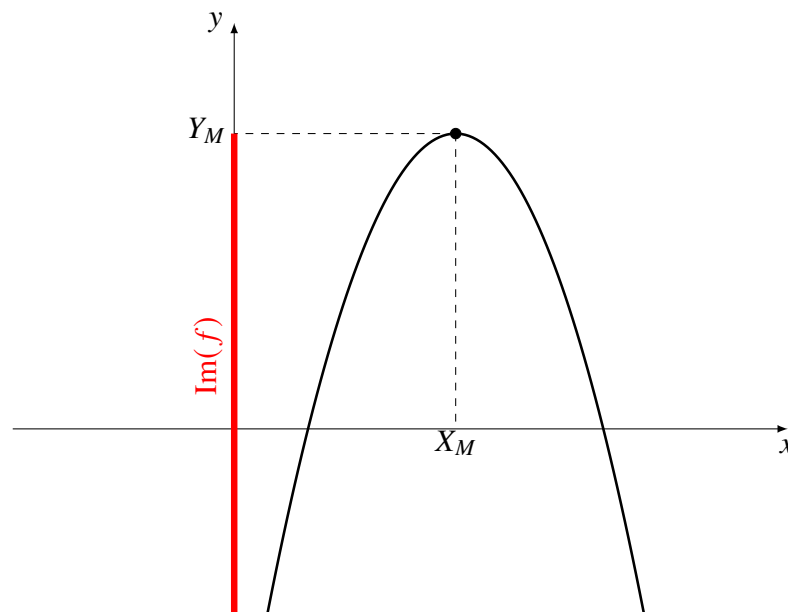
Definição 3.3 (Valor de máximo). Dizemos que o número $Y_M \in \text{Im}(f)$ é o **valor máximo** da função $y = f(x)$ se, e somente se,

$$Y_M \geq y, \quad \forall y \in \text{Im}(f).$$

O ponto $X_M \in D(f)$, tal que $Y_M = f(X_M)$, é chamado de **ponto de máximo** da função.

Geometricamente, o ponto correspondente indica o limite superior da função, sendo de grande utilidade em contextos que envolvem otimização, como na determinação da altura máxima em movimentos parabólicos, do lucro máximo em problemas econômicos ou do alcance máximo em aplicações físicas (BIANCHINI, 2011; BRASIL, 2018).

Figura 10 – Relação entre a concavidade da parábola e seus pontos extremos. Para $a < 0$, a parábola possui concavidade voltada para baixo, apresentando um ponto de máximo.



Fonte: Autor (2025)

De modo análogo, a função possui um **valor mínimo** quando assume o menor valor possível de sua imagem, o que ocorre para $a > 0$, quando a concavidade é voltada para cima. Formalmente:

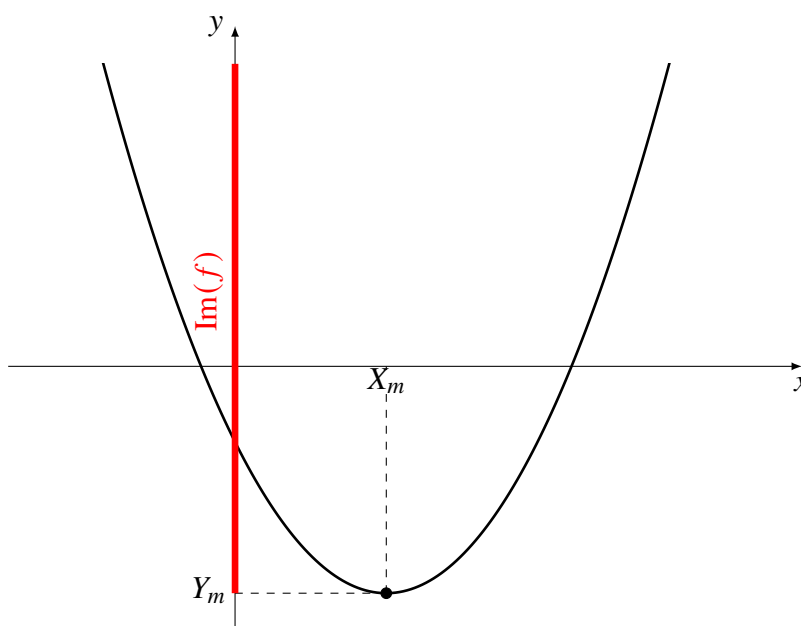
Definição 3.4 (Valor de mínimo). Dizemos que o número $Y_m \in \text{Im}(f)$ é o **valor mínimo** da função $y = f(x)$ se, e somente se,

$$Y_m \leq y, \quad \forall y \in \text{Im}(f).$$

O ponto $X_m \in D(f)$, tal que $Y_m = f(X_m)$, é chamado de **ponto de mínimo** da função.

Nesse caso, o ponto mínimo representa o limite inferior da função e tem ampla aplicação prática em situações que requerem a minimização de grandezas, como o cálculo de custos mínimos, distâncias mínimas ou posições de equilíbrio em fenômenos físicos (BIANCHINI, 2011; DANTE, 2012).

Figura 11 – Relação entre a concavidade da parábola e seus pontos extremos. Para $a > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima, apresentando um ponto de mínimo.



Fonte: Autor (2025)

A partir da análise dos pontos de máximo e mínimo, torna-se natural aprofundar o estudo sobre o vértice da parábola, uma vez que esse ponto reúne as principais informações sobre o comportamento da função quadrática.

Chama-se vértice da função quadrática o ponto V pertencente à parábola e situado sobre o seu eixo de simetria. Trata-se do ponto em que ocorre a transição no comportamento da função: nas parábolas com concavidade voltada para cima ($a > 0$), os valores de $f(x)$ passam de decrescentes para crescentes após o vértice; já nas parábolas com concavidade voltada para baixo ($a < 0$), ocorre o inverso — os valores de $f(x)$ tornam-se decrescentes após o vértice.

Graficamente, o vértice representa o ponto de máximo ou mínimo da parábola, correspondendo à ordenada de maior ou menor valor que a função pode assumir. Sua posição está diretamente relacionada aos coeficientes a , b e c da equação geral $f(x) = ax^2 + bx + c$. As coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ podem ser determinadas pelas expressões:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ representa o discriminante da função quadrática.

A abscissa x_v indica o ponto onde ocorre a mudança de crescimento da função, enquanto a ordenada y_v expressa o valor máximo ou mínimo atingido. Assim, quando $a > 0$, a parábola apresenta concavidade voltada para cima e o vértice representa o ponto de mínimo; quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo e o vértice indica o ponto de máximo (DANTE, 2010).

Teorema 3.1. *Seja a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, com o vértice no ponto*

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

- a) *Se $a < 0$, a parábola tem **ponto de máximo** em (x_v, y_v) ;*
 b) *Se $a > 0$, a parábola tem **ponto de mínimo** em (x_v, y_v) .*

Demonstração. Considere a função quadrática $f(x)$ expressa na sua forma canônica, como vimos em (3.2):

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \quad (1)$$

Sabe-se que o termo quadrático é sempre não negativo para qualquer x real, isto é:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A análise do valor extremo da função depende do sinal do coeficiente a . Assim, temos dois casos a considerar:

1. **Caso 1:** $a < 0$

Neste caso, sendo a negativo, o produto $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ é não positivo:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \leq 0.$$

Portanto, ao analisar a Equação (1), temos

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}.$$

A igualdade ocorre quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, ou seja:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Assim, $f(x)$ atinge um **valor máximo** $Y_M = -\frac{\Delta}{4a}$ no ponto $X_M = -\frac{b}{2a}$.

2. **Caso 2:** $a > 0$

Neste caso, sendo a positivo, o produto $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ também é não negativo:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0.$$

Portanto, ao analisar a Equação (1), temos

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o termo quadrático for nulo, ou seja, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, o que implica:

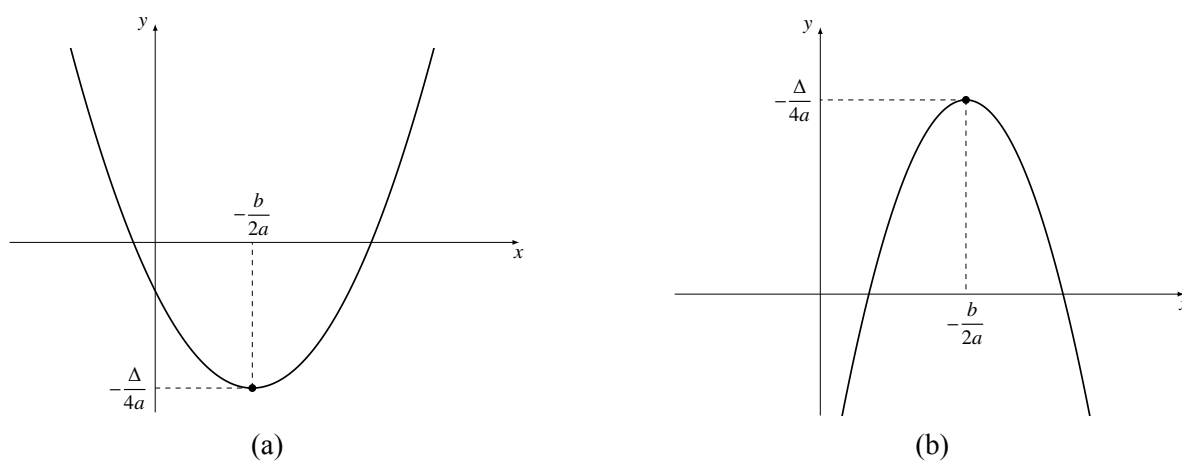
$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Logo, $f(x)$ atinge um **valor mínimo** $Y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ no ponto $X_m = -\frac{b}{2a}$.

□

A Figura 12 ilustra o resultado obtido no Teorema 3.1, evidenciando como o sinal de a determina se o vértice corresponde a um ponto de máximo ou de mínimo.

Figura 12 – Ilustração do vértice, o ponto extremo da parábola.



Fonte: Autor (2025)

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como propósito investigar as funções polinomiais do 2º grau sob uma perspectiva histórica e pedagógica, buscando compreender como o desenvolvimento das equações quadráticas percorreu diferentes civilizações até se consolidar na Matemática moderna. A partir da revisão bibliográfica realizada, foi possível compreender que o conhecimento matemático é resultado de uma construção coletiva da humanidade, impulsionada por necessidades práticas, culturais e intelectuais de cada contexto histórico. Nesse sentido, o estudo das raízes e dos gráficos das funções quadráticas revelou-se não apenas como um conteúdo algébrico, mas também como uma expressão do desenvolvimento do pensamento humano ao longo do tempo.

A análise das contribuições de povos como babilônios, egípcios, gregos, árabes, indianos e europeus permitiu compreender a evolução conceitual das equações do segundo grau, desde abordagens geométricas iniciais até a formulação algébrica atualmente utilizada. Esse resgate histórico evidenciou o potencial da História da Matemática como um importante recurso pedagógico, capaz de aproximar os estudantes da natureza humana, dinâmica e contextualizada do conhecimento matemático, contribuindo para a superação da visão de uma ciência rígida, abstrata e distante da realidade.

A literatura analisada aponta que a inserção de elementos históricos no ensino das funções quadráticas pode favorecer uma aprendizagem mais significativa, na medida em que possibilita ao estudante compreender a origem dos conceitos, suas transformações e aplicações. Ao compreender os significados associados aos coeficientes, às raízes e ao vértice da parábola, o aluno tende a ir além da simples aplicação de fórmulas, desenvolvendo a capacidade de interpretar fenômenos e atribuir sentido ao conteúdo matemático.

Dessa forma, conclui-se que o ensino das funções quadráticas ganha maior relevância quando abordado de maneira integrada, articulando aspectos históricos, conceituais e aplicados. Essa abordagem contribui para o desenvolvimento de competências matemáticas e cognitivas, como o raciocínio lógico, a interpretação de gráficos e a modelagem de situações reais, em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Por fim, ressalta-se que este trabalho, por se tratar de uma revisão bibliográfica, não esgota as discussões sobre o ensino das funções quadráticas, mas busca contribuir para reflexões acerca de práticas pedagógicas mais contextualizadas e significativas. Espera-se que este estudo incentive professores e futuros docentes a valorizarem a História da Matemática como uma aliada no processo de ensino e aprendizagem, compreendendo que cada fórmula, conceito ou gráfico carrega consigo a trajetória histórica de sua construção e o esforço humano em compreender o mundo por meio da Matemática.

REFERÊNCIAS

- BIANCHINI, E. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2010.
- DANTE, L. R. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2012. (Projeto Teláris).
- ESPINOZA, S. G. **Equação de segundo grau: história e métodos de resolução**. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)) — Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2024.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- FRIBERG, J. **A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts**. New York: Springer, 2007.
- KATZ, V. J. **A history of mathematics: an introduction**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.
- MIORIM, M. A. Matemática e cultura: uma história da matemática para professores. In: MIORIM, M. A. (Ed.). **História da Matemática: propostas para a sala de aula**. Campinas: Mercado de Letras, 2002. p. 15–36.
- Papiro de Rhind. **Papiro de Rhind**. Disponível em: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/rhind/inicio.htm>. Acesso em: 30 out. 2025.
- PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2o grau. **Revista Eletrônica de Matemática**, n. 2, p. 1–13, 2010.
- ROBSON, E. **Mathematics in Ancient Iraq: A Social History**. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SILVA, J. B. A. **Equações de 2o grau: sua história e abordagens didáticas**. João Pessoa: [s.n.], 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). 64 f.
- SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.
- VEJA. **Mistério de tábua da Babilônia é desvendado por cientistas**. 2017. <https://veja.abril.com.br/ciencia/misterio-de-tabua-da-babilonia-e-desvendado-por-cientistas/>. Acesso em: 30 10 2025. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/ciencia/misterio-de-tabua-da-babilonia-e-desvendado-por-cientistas/>.