

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas
Campus Maceió
Coordenação de Matemática
Curso Superior de Licenciatura em Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem: Uma abordagem analítica e com o software GeoGebra

Jonathan Willams Lins de Ataíde Lima

Maceió - AL, Novembro de 2023

Jonathan Willams Lins de Ataide Lima

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem: Uma abordagem analítica e com o software GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas, Campus Maceió, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas – IFAL

Campus Maceió

Coordenação de Matemática

Orientador: Dr. Arlyson Alves do Nascimento

Coorientador: Leon Cavalcante Lima

Maceió - AL

Novembro de 2023

Jonathan Willams Lins de Ataíde Lima

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem: Uma abordagem analítica e com o software GeoGebra/ Jonathan Willams Lins de Ataíde Lima. – Maceió - AL, Novembro de 2023-

53 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr. Arlyson Alves do Nascimento

Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas – IFAL

Campus Maceió

Coordenação de Matemática, Novembro de 2023.

1. Equações Diferenciais de Segunda Ordem. 2. GeoGebra. I. Nascimento, Arlyson Alves do. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Jonathan Willams Lins de Ataide Lima

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem: Uma abordagem analítica e com o software GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas, Campus Maceió, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado. Maceió - AL, 30 de Novembro de 2023:

Dr. Arlyson Alves do Nascimento
Orientador

Leon Cavalcante Lima
Coorientador

Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior
Convidado

Me. Enaldo Vieira de Melo
Convidado

Maceió - AL
Novembro de 2023

Dedico este trabalho de conclusão de curso à minha querida mãe, cujo amor incondicional, apoio e sacrifício foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Sua força e dedicação sempre foram a minha inspiração. Dedico, também, aos meus colegas de curso, pois presenciamos desafios e alegrias imensas desde o início lá em 2019 até essa etapa final, e ao meu orientador, que desempenhou um papel crucial no meu crescimento acadêmico, oferecendo orientação, conhecimento e incentivo.

Agradecimentos

Agradeço aos meus professores, colegas e amigos, cujo apoio, conhecimento e amizade enriqueceram minha vida acadêmica. À minha família, em especial à minha mãe, pelo amor incondicional e apoio constante, vocês foram minha âncora em todas as fases deste percurso.

Resumo

Modelos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de Segunda Ordem estão presentes em problemas de várias áreas das Ciências Exatas e da Terra, através de aplicações em mecânica dos fluidos, condução de calor, circuitos elétricos e fenômenos eletromagnéticos. Nesse sentido, o presente trabalho traz um estudo sobre essas equações, perpassando pelos conceitos fundamentais das de primeira ordem até os das de segunda ordem. Como exemplificação, trouxemos dois problemas modelados matematicamente, sendo um para detecção de diabetes e outro, um circuito em série Resistor (R), Indutor (L) e Capacitor (C), isto é, em série *RLC*. Inicialmente, desenvolvemos analiticamente os dois problemas, através do detalhamento de como todos os cálculos foram feitos, e a outra foi feita através de um *applet* elaborado no *software* GeoGebra durante um projeto de iniciação tecnológica desenvolvido no Instituto Federal de Alagoas - Campus Maceió, com a finalidade de os alunos poderem conciliar a parte teórica com a prática. A compreensão dos métodos de solução trata de uma etapa importante durante o processo de ensino e aprendizagem das equações diferenciais, tendo em vista que só foi possível desenvolver esse *applet* mediante o entendimento de como esses métodos funcionam. Concluimos, que a utilização do GeoGebra, em específico do *applet* utilizado para trabalhar com as Equações Diferenciais de Segunda Ordem, pode proporcionar uma maior interatividade com os problemas, tendo em vista que os alunos podem ir alterando os parâmetros para verificar o que acontece, por exemplo, com a curva solução.

Palavras-chaves: Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem. GeoGebra. Circuitos Elétricos. Modelo Para Detecção de Diabetes. Applet.

Abstract

Models involving Ordinary Second Order Differential Equations are present in several problems in various areas of Exact and Earth Sciences, through applications in fluid mechanics, heat conduction, electrical circuits and electromagnetic phenomena. In this sense, the present work presents a study on these equations, covering the fundamental concepts of first-order to second-order equations. Throughout the development of the work, with the exception of the analysis via GeoGebra, the independent variable was time, so that we could also cover Physics students, considering that in general all physical models are based on this parameter. For the application, we brought two problems involving mathematical modeling, the first being a model for detecting diabetes and the other involving a series circuit RLC. Initially, we carried out an analytical analysis of the two problems, detailing how all the calculations were made, and the other was carried out using a applet created in software GeoGebra during a technological initiation project developed at Instituto Federal de Alagoas - Campus Maceió, with the aim of students being able to combine the theoretical part with the practical part. Understanding the solution methods is an important step during the process of teaching and learning differential equations, considering that it was only possible to develop this interactive window by understanding how these methods work. We concluded, from the analysis of the problems, that the use of technology aimed at education provides students with a new learning environment through interactivity and experimentation with different scenarios.

Keywords: Second Order Ordinary Differential Equations. GeoGebra. Electric Circuits. Model for Detecting Diabetes. Applet.

Sumário

Introdução	1
1 Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	3
1.1 Conceitos Fundamentais	3
1.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem	5
1.3 Equações Exatas	6
1.4 Método dos Fatores Integrantes	7
1.5 Problema de Valor Inicial (PVI)	8
1.6 Equações Diferenciais Separáveis	10
2 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem	13
2.1 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem	13
2.2 Teorema de Existência e Unicidade	14
2.3 Equações Lineares Homogêneas	15
2.4 Princípio da Superposição	15
2.5 Wronskiano	16
2.6 Solução Geral de uma EDO homogênea	16
2.7 Equações Lineares com Coeficientes Constantes	17
2.8 Solução de EDO homogênea com Coeficientes Constantes	17
2.9 Equações Lineares Não Homogêneas	19
2.10 Método dos Coeficientes a Determinar	20
2.10.1 Polinômio	20
2.10.2 Exponencial	22
2.10.3 Seno e Cosseno	23
3 Apresentação do Software GeoGebra	25
3.1 Tela Inicial	25
3.2 Barra de Ferramentas	26
3.3 Janela de Álgebra	26
3.3.1 Campo de Entrada de Texto	26
3.4 Controle Deslizante	27
3.5 Janela CAS	28
3.5.1 Equações Diferenciais	29
3.6 Exibir gráfico de um caso particular de uma EDO	32

3.7	Visualização de um conjunto de soluções de uma EDO	33
3.8	Campo de direção de uma EDO	34
4	Problemas aplicados envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem	37
4.1	Análise algébrica	37
4.1.1	Modelo Para Detecção de Diabetes	37
4.1.2	Circuitos Elétricos	40
4.2	Análise via GeoGebra	44
4.2.1	Modelo para Detecção de Diabetes	44
4.2.2	Circuitos Elétricos	47
	Conclusão	51
	Referências	53

Introdução

A história das equações diferenciais está diretamente ligada ao desenvolvimento do cálculo diferencial durante o século XVII, em que matemáticos renomados como Wilhelm Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1642-1727) e Pierre de Fermat (1601-1665) abriram caminho para a compreensão das derivadas e, por consequência, para os estudos sobre as equações diferenciais. As soluções para esses tipos de equações, por sua vez, não eram tão fáceis e exigiam manipulações e simplificações algébricas envolvendo conceitos rudimentares. O método conhecido como separação de variáveis foi concebido por Jakob Bernoulli e generalizado por Leibniz, sendo esse método um dos primeiros avanços significativos nesse campo.

No final do século XVII e início do XVIII, novos pesquisadores sobre esses tipos de equações começaram a resolver problemas em campos como da astronomia e da física. Um exemplo de pesquisador foi o Jakob Bernoulli, sendo seu foco para o estudo do movimento planetário usando os princípios de gravidade e do momento desenvolvidos por Newton. Outrossim, Johann Bernoulli, irmão de Jakob, foi um dos primeiros a utilizar o cálculo de Leibniz e princípios de mecânica para modelar fenômenos físicos que envolviam equações diferenciais. Outro matemático renomado de nome Giacomo Ricatti também deu contribuições positivas para o estudo sobre as equações diferenciais, embora tenha enfrentado bastante desafios devido à falta de ferramentas para resolver casos especiais da equação que hoje leva seu nome (Equação de Ricatti).

Mesmo com todas essas contribuições desses matemáticos, foi apenas com a chegada de Leonhard Euler (1707-1783) que as equações diferenciais começaram a ser profundamente compreendidas. Euler fez estudos minuciosos sobre as propriedades das funções, desenvolveu procedimentos para solucionar uma grande variedade de equações além de introduzir o método de variação de parâmetros em 1739. À medida que o século XIX avançava, matemáticos como Gauss, Cauchy e Lipschitz desenvolveram teoremas de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem.

De acordo com [Boyce e DiPrima \(2020\)](#), as equações lineares de segunda ordem tem uma relevância importante nos estudos das equações diferenciais, apresentando uma estrutura teórica rica em que parte considerável dessa estrutura é possível compreender mesmo por aqueles com conhecimentos elementar em matemática. Ainda segundo o autor, o uso de um computador pode ser uma ferramenta bastante útil no estudo das equações diferenciais, mas devemos considerar as circunstâncias para melhor aproveitamento desse recurso.

Para [Bassanezi \(2002\)](#), a modelagem matemática consiste na transformação de

um problema da realidade para um matemático em que resolvemos e interpretamos as soluções na linguagem do mundo real. Nesse sentido, a justificativa para a escolha do tema deste trabalho está na relevância das Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem na modelagem de problemas com aplicabilidade no cotidiano que envolvem a multidisciplinaridade, como é o caso dos dois problemas escolhidos para serem analisados neste trabalho.

Desse modo, o presente trabalho tem por objetivo aprofundar o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem através da abordagem analítica e com a utilização do *software* GeoGebra em dois problemas específicos. A partir dos próximos capítulos, antes de partirmos para os conceitos das EDOs de segunda ordem, iremos explorar os conceitos fundamentais das de primeira ordem, estaremos apresentando as principais ferramentas desse *software* voltadas às equações diferenciais e, por fim, realizaremos as análises desses dois problemas, sendo um envolvendo um modelo para detecção de diabetes e outro na área de circuitos elétricos.

1 Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

De início, iremos falar brevemente sobre os conceitos fundamentais das equações diferenciais de primeira ordem, tendo em vista que o foco principal deste trabalho são as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, mas não podemos partir para esse conteúdo sem antes falar das de primeira ordem. Deixaremos aqui, como indicação de referência bibliográfica para melhor aprofundamento nas Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira ordem e possíveis demonstrações, o livro de [Zill \(2016\)](#) e também o de [Boyce e DiPrima \(2020\)](#). Outra indicação de referência é [Stewart \(2013\)](#) em que consta, em seu capítulo 2 e 3, as técnicas de derivação, e o capítulo 5 fala sobre o conceito de integral que utilizaremos durante as resoluções de problemas envolvendo as EDOs.

Por motivos de simplificação nas expressões, estaremos representando as derivadas utilizando a notação de Lagrange, a saber, seja $y(t)$ uma função que depende do tempo. Sua derivada será expressa por $y'(t)$ ou apenas y' , sendo as duas representações conhecidas como a derivada de f com relação a t . Ademais, as que estiverem utilizando esse tipo de representação, assumiremos que elas dependerão sempre do tempo (t).

Nesse sentido, nesta seção iremos tratar das equações diferenciais ordinárias representadas como

$$y' = f(t, y), \tag{1.1}$$

em que f trata de uma função que contém duas variáveis, nesse caso, denominadas por t e y . Seja I um intervalo aberto, se tivermos uma função derivável $y = \phi(t)$ que satisfaça (1.1), para todo $t \in I$, dizemos que essa função é uma solução da EDO.

1.1 Conceitos Fundamentais

Nesta seção iremos tratar dos principais conceitos sobre as equações diferenciais de primeira ordem. Para um maior aprofundamento sobre o assunto, ver ([BOYCE; DIPRIMA, 2020](#)).

As equações diferenciais podem ser classificadas pelo tipo, pela ordem e também por sua linearidade. No que se refere ao tipo, podemos ter uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) ou uma Equação Diferencial Parcial (EDP). Se as funções desconhecidas depender apenas de uma variável, chamamos de EDO. Já as EDPs envolvem derivadas parciais de uma ou mais funções, sendo essas funções dependentes de duas ou mais variáveis.

Exemplo 1.1.1 (EDO). *São exemplos de EDOs as seguintes equações:*

1. $y' - 10y = e^t$.
2. $y'' + y' = 0$.
3. $y' + 2ty = t$.

Exemplo 1.1.2 (EDP). Temos como exemplo de EDP a equação da condução de calor, representada como

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Em relação à classificação pela ordem da equação, sua especificação se dá pela ordem da maior derivada presente na equação. Assim, se em uma equação contém, por exemplo, a segunda derivada como sendo a maior, temos que a equação diferencial é chamada de segunda ordem. De forma geral, se y está em função de t , podemos representar uma EDO de ordem n como

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.2)$$

sendo F uma função de t , e $y, y', \dots, y^{(n)}$ suas derivadas. No exemplo abaixo, temos, respectivamente, EDO de primeira, segunda e terceira ordem.

Exemplo 1.1.3.

1. $y' + 2y = 3t$.
2. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
3. $y''' + 2y'' - 3y' + 4y = 5t$.

Por fim, relativo à linearidade da EDO, chamamos de EDO linear se a função F em (1.2) for linear com relação à variável dependente e suas derivadas. De outra forma, a variável dependente e suas derivadas aparecem apenas com expoentes iguais a um e não estão multiplicadas ou divididas entre si. De forma geral, ela pode ser representada como

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t), \quad (1.3)$$

em que cada coeficiente a_0, a_1, \dots, a_n dependem apenas da variável independente t . Por outro lado, a equação diferencial que não pode ser escrita como (1.3) é chamada de não linear. Abaixo temos exemplos de EDO linear e não-linear.

Exemplo 1.1.4 (Linear).

1. $t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0$.

Exemplo 1.1.5 (Não-linear).

1. $y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$.

1.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Definição 1.2.1. Dada a equação diferencial $y' = f(t, y)$, se f depende linearmente da variável dependente y , então é possível escrever f na forma

$$f(t, y) = -p(t)y + g(t),$$

em que p e g são funções contínuas no intervalo aberto $\alpha < t < \beta$. Assim, ao substituirmos f na equação diferencial, obtemos a seguinte equação

$$y' + p(t)y = g(t), \tag{1.4}$$

conhecida como a forma geral da equação diferencial linear de primeira ordem.

Dessa forma, resolver (1.4) é encontrar funções diferenciáveis que satisfazem (1.4) para valores de t . É importante lembrar que uma equação linear não pode envolver nenhum termo não linear (como yy' , y^3 ou $\sin(y')^2$). Temos, no exemplo abaixo, EDOs lineares de primeira ordem.

Exemplo 1.2.1.

1. $(5 + t^2)y' + 3ty = 6t$.

Para acharmos a solução de uma EDO linear de primeira ordem quando $p(t) \neq 0$ e $g(t) \neq 0$, estaremos fazendo uso do método do fator integrante que veremos logo a seguir, mas se tivermos ou $p(t) = 0$ ou $g(t) = 0$ é possível encontrar a solução utilizando algumas manipulações.

No primeiro caso, se $p(t) = 0$, então teremos a seguinte equação

$$y' = g(t). \tag{1.5}$$

Com isso, ao integrarmos ambos os membros de (1.5), obteremos

$$\begin{aligned} \int y' dt &= \int g(t) dt \\ y(t) &= \int g(t) dt + k, \end{aligned} \tag{1.6}$$

em que k é a constante de integração. Assim, a equação (1.6) é conhecida como solução geral da EDO (1.5).

No segundo caso, temos $g(t) = 0$, desse modo, teremos a seguinte equação

$$y' + p(t)y = 0. \tag{1.7}$$

Devemos, agora, tentar fazer algumas manipulações em (1.7) de forma a conseguir uma solução geral para essa EDO. Para facilitar a visualização da manipulação, vamos

expressar $y' = \frac{dy}{dt}$ e somar $-p(t)y$ em ambos os membros de (1.7), tendo como resultado a expressão a seguir

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + p(t)y - p(t)y &= 0 - p(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= -p(t)y.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Ao multiplicar (1.8) por $\frac{dt}{y}$, com $y(t) \neq 0$, teremos

$$\begin{aligned}\left(\frac{dt}{y}\right) \frac{dy}{dt} &= -p(t)y \left(\frac{dt}{y}\right) \\ \left(\frac{1}{y}\right) dy &= -p(t)dt.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Desse modo, temos que a expressão do primeiro membro de (1.9) depende de y e a do segundo membro depende de t , ou seja, as variáveis estão separadas, logo, é possível integrar ambos os membros novamente. Assim, sendo $y > 0$, análogo para $y < 0$, ficaremos com

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{y}\right) dy &= \int -p(t) dt \\ \ln y &= \int -p(t) dt + k.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Ao aplicar a exponencial em ambos os membros de (1.10), teremos

$$\begin{aligned}\exp(\ln y) &= \exp\left(\int -p(t) dt + k\right) \\ y(t) &= \exp\left(\int -p(t) dt\right)(e^k) \\ y(t) &= e^k \exp\left(-\int p(t) dt\right).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Como e^k trata de uma constante, podemos fazer a substituição por uma outra constante C , isto é, $C = e^k$. Dessa maneira, a solução da EDO (1.7) é

$$y(t) = C \exp\left(-\int p(t) dt\right).$$

1.3 Equações Exatas

Definição 1.3.1. *Considerando a equação na forma*

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0,\tag{1.12}$$

dizemos que tal equação é exata se existir uma função $\psi(t, y)$ tal que

$$d\psi(t, y) = M(t, y)dx + N(t, y)dy.$$

Assim, se (1.12) é exata, existe uma função $\psi(t, y)$ de modo que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = M(t, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(t, y) = N(t, y), \quad (1.13)$$

em que $\psi(t, y) = c$ trata da solução geral da equação.

1.4 Método dos Fatores Integrantes

O método de fator integrante é utilizado para tornar a equação (1.12) exata através da multiplicação por um fator integrante $\mu(t, y)$ adequado.

Definição 1.4.1. *Dada a equação (1.12) e um ponto (t_0, y_0) , se existir uma função $\mu \equiv \mu(t, y)$ tal que*

$$\mu M + \mu N y' = 0, \quad (1.14)$$

dizemos que essa função é um fator de integração.

Desse modo, teremos que a equação (1.14) será exata se, e somente, se

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}.$$

As situações mais simples para encontrar esse fator integrante ocorre quando μ é uma função que ou só depende de t ou só de y . Vamos supor que μ é uma função só de t , assim, teremos

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \quad (\mu N)_t = \mu N_t + N \frac{d\mu}{dt}.$$

Dessa maneira, se $(\mu M)_y = (\mu N)_t$, segue que

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{M_y - N_t}{N} \mu \Rightarrow \mu(t) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_t}{N} dt\right), \quad (1.15)$$

se o quociente $\frac{M_y - N_t}{N}$ depender somente de t . De forma análoga, quando $\mu \equiv \mu(y)$, isto é, o fator integrante depende somente de y , segue que

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_t - M_y}{M} \mu \Rightarrow \mu(y) = \exp\left(\int \frac{N_t - M_y}{M} dy\right), \quad (1.16)$$

caso o quociente $\frac{N_t - M_y}{M}$ dependa somente de y .

Exemplo 1.4.1. *Resolva a seguinte equação diferencial pelo método de fatores integrantes*

$$(2y^2 + 3t) dt + 2ty dy = 0. \quad (1.17)$$

Solução 1.4.1. É possível observar que a EDO fornecida em (1.17) não é exata, pois, sendo $M(t, y) = 2y^2 + 3t$ e $N(t, y) = 2ty$, implica que $M_y = 4y \neq 2y = N_t$. Agora, precisamos determinar se ela tem um fator integrante que só depende de t ou só de y . Assim, sendo M e N fornecidas anteriormente, temos:

$$\frac{M_y - N_t}{N} = \frac{4y - 2y}{2ty} = \frac{2y}{2ty} = \frac{1}{t}, \quad t \neq 0.$$

Com isso, considerando $t > 0$, análogo para $t < 0$, existe um fator de integração dado por

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{1}{t} dt\right) = e^{\ln t} = t.$$

Dessa forma, multiplicando a equação (1.17) por t , obtemos

$$(2ty^2 + 3t^2) dt + 2t^2y dy = 0. \quad (1.18)$$

Assim, temos que a equação (1.18) é exata, pois, sendo $M(t, y) = 2ty^2 + 3t^2$ e $N(t, y) = 2t^2y$, implica que $M_y = 4ty = N_t$. Desse modo, existe uma função $\psi(t, y)$ tal que

$$\psi_t(t, y) = 2ty^2 + 3t^2 \quad (1.19)$$

e

$$\psi_y(t, y) = 2t^2y. \quad (1.20)$$

Analogamente ao que fizemos no tópico de equações exatas, ao integrar (1.20) com relação a y , obtemos

$$\psi(t, y) = t^2y^2 + h(t). \quad (1.21)$$

Derivando (1.21) com relação a t e utilizando (1.19), temos

$$\begin{aligned} 2ty^2 + 3t^2 &= 2ty^2 + h'(t) \\ h'(t) &= 3t^2 \quad \Rightarrow \quad h(t) = t^3. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Portanto, as soluções da equação (1.18) e, por consequência, da EDO são dadas por

$$\psi(t, y) = t^2y^2 + t^3 = c \quad (c = \text{constante.})$$

1.5 Problema de Valor Inicial (PVI)

Ao resolvermos uma equação diferencial nós podemos encontrar um conjunto de soluções o qual chamamos de solução geral. Nesse sentido, para encontrarmos a solução particular de uma equação diferencial, nós teremos que tomar como base uma condição inicial dessa equação, ou seja, quando $y(t_0) = y_0$, que indica que a curva passa pelo ponto (t_0, y_0) . Dessa forma, se conhecermos algumas condições do problema, nós podemos determinar a solução particular para a equação diferencial que foi fornecida. Assim sendo, temos a seguinte definição.

Definição 1.5.1. Um Problema de Valor Inicial (P.V.I) de uma equação diferencial de primeira ordem é dado por

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

em que t_0 e y_0 são valores fornecidos pelo problema. A solução $y = \phi(t)$ deste problema é uma solução da equação diferencial $y' = f(t, y)$ que também satisfaz a condição inicial $\phi(t_0) = y_0$.

Exemplo 1.5.1. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 5,7 \end{cases} \quad (1.23)$$

Solução 1.5.1. Primeiro, antes de resolvermos, vamos colocar a equação acima na forma geral expressada em (1.4):

$$y' - 3y = 0.$$

Com isso, obtemos a mesma equação que utilizamos no exemplo (1.4.1), cuja solução geral da equação é $y(t) = k_2 e^{3t}$. Pelo P.V.I, quando $t = 0$, implica que $y(0) = 5,7$, dessa forma, temos:

$$y(0) = k_2 e^{3(0)}$$

$$k_2 e^0 = 5,7$$

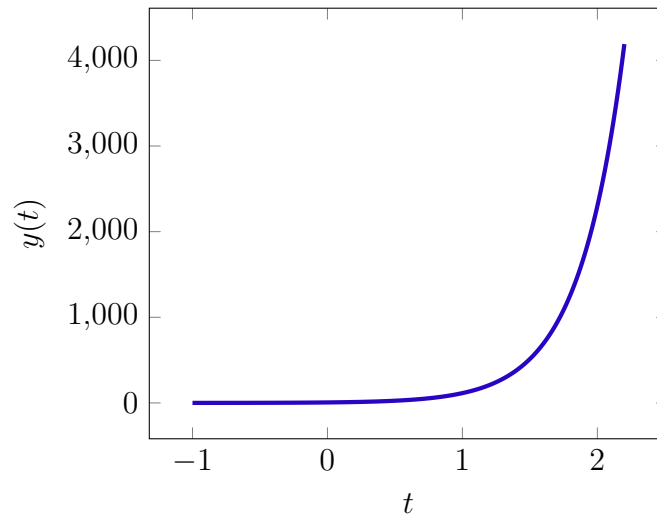
$$k_2(1) = 5,7$$

$$k_2 = 5,7.$$

Portanto, a solução do PVI (1.23) é

$$y(t) = 5,7e^{3t}.$$

A Figura 1 mostra o gráfico da solução $y(t) = 5,7e^{3t}$.

Figura 1 – Gráfico da curva solução $y(t)$.

Fonte: Autor (2023)

1.6 Equações Diferenciais Separáveis

Definição 1.6.1. Uma EDO do tipo (1.1) é chamada de separável se conseguirmos separar as variáveis pelo sinal da igualdade. Desse modo, podemos escrever uma EDO separável como

$$g(y)y' = f(t). \quad (1.24)$$

Convenientemente, como $y' = \frac{dy}{dt}$, costumamos escrever a equação (1.24) na forma

$$g(y)dy = f(t)dt. \quad (1.25)$$

Para resolvermos a equação (1.24), temos que fazer a integração com relação a t , o que nos faz obter

$$\int g(y)y' dt = \int f(t) dt. \quad (1.26)$$

Do lado esquerdo de (1.26) ficaremos apenas com a expressão dependendo de y , pois se lembrarmos, temos que $y' = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y'dt = dy$. Logo, ao efetuar essa alteração, teremos

$$\int g(y) dy = \int f(t) dt. \quad (1.27)$$

Se as funções f e g forem contínuas, implica que as integrais de (1.27) irão existir e conseguiremos obter a solução geral de (1.24).

Exemplo 1.6.1. Resolva a EDO $y' = 2t^2 - 3$.

Solução 1.6.1. Para resolvermos a EDO do exemplo (1.6.1), vamos lembrar que neste trabalho estamos representando $y' = \frac{dy}{dt}$. Assim, para visualizarmos o termo dt , vamos

fazer essa substituição, de tal forma que a EDO do exemplo que estamos resolvendo ficará com a seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = 2t^2 - 3. \quad (1.28)$$

Podemos, agora, fazer meio pelos extremos em (1.28) e integrar ambos os lados utilizando as técnicas conhecidas de integração, pois já estaremos com as variáveis separadas, isto é, o primeiro membro só dependerá de y e o segundo só de t . Dessa maneira, teremos

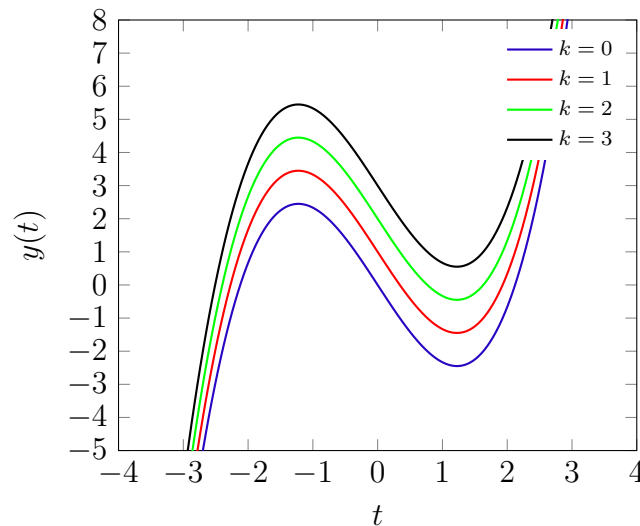
$$\begin{aligned} dy &= (2t^2 - 3) dt \\ \int dy &= \int (2t^2 - 3) dt \\ y &= \frac{2}{3}t^3 - 3t + k, \end{aligned} \quad (1.29)$$

em que k trata da constante arbitrária de integração. Portanto, a solução geral da EDO do exemplo (1.6.1) é dada por

$$y(t) = \frac{2}{3}t^3 - 3t + k.$$

A Figura 2 mostra o gráfico das soluções $y(t) = \frac{2}{3}t^3 - 3t + k$ para valores de k escolhidos.

Figura 2 – Gráfico da solução para determinados valores de k .



Fonte: Autor (2023)

2 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Neste capítulo iremos tratar sobre as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Para maior aprofundamento sobre o tema ou demonstrações, ver (YARTEY; RIBEIRO, 2017)

2.1 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Definição 2.1.1. *Uma equação diferencial de segunda ordem expressa por*

$$y'' = f(t, y, y')$$

é linear se a função f é linear em y e y' , ou seja, ela pode ser representada como

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t), \quad (2.1)$$

em que P , Q , R e G são funções contínuas definidas em um intervalo aberto I , ou geralmente pode ser expressa por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (2.2)$$

Para chegarmos à equação (2.2), basta dividirmos, se $P(t) \neq 0$, a equação (2.1) por $P(t)$.

Exemplo 2.1.1. *Abaixo temos EDOs lineares de segunda ordem.*

1. $2y'' - 3y' + 4y = 0$.
2. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$.
3. $e^t y'' + (\cos(t))y' + (1 + \sqrt{t})y = 5t$.

Exemplo 2.1.2. *Abaixo temos EDOs não-lineares de segunda ordem.*

1. $y'' + (y')^2 + y^2 = 0$. (Não é linear, pois envolve os termos $(y')^2$ e y^2)
2. $y'' + \delta y' + \alpha y + \beta y^3 = \gamma \cos(\omega t)$. (Equação de Duffing)
3. $y'' + \sin(y) + (y')^2 = 0$. (Não é linear, porque tem os termos $\sin(y)$ e $(y')^2$)

2.2 Teorema de Existência e Unicidade

Teorema 2.2.1 (Teorema de Existência e Unicidade). *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

em que p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I . Se t_0 pertence a esse intervalo e y_0 e y'_0 forem números reais quaisquer, então a equação (2.2) admite apenas uma solução $y(t)$ nesse intervalo.

Observação 1. *Temos que considerar no P.V.I (2.3) exatamente duas condições iniciais, em que o primeiro ponto está em y e o segundo está em y' .*

Exemplo 2.2.1. *Seja o seguinte P.V.I*

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad (2.4)$$

Verifique se a função $y(t) = -7e^{-2t} + 9e^{-3t}$ é solução desse P.V.I.

Solução 2.2.1. *Para verificarmos se a função $y(t)$ fornecida é solução desse PVI, inicialmente precisamos de y' e y'' . Assim, temos:*

$$y'(t) = 21e^{-3t} - 18e^{-2t} \quad e \quad y''(t) = -63e^{-3t} + 36e^{-2t}.$$

Desse modo, $y(t)$ será solução de (2.2.1) se satisfizer à EDO $y'' + 5y' + 6y = 0$ e às condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$. Logo, verificando se satisfaz a EDO:

$$\begin{aligned} -63e^{-3t} + 36e^{-2t} + 5(21e^{-3t} - 18e^{-2t}) + 6(-7e^{-3t} + 9e^{-2t}) &= 0 \\ -63e^{-3t} + 36e^{-2t} + 105e^{-3t} - 90e^{-2t} - 42e^{-3t} + 54e^{-2t} &= 0 \\ (-63 + 105 - 42)e^{-3t} + (36 - 90 + 54)e^{-2t} &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Dessa maneira, satisfaz a equação diferencial. Agora precisamos verificar se a função $y(t)$ satisfaz as condições iniciais. Nesse sentido, temos:

$$\begin{aligned} y(0) &= -7e^{-3(0)} + 9e^{-2(0)} \\ &= -7 + 9 = 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y'(0) &= 21e^{-3(0)} - 18e^{-2(0)} \\ &= 21 - 18 = 3. \end{aligned}$$

Como satisfaz à EDO e às condições iniciais, $y(t)$ é solução do P.V.I fornecido.

2.3 Equações Lineares Homogêneas

Definição 2.3.1. Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é dita homogênea se na equação (2.1) a função $G(t)$ for igual a zero ou se na equação (2.2) a função $g(t)$ for igual a zero, ou seja, as novas funções poderão ser expressas como

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0 \quad (2.5)$$

ou

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.6)$$

2.4 Princípio da Superposição

Teorema 2.4.1 (Princípio da Superposição). Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções da equação homogênea

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$$

em determinado intervalo I , então qualquer combinação linear de y_1 e y_2 , ou seja,

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \quad (2.7)$$

também será uma solução da EDO nesse intervalo.

Exemplo 2.4.1. Dada a EDO homogênea

$$y'' + y = 0,$$

temos que as funções $y_1(t) = \cos(t)$ e $y_2(t) = \sin(t)$ são ambas soluções dessa EDO, pois se lembrarmos de suas derivadas, teremos $y_1'(t) = -\sin(t)$, $y_1''(t) = -\cos(t)$, $y_2'(t) = \cos(t)$ e $y_2''(t) = -\sin(t)$, o que implica em

$$y_1'' + y_1 = -\cos(t) + \cos(t) = 0$$

e

$$y_2'' + y_2 = -\sin(t) + \sin(t) = 0,$$

para $t \in (-\infty, +\infty)$. Desse modo, pelo Teorema (2.4.1), podemos concluir que

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

é também solução da EDO fornecida no problema, para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.5 Wronskiano

A combinação linear das soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, ou seja, $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, é a única solução do P.V.I

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases},$$

se o determinante, o qual chamamos de wronskiano e é dado por

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

for diferente de zero para $t \in I$, sendo I o intervalo aberto em que as funções p , q e g são contínuas.

Exemplo 2.5.1. No Exemplo (2.4.1) vimos que $y_1(t) = \cos(t)$ e $y_2(t) = \sin(t)$ são soluções da EDO $y'' + y = 0$. Nessa perspectiva, vamos encontrar o wronskiano de y_1 e y_2 . O wronskiano dessas duas funções será dado por

$$\begin{aligned} W(\cos(t), \sin(t)) &= \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = (\cos(t))(\cos(t)) - [(-\sin(t))(\sin(t))] \\ &= \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Assim, a partir de (2.8), temos que o wronskiano é igual a 1 pela relação fundamental da trigonometria, o que implica que y_1 e y_2 são adequadas para criar soluções da EDO $y'' + y = 0$ e, por consequência, essas soluções podem ser adaptadas para atender a quaisquer condições iniciais especificadas independente dos valores de t no intervalo fornecido.

2.6 Solução Geral de uma EDO homogênea

Definição 2.6.1. Se p e q são funções contínuas no intervalo $I = (a, b)$ e se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial homogênea (2.6), as quais satisfazem

$$W(y_1, y_2)(t_0) = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \neq 0,$$

para determinado ponto $t_0 \in I$, então qualquer outra solução de (2.6) no intervalo mencionado pode ser escrito da forma

$$Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad (2.9)$$

sendo essa expressão conhecida como solução geral da equação diferencial linear de segunda ordem homogênea.

2.7 Equações Lineares com Coeficientes Constantes

Para o caso em que em (2.5) temos as funções P , Q , R e G sendo constantes, teremos a seguinte equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (2.10)$$

em que a , b e c são constantes e $a \neq 0$.

2.8 Solução de EDO homogênea com Coeficientes Constantes

Para resolvermos a EDO do tipo (2.10), vamos buscar uma solução não trivial da forma $y(t) = e^{rt}$, em que r é constante. Se substituirmos essa equação em (2.10) e fizermos as derivações necessárias, teremos

$$\begin{aligned} a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + c(e^{rt}) &= 0 \\ a \left[\frac{d}{dt}(re^{rt}) \right] + bre^{rt} + ce^{rt} &= 0 \\ ar \left[\frac{d}{dt}(e^{rt}) \right] + bre^{rt} + ce^{rt} &= 0 \\ ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} &= 0 \\ (ar^2 + br + c)e^{rt} &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $y(t) = e^{rt}$ é solução de (2.10) quando

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) é denominada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da equação diferencial dada em (2.10), e significa que se r for uma raiz da equação (2.11), então $y(t) = e^{rt}$ será solução da EDO (2.10). É possível notar que a equação (2.11) é obtida substituindo os elementos y'' , y' e y da equação (2.10) por r^2 , r e 1, respectivamente. Como essa equação característica trata de uma equação polinomial do segundo grau, nós podemos encontrar suas possíveis raízes utilizando as técnicas já conhecidas. Desse modo, sendo r_1 e r_2 as duas possíveis raízes, elas serão dadas por

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sabemos que existem três casos para o discriminante, sendo ele ou $b^2 - 4ac > 0$ ou $b^2 - 4ac = 0$ ou $b^2 - 4ac < 0$, logo teremos três casos para serem analisados.

Caso 1 ($b^2 - 4ac > 0$). Quando o discriminante é maior que zero, sabemos que existem duas raízes reais e distintas. Dessa maneira, a solução de (2.10) será dada por

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (2.12)$$

Exemplo 2.8.1. Resolva a seguinte EDO

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Solução 2.8.1. Se substituirmos y'' por r^2 , y' por r e y por 1, iremos obter a seguinte equação característica da EDO fornecida no problema:

$$r^2 + r - 6 = 0.$$

Utilizando o método da fatoração para encontrar as raízes, temos:

$$r^2 + r - 6 = 0$$

$$r^2 + 3r - 2r - 6 = 0$$

$$r(r + 3) - 2(r + 3) = 0$$

$$(r + 3)(r - 2) = 0.$$

Com isso, temos as seguintes raízes:

$$r - 2 = 0 \therefore r = 2 = r_1$$

$$r + 3 = 0 \therefore r = -3 = r_2.$$

Dessa forma, a solução geral da EDO é igual a

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Caso 2 ($b^2 - 4ac = 0$). Sendo o discriminante igual a zero, a equação característica terá duas raízes reais e iguais, e a solução da equação (2.10) será dada por

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}. \quad (2.13)$$

Exemplo 2.8.2. Resolva a equação $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

Solução 2.8.2. Seguindo os passos que fizemos na solução do Exemplo (2.2.1), vamos substituir y'' por r^2 , y' por r e y por 1, tendo como resultado a seguinte expressão:

$$4r^2 + 12r + 9 = 0.$$

Para encontrarmos as raízes da equação acima, basta utilizarmos os conhecimentos já conhecidos quanto aos métodos de resolução de uma equação polinomial do segundo grau, mas se observarmos, podemos visualizar que essa equação trata de um trinômio quadrado perfeito na forma $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Assim, sua raiz será dada por

$$4r^2 + 12r + 9 = 0$$

$$(2r + 3)^2 = 0$$

$$2r + 3 = 0$$

$$2r = -3$$

$$r = -\frac{3}{2}.$$

Sendo assim, nós temos duas raízes reais e iguais a $-\frac{3}{2}$, e pela equação (2.13), a solução geral da EDO do Exemplo (2.8.2) será igual a

$$y(t) = c_1 e^{(-3/2)t} + c_2 t e^{(-3/2)t}.$$

Caso 3 ($b^2 - 4ac < 0$). Para o caso em que as raízes da equação característica são números complexos, nós teremos raízes com os seguintes valores

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad e \quad r_2 = \lambda - i\mu,$$

em que λ denota a parte real da raiz complexa e μ a parte imaginária. Dessa forma, a solução, após algumas manipulações utilizando a fórmula de Euler, ver (YARTEY; RIBEIRO, 2017), terá a seguinte aparência

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sen(\mu t). \quad (2.14)$$

Exemplo 2.8.3. Resolva a equação $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Solução 2.8.3. Utilizando os passos que já foram feitos nos dois exemplos resolvidos anteriormente, teremos a seguinte equação característica da EDO do Exemplo (2.8.3)

$$r^2 + 2r + 5 = 0.$$

Encontrando as duas raízes dessa equação:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ &= -1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Desse modo, as raízes são $r_1 = -1 + 2i$ e $r_2 = -1 - 2i$. Desse jeito, ao fazermos as substituições em (2.14), temos que a solução geral da EDO do Exemplo (2.8.3) é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sen(2t).$$

2.9 Equações Lineares Não Homogêneas

Teorema 2.9.1 (Teorema da solução geral). Dada a equação linear não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (2.15)$$

em que p , q e g são funções contínuas definidas em um intervalo aberto I . Se em (2.15) tivermos $g(t) = 0$, temos que a equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (2.16)$$

é conhecida como equação diferencial homogênea associada à equação (2.15), e a solução geral de (2.15) é dada por

$$y(t) = y_p(t) + y_c(t), \quad (2.17)$$

em que y_p trata da solução particular de (2.15) e y_c representa a solução geral de (2.16).

2.10 Método dos Coeficientes a Determinar

O método dos coeficientes a determinar, também conhecido como método dos coeficientes indeterminados, é utilizado para encontrar uma solução particular da equação não homogênea. Esse método consiste em assumir, com base na função $g(t)$ e na solução geral y_c , uma forma para solução particular y_p que depende de coeficientes ainda não especificados.

2.10.1 Polinômio

Se em (2.15) a função g for um polinômio de grau m , ou seja, tiver a seguinte forma

$$g(t) = c_m t^m + c_{m-1} t^{m-1} + \cdots + c_0,$$

admitimos que o polinômio

$$y_p(t) = A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \cdots + A_1 t + A_0 \quad (2.18)$$

também é um polinômio de grau m , e a solução particular da equação com a forma

$$y'' + ay' + by = g(t) \quad (2.19)$$

será dada pela equação (2.18), em que $A_m, A_{m-1}, \dots, A_1, A_0$ são os coeficientes a determinar.

Exemplo 2.10.1. *Encontre uma solução particular da equação não homogênea*

$$y'' + 3y' + 4y = 3t + 2. \quad (2.20)$$

Solução 2.10.1. *Pelo método dos coeficientes a determinar, iremos procurar uma solução particular da forma*

$$y_p(t) = A_1 t + A_0. \quad (2.21)$$

Agora, precisamos encontrar a primeira e a segunda derivada da equação (2.21) com relação a t . Nesse sentido, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy_p}{dt} &= y'_p = A_1 \\ \frac{d^2y_p}{dt^2} &= y''_p = 0.\end{aligned}$$

Se voltarmos na equação (2.20) e fizermos as substituições necessárias, teremos:

$$\begin{aligned}y'' + 3y' + 4y &= 3t + 2 \\ 0 + 3A_1 + 4(A_1t + A_0) &= 3t + 2 \\ 3A_1 + 4A_1t + 4A_0 &= 3t + 2 \\ (4A_1)t + (3A_1 + 4A_0) &= 3t + 2.\end{aligned}$$

Como polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais, ficaremos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4A_1 + 0A_0 = 3 \\ 3A_1 + 4A_0 = 2 \end{cases}.$$

Podemos isolar A_1 na primeira linha e depois substituir na segunda, com isso, teremos:

$$\begin{aligned}4A_1 &= 3 \\ A_1 &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Substituindo o valor de A_1 que encontramos:

$$\begin{aligned}3A_1 + 4A_0 &= 2 \\ 3\left(\frac{3}{4}\right) + 4A_0 &= 2 \\ \frac{9}{4} + 4A_0 &= 2 \\ 4A_0 &= 2 - \frac{9}{4} \\ 4A_0 &= -\frac{1}{4} \\ A_0 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) \\ A_0 &= -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Com isso, a partir da equação (2.21), uma solução particular da EDO (2.20) é dada por

$$y_p(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{16}.$$

2.10.2 Exponencial

Se em (2.15) a função g apresenta a seguinte forma

$$g(t) = ce^{\alpha t}, \quad (2.22)$$

em que $\alpha \neq r_1, r_2$, sendo r_1 e r_2 as raízes da equação característica, a equação (2.22) admite a seguinte solução particular

$$y_p(t) = Ae^{\alpha t}, \quad (2.23)$$

sendo A a constante a determinar.

Exemplo 2.10.2. *Encontre uma solução particular da equação não homogênea*

$$y'' - 4y = 2e^{3t}. \quad (2.24)$$

Solução 2.10.2. *Como já vimos, quando $g(t)$ for uma função exponencial, ela irá admitir a seguinte solução particular*

$$y_p(t) = Ae^{3t}. \quad (2.25)$$

De forma análoga ao exemplo anterior, precisamos agora encontrar a primeira e a segunda derivada de (2.25) com relação a t . Nesse sentido, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy_p}{dt} &= y_p' = 3Ae^{3t} \\ \frac{d^2y_p}{dt^2} &= y_p'' = 9Ae^{3t}. \end{aligned}$$

Encontrada as derivadas, vamos voltar em (2.24) e fazer as substituições. Assim:

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= 2e^{3t} \\ 9Ae^{3t} - 4(Ae^{3t}) &= 2e^{3t} \\ 9Ae^{3t} - 4Ae^{3t} &= 2e^{3t} \\ 5Ae^{3t} &= 2e^{3t} \\ 5A &= 2 \\ A &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, a partir da equação (2.25), temos que a solução particular de (2.24) será dada por

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{3t}.$$

2.10.3 Seno e Cosseno

Se em (2.15) a função g for uma combinação linear das funções seno e cosseno, isto é,

$$g(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t), \quad (2.26)$$

iremos admitir a seguinte solução particular

$$y_p(t) = A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t), \quad (2.27)$$

em que A_1 e A_2 são constantes a determinar.

Exemplo 2.10.3. *Encontre uma solução particular da equação não-homogênea*

$$3y'' + y' - 2y = 2 \cos(t). \quad (2.28)$$

Solução 2.10.3. *De forma análoga aos outros exemplos, sendo $\beta = 1$, pois é o coeficiente que acompanha o parâmetro t em (2.28), vamos encontrar a primeira e a segunda derivada da solução particular (2.27), ou seja, precisaremos encontrar tais derivadas da seguinte equação*

$$y_p(t) = A_1 \cos(t) + A_2 \sin(t). \quad (2.29)$$

Nesse sentido, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy_p}{dt} &= y_p' = -A_1 \sin(t) + A_2 \cos(t) \\ \frac{d^2y_p}{dt^2} &= y_p'' = -A_1 \cos(t) - A_2 \sin(t). \end{aligned}$$

Assim, podemos voltar em (2.28) e fazer as substituições necessárias, em que teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} 3y'' + y' - 2y &= 2 \cos(t) \\ 3(-A_1 \cos(t) - A_2 \sin(t)) - A_1 \sin(t) + A_2 \cos(t) - 2[A_1 \cos(t) + A_2 \sin(t)] &= 2 \cos(t) \\ -3A_1 \cos(t) - 3A_2 \sin(t) - A_1 \sin(t) + A_2 \cos(t) - 2A_1 \cos(t) - 2A_2 \sin(t) &= 2 \cos(t) \\ (-3A_1 + A_2 - 2A_1) \cos(t) + (-3A_2 - A_1 - 2A_2) \sin(t) &= 2 \cos(t) \\ (-5A_1 + A_2) \cos(t) + (-5A_2 - A_1) \sin(t) &= 2 \cos(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nós teremos que a igualdade (2.30) será verdadeira, se satisfizer o seguinte sistema

$$\begin{cases} -5A_1 + A_2 = 2 \\ -A_1 - 5A_2 = 0 \end{cases}, \quad (2.31)$$

tendo em vista que será verdadeira se, e somente se, os coeficientes que acompanham a função $\cos(t)$ e $\sin(t)$ forem iguais, e como no segundo membro de (2.30) nós não temos

a função $\text{sen}(t)$, implica que podemos representar por $(0)\text{sen}(t)$ e, por consequência, a segunda linha do nosso sistema será igualada a zero.

Para resolver (2.31), podemos fazer uso de métodos conhecidos para resolução de sistemas de equações como o da substituição ou adição, por exemplo. Nesse sentido, vamos multiplicar a primeira linha de (2.31) por 5 e depois somar com a segunda, assim, teremos:

$$\begin{aligned} -25A_1 - A_1 + 5A_2 - 5A_2 &= 10 + 0 \\ -26A_1 &= 10 \\ A_1 &= -\frac{10}{26} = -\frac{5}{13}. \end{aligned}$$

Como encontramos o valor de A_1 , basta voltar em qualquer uma das expressões em (2.31) e substituir o valor de A_1 para encontrar o valor de A_2 . Desse modo, ao substituir na segunda linha, ficaremos com o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} -\left(-\frac{5}{13}\right) - 5A_2 &= 0 \\ \frac{5}{13} - 5A_2 &= 0 \\ 5A_2 &= \frac{5}{13} \\ A_2 &= \frac{1}{5} \left(\frac{5}{13}\right) \\ A_2 &= \frac{1}{13}. \end{aligned}$$

Encontrado os valores de A_1 e A_2 , basta voltarmos em (2.29) e substituir esses valores. Posto isto, a solução particular da EDO (2.28) é dada por

$$y_p(t) = -\frac{5}{13} \cos(t) + \frac{1}{13} \text{sen}(t).$$

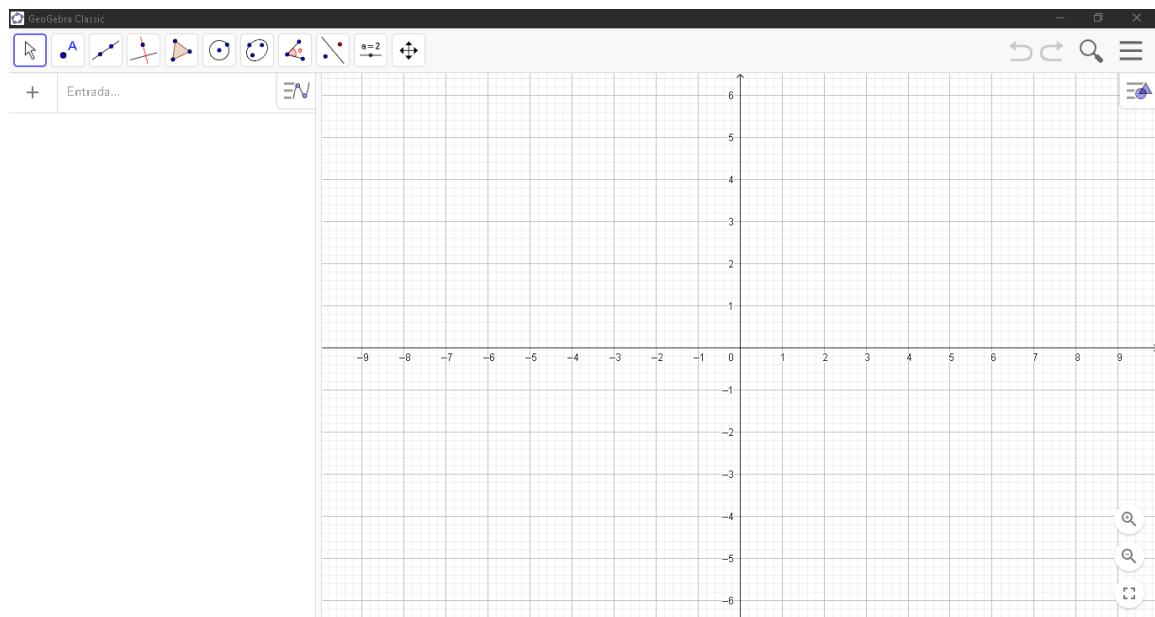
3 Apresentação do Software GeoGebra

De acordo com Vaz e Jesus (2014), o GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que permite trabalhar com quase todos os conteúdos abordados no ensino fundamental, médio e superior. Possui, entre suas principais características, livre acesso tanto *on-line* quanto *off-line*, permitindo a interatividade entre professores e alunos para trabalhar com teoremas matemáticos, construção de conceitos e testar hipóteses.

3.1 Tela Inicial

A tela inicial do GeoGebra está representada na Figura 3.

Figura 3 – Tela inicial do GeoGebra.



Fonte: Autor (2023)

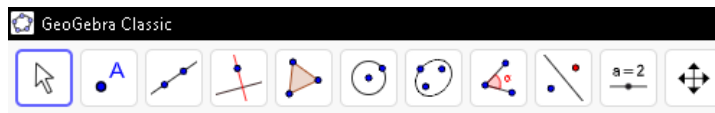
Na parte esquerda da Figura 3 é possível ver um campo de entrada para os comandos que iremos utilizar, já na parte direita temos a janela de visualização na qual aparecerá toda a parte gráfica do problema que está sendo trabalhado. Na parte superior podemos ver as ferramentas disponibilizadas para trabalhar, por exemplo, com pontos, retas, polígonos, círculos, entre outros tópicos do campo da matemática.

Sendo o foco deste trabalho tratar das equações diferenciais ordinárias, em específico as de segunda ordem, estaremos, a seguir, falando sobre as ferramentas do GeoGebra voltadas a essas equações.

3.2 Barra de Ferramentas

A Barra de Ferramentas do GeoGebra fornece uma variedade de funcionalidades, incluindo instrumentos para construção de pontos, retas, figuras geométricas, cálculo de área, controle deslizante, entre outras aplicações, ver Figura 4.

Figura 4 – Barra de Ferramentas.



Fonte: Autor (2023)

Ao todo, temos 11 ferramentas principais, sendo possível ter acesso às outras ferramentas passando o mouse por cima de cada uma dessas elementares.

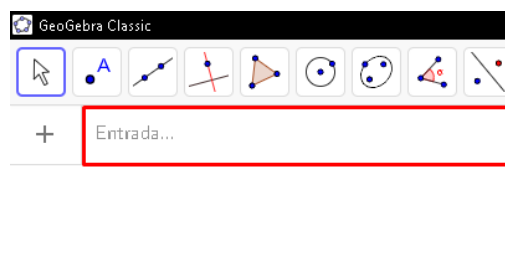
3.3 Janela de Álgebra

A Janela de Álgebra no GeoGebra é uma interface fundamental que permite a visualização, manipulação e interação com elementos matemáticos, tais como expressões algébricas, equações, funções, variáveis, controles deslizantes e operações algébricas. Nessa janela iremos encontrar o **Campo de Entrada de Texto**, em que é possível inserir comandos que possibilitam a criação, modificação e exploração de construções matemáticas.

3.3.1 Campo de Entrada de Texto

Nesse campo de entrada de texto vamos ter a possibilidade de inserir comandos e expressões matemáticas. Na Figura 5, dentro do retângulo vermelho, é possível visualizar esse campo.

Figura 5 – Janela de Álgebra.



Fonte: Autor (2023)

Nesse sentido, se quisermos resolver, por exemplo, uma EDO de primeira ordem,

basta digitarmos o comando

$$\text{ResolverEDO}(f'(x, y)),$$

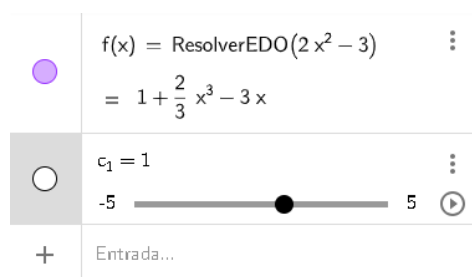
sendo necessário o termo $f'(x, y)$ ser substituído pela EDO. Desse modo, se quisermos resolver a EDO fornecida no Exemplo (1.6.1), basta digitarmos, lembrando de trocar t por x , o comando

$$\text{ResolverEDO}(2x^2 - 3)$$

e depois apertar a tecla *Enter*. Como resultado, o GeoGebra irá criar um controle deslizante com uma constante c que pode estar numerada com 1, 2, 3 ou outro número, sendo essa constante tomando o papel da constante k da solução encontrada no exemplo citado.

Assim, para valores diferentes da constante c , teremos uma nova curva solução, ver Figura 6.

Figura 6 – Solução da EDO do Exemplo (1.6.1) para $c_1 = 1$.



Fonte: Autor (2023)

O gráfico a ser exibido a partir do resultado da Figura 6 é exatamente igual ao gráfico em vermelho na Figura 2 quando $k = 1$.

Para resolução de EDO de segunda ordem, a janela *CAS* é a ferramenta mais adequada, a qual abordaremos ainda nesse capítulo.

3.4 Controle Deslizante

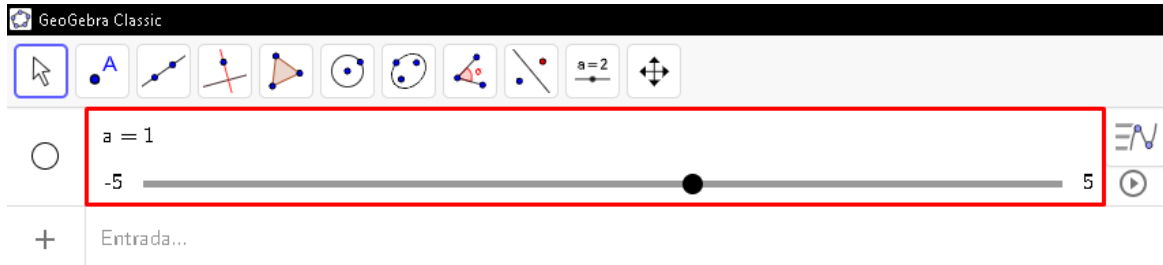
Um controle deslizante no GeoGebra trata de uma representação visual interativa de um valor numérico que pode ser ajustado deslizando-o ao longo de uma faixa. Nesse sentido, podemos associar esse controle a uma variável ou parâmetro matemático específico.

À medida que ajustamos o valor desse controle, todas as expressões matemáticas que dependem dessa variável serão atualizadas automaticamente.

É possível criar um controle deslizante através do **Campo de Entrada de Texto** ou pela barra de ferramentas. Pelo campo de entrada é possível criar esse controle por um comando, o qual pode ser um pouco mais complicado para entendimento, ou podemos

atribuir um valor a uma variável. No campo de entrada de texto podemos digitar $a = 1$, em que irá atribuir a variável a um valor igual a 1, ver Figura 7.

Figura 7 – Controle deslizante denominado como a e com valor 1.

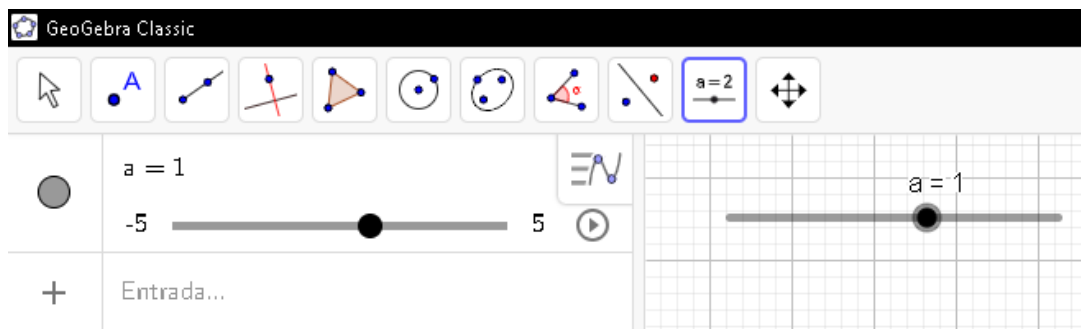


Fonte: Autor (2023)

A partir do ponto na cor preta, na Figura 7, podemos alterar o valor da variável a arrastando esse ponto para esquerda ou para direita.

Para criarmos um controle deslizante a partir da barra de ferramentas, basta clicarmos na ferramenta de número 10, depois clicar na janela de visualização e por fim clicar em *Ok* mediante a janela extra que foi apresentada. É possível observar, na Figura 8, que obtemos praticamente mesmo resultado, sendo que o segundo apenas está exibindo o controle deslizante na janela de visualização

Figura 8 – Controle deslizante criado a partir da barra de ferramentas.

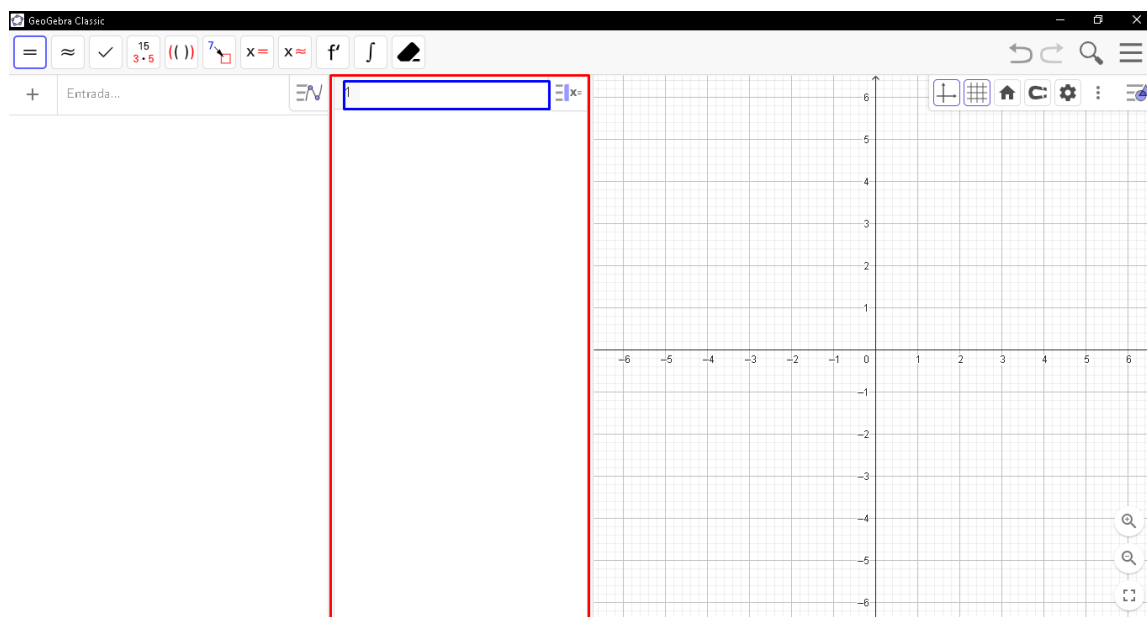


Fonte: Autor (2023)

3.5 Janela CAS

A sigla CAS é a abreviação de *Computer Algebra System*, que significa Sistema de Computação Gráfica. Para abrir essa janela, com a tela inicial do GeoGebra aberta, basta pressionarmos o atalho $Ctrl + Shift + K$, tendo como resultado o surgimento de uma nova janela destacada com o retângulo em vermelho, na Figura 9.

Figura 9 – Janela CAS do GeoGebra.



Fonte: Autor (2023)

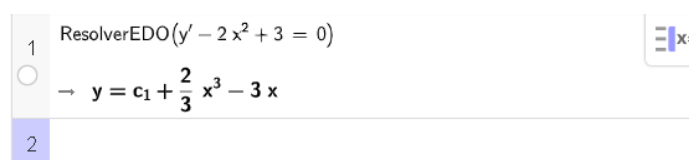
O retângulo em azul que está dentro de outro em vermelho na Figura 9 é o campo de entrada para digitarmos o que queremos trabalhar, nesse caso, introduzir as equações diferenciais.

3.5.1 Equações Diferenciais

O comando para apenas resolver uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem ou Segunda Ordem é **ResolverEDO(Equação)**, sendo necessário substituir a palavra **equação** pela expressão que queremos resolver.

Para trabalharmos a resolução de EDO de Primeira Ordem, vamos pegar a equação diferencial dada no Exemplo (1.6.1), só que substituindo t por x para não termos problema nesse exemplo, pois às vezes o GeoGebra pode interpretar t como constante caso não especifiquemos qual a variável dependente e a independente. Nesse sentido, precisamos resolver a EDO $y' = 2x^2 - 3$ e, para isso, basta digitar, no campo dentro do retângulo em azul expresso na Figura 9, o comando $ResolverEDO(y' - 2x^2 + 3 = 0)$ e apertar *Enter*, ver Figura 10.

Figura 10 – Solução geral da EDO.



Fonte: Autor (2023)

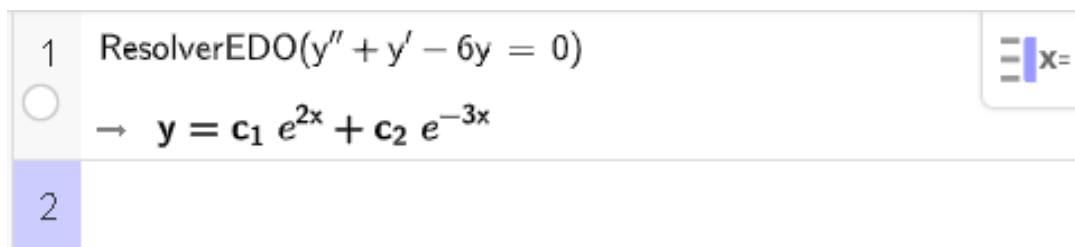
Desse modo, a partir da Figura 10 é possível observar que a solução geral da EDO $y' = 2x^2 - 3$ é igual

$$y(x) = c_1 + \frac{2}{3}x^3 - 3x, \quad (3.1)$$

que ao compararmos com a resposta da solução geral feita algebricamente no Exemplo (1.6.1), existe apenas a mudança na variável independente, tomando como base que c_1 e k são constantes quaisquer.

Analogamente para as EDOs de segunda ordem, vamos pegar a equação diferencial do Exemplo (2.2.1), novamente substituindo t por x se necessário. Nessa perspectiva, precisamos resolver a EDO $y'' + y' - 6y = 0$. Essa equação já está no formato que precisamos, assim, basta digitar o comando $ResolverEDO(y'' + y' - 6y = 0)$ e apertar a tecla *Enter*, tendo o resultado expresso na Figura 11.

Figura 11 – Solução geral da EDO de Segunda Ordem.



Fonte: Autor (2023)

Igualmente ao caso da equação diferencial de primeira ordem, temos que a solução algébrica feita no Exemplo (2.2.1) é igual a $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$, e a solução encontrada utilizando o GeoGebra corresponde a $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$, tendo uma mudança apenas na variável independente.

Nos exercícios que envolvem um Problema de Valor Inicial é preciso acrescentar o ponto pelo qual a curva passa. No caso das equações diferenciais de primeira ordem dispomos de apenas um ponto e utilizaremos o comando

$$ResolverEDO(Equação, (t_0, y_0)),$$

enquanto que na de segunda ordem são dois pontos e usaremos o comando

$$ResolverEDO(Equação, (t_0, y_0), (t_0, y'_0)),$$

sendo o ponto (t_0, y_0) o ponto presente na curva y e (t_0, y'_0) o ponto presente na curva y' .

Para trabalharmos com um problema de valor inicial envolvendo uma equação diferencial de primeira ordem, vamos pegar o Exemplo (1.5.1), em que a EDO é dada por $y' - 3y = 0$, e a coordenada do ponto é $(0, 5.7)$, tomando como base que no GeoGebra utilizamos o ponto no lugar da vírgula para representar uma casa decimal. Nesse sentido,

para resolver esse P.V.I basta digitarmos, no mesmo campo em azul da Figura 9, o comando $\text{ResolverEDO}(y' - 3y = 0, (0, 5.7))$, cujo resultado está expresso na Figura 12.

Figura 12 – Solução do PVI de Primeira Ordem.

The image shows a screenshot of a CAS window. On the left, there is a vertical list of numbers 1, 2, 3, and 4. The number 1 is highlighted in blue. To the right of the number 1, the command $\text{ResolverEDO}(y' - 3y = 0, (0, 5.7))$ is entered. Below the command, the result $y = \frac{57}{10} e^{3x}$ is displayed. The rest of the window (lines 2, 3, and 4) is empty.

Fonte: Autor (2023)

Ao compararmos a solução do P.V.I dada na Figura 12 com a solução do mesmo problema no Exemplo (1.5.1), é possível visualizar que obtemos a mesma resposta, mudando apenas a variável t para x .

Em se tratando de um problema de valor inicial envolvendo uma EDO de segunda ordem, vamos pegar o P.V.I do Exemplo (2.2.1). A EDO fornecida nesse exemplo é igual a $y'' + 5y' + 6y = 0$ e as duas condições iniciais são $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$. Assim, o ponto que está na curva y é o ponto $(0, 2)$ e o ponto que está em y' é o ponto $(0, 3)$, os quais utilizaremos para resolver o PVI no GeoGebra através do comando que já mencionamos.

Desse modo, para resolver esse P.V.I basta digitar, no campo que já citamos nos exemplos anteriores, o comando $\text{ResolverEDO}(y'' + 5y' + 6y = 0, (0, 2), (0, 3))$, ver Figura 13.

Figura 13 – Solução do PVI de Segunda Ordem.

The image shows a screenshot of a CAS window. On the left, there is a vertical list of numbers 1 and 2. The number 1 is highlighted in blue. To the right of the number 1, the command $\text{ResolverEDO}(y'' + 5y' + 6y = 0, (0, 2), (0, 3))$ is entered. Below the command, the result $y = 9 e^{-2x} - 7 e^{-3x}$ is displayed. The number 2 is visible in the list on the left, but the corresponding input field is empty. On the right side of the window, there is a small icon of a list and the text 'x='.

Fonte: Autor (2023)

A janela de computação gráfica do GeoGebra trata de uma ferramenta bastante útil durante o processo de ensino e aprendizagem das Equações Diferenciais, mas citamos

a importância primordial da compreensão dos métodos de solução.

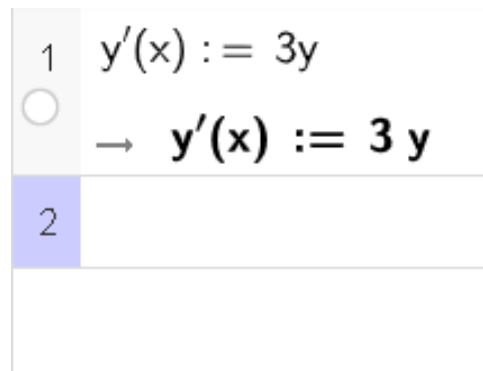
3.6 Exibir gráfico de um caso particular de uma EDO

O gráfico de um caso particular que iremos criar vai permitir que troquemos o valor da constante a fim de verificar o que acontece com a curva solução da EDO. Para essa exemplificação, iremos abordar uma EDO de primeira ordem. Assim, dentro do campo de entrada da janela *CAS*, vamos digitar o seguinte comando

$$y'(x) := 3y.$$

O termo " := " é usado para denotar a igualdade como uma atribuição, indicando que a derivada de $y(x)$ com relação a x é igual a $3y$, permitindo, assim, que trabalhem com essa expressão em situações posteriores. Nesse sentido, teremos o resultado expresso na Figura 14.

Figura 14 – EDO $y'(x) = 3y$.



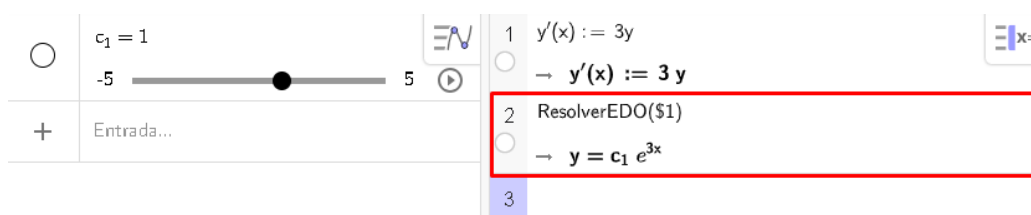
Fonte: Autor (2023)

Para resolvermos a EDO da Figura 14, basta agora digitarmos o comando

$$\text{ResolverEDO}(\$1)$$

na linha 2 dessa figura e apertar a tecla *Enter*, ver Figura 15.

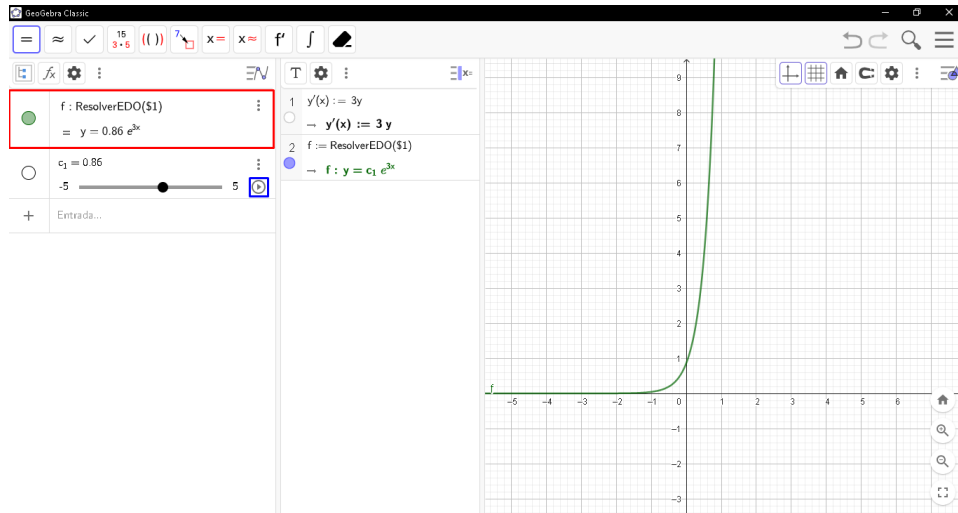
Figura 15 – Solução da EDO da $y' - 3y = 0$.



Fonte: Autor (2023)

Para exibir o gráfico da solução e, a partir daí, ir alterando os valores, basta clicar no círculo em branco abaixo do número 2 da Figura 15. Por conseguinte, é possível visualizar que na janela de álgebra irá aparecer o gráfico solução dessa EDO já com o valor da constante c_1 , nesse caso, sendo igual a 0,86, ver Figura 16.

Figura 16 – Curva solução da EDO.



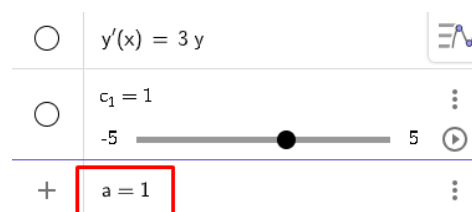
Fonte: Autor (2023)

Para animarmos essa curva, isto é, verificarmos o que acontece com a curva solução quando o valor da constante c_1 aumenta ou diminui, basta clicarmos no símbolo que representa o *play* que está dentro do quadrilátero azul na Figura 16.

3.7 Visualização de um conjunto de soluções de uma EDO

Para essa seção, vamos pegar o mesmo exemplo dado na Figura 14. Para visualizarmos um conjunto de soluções de uma equação diferencial, primeiro temos de resolvê-la seguindo o passo descrito na Figura 15 e depois exibir o gráfico, sendo esse passo feito também nessa figura. Na sequência, devemos criar um controle deslizante utilizando a atribuição de um valor a uma variável dentro do campo de entrada de texto na janela de álgebra e, para isso, basta digitar o comando $a = 1$ e apertar a tecla *Enter*, ver Figura 17.

Figura 17 – Controle deslizante denominado como a .



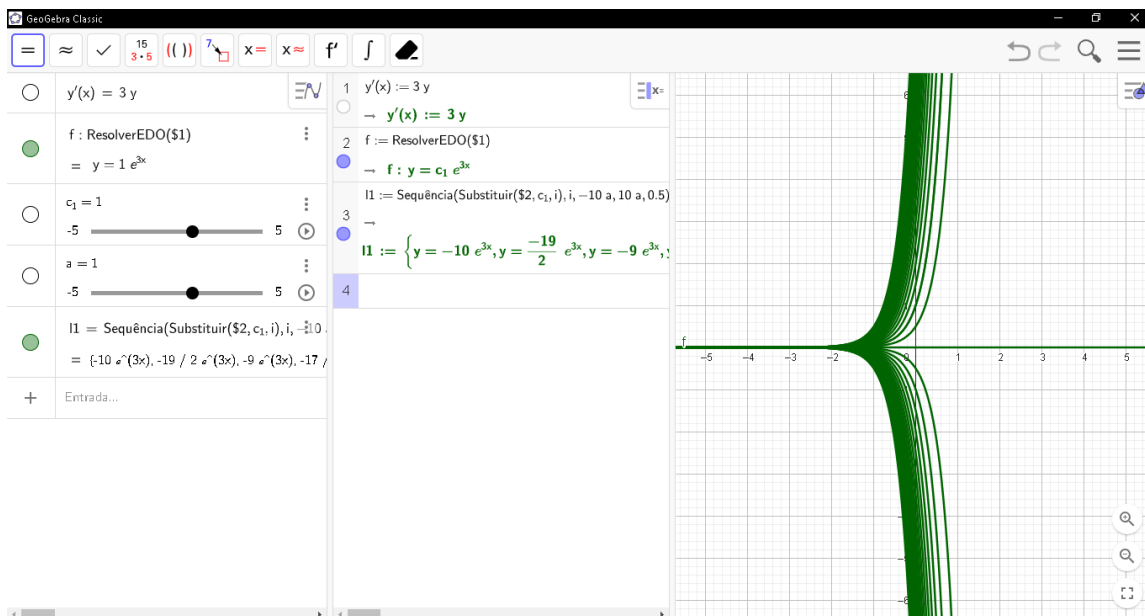
Fonte: Autor (2023)

Dando continuidade, na terceira linha da janela *CAS*, basta digitar o seguinte comando

$$\text{Sequência}(\text{Substituir}(\$2, c_1, i), i, -10a, 10a, 0.5)$$

para encontrar o conjunto de soluções da equação diferencial $y'(x) = 3y$. Para exibir essas curvas basta clicar no círculo branco logo abaixo do número 3, tendo como resultado o gráfico em verde mostrado na Figura 18.

Figura 18 – Conjunto de soluções da EDO $y'(x) = 3y$.



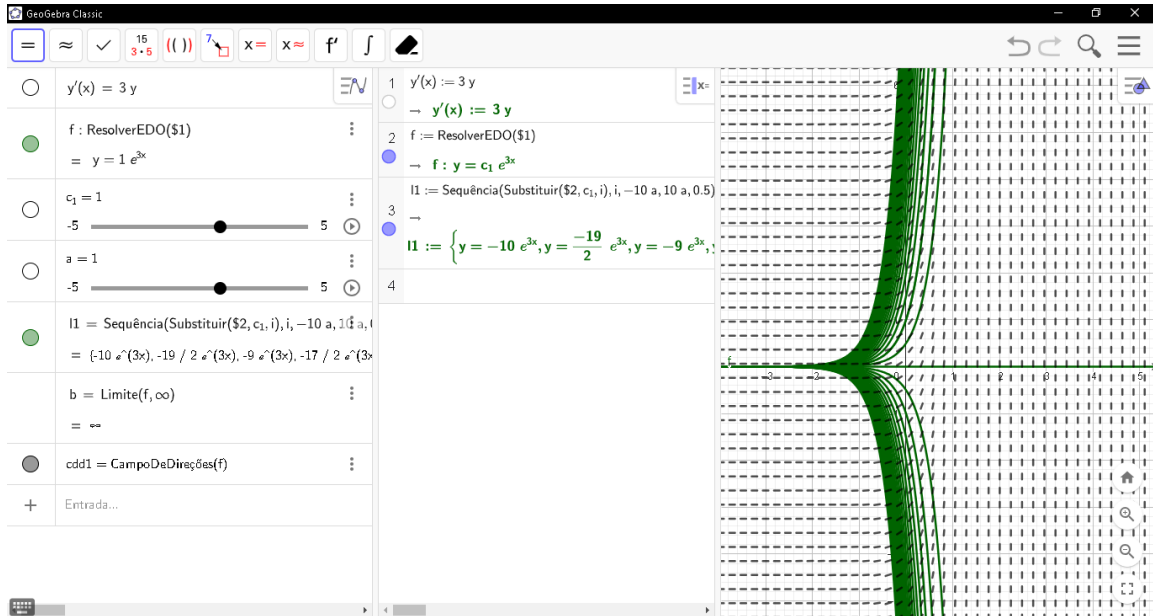
Fonte: Autor (2023)

3.8 Campo de direção de uma EDO

O campo de direção trata de uma representação gráfica que mostra como as soluções da EDO se comportam a fim de visualizar o comportamento dessas soluções em diferentes pontos do plano. Nesse sentido, se quisermos exibir o campo de direção da EDO $y'(x) = 3y$, a partir da Figura 18, basta digitarmos o comando

$$\text{CampoDeDireções}(f)$$

no campo de entrada da janela de álgebra, o qual está representado em cinza na Figura 19.

Figura 19 – Campo de direção da EDO $y'(x) = 3y$.

Fonte: Autor (2023)

4 Problemas aplicados envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Modelos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem têm aplicações em fenômenos físicos, entre outros. Nesse sentido, nesta seção iremos abordar dois problemas que envolvem esses tipos de equações, sendo essa abordagem através da solução analítica e outra por meio de um *applet* desenvolvido no GeoGebra.

Essa janela de aplicação e todos os conceitos fundamentais sobre as equações diferenciais foram desenvolvidos durante o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação (PIBITI), no Instituto Federal de Alagoas (IFAL) - Campus Maceió, através do projeto intitulado "**CRIAÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM E ORDENS SUPERIORES ATRAVÉS DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS**". Toda a teoria apresentada foi disponibilizada de forma gratuita no link <https://bit.ly/3PJ9rSa>, contendo exercícios resolvidos tanto de forma algébrica quanto com auxílio do *applet*, que está disponível em <https://www.geogebra.org/m/wtun3qhj>.

4.1 Análise algébrica

4.1.1 Modelo Para Detecção de Diabetes

O primeiro problema a ser discutido neste trabalho trata de um modelo para detecção de diabetes. Para um melhor aprofundamento sobre como se dá a construção do modelo, ver (SILVA, 2020).

Quando se estuda as equações diferenciais associadas a diabetes, a área principal de interesse é a medicina, sendo elas utilizadas para modelar o comportamento dinâmico dos níveis de glicose no sangue.

Problema 1. *A concentração G de glicose em 100 ml de sangue de um paciente satisfaz o P.V.I.*

$$\begin{cases} G'' + \frac{1}{20}G' + \frac{1}{2500}G = \frac{75}{2500} \\ G(0) = 150 \\ G'(0) = -3,75 \end{cases}, \quad (4.1)$$

após absorver a quantidade de glicose proposta no Teste de Tolerância à Glicose (TTG). Sabendo que a concentração de glicose ideal no sangue desse paciente é de 75 mg de glicose

/ 100 ml de sangue e que se após as 2 horas a concentração é inferior a 140 mg de glicose / 100 ml de sangue ele não é diabético, verifique se este paciente é diabético ou não. (SILVA, 2020, p. 117, adaptado)

Solução 4.1.1. Para resolvermos a EDO

$$G'' + \frac{1}{20}G' + \frac{1}{2500}G = \frac{75}{2500} \quad (4.2)$$

precisaremos da solução particular de (4.2) e da solução geral da equação homogênea associada à equação (4.2). Nesse sentido, a EDO homogênea associada à equação (4.2) é dada por

$$G'' + \frac{1}{20}G' + \frac{1}{2500}G = 0, \quad (4.3)$$

cujas equações características associadas a essa equação é expressa por

$$r^2 + \frac{1}{20}r + \frac{1}{2500} = 0. \quad (4.4)$$

Utilizando a fórmula quadrática para resolver (4.4), temos que as raízes são iguais a $r_1 = -0,04$ e $r_2 = -0,01$, e como vimos na Seção (2.8), para o caso em que o discriminante é maior que zero, temos que a solução da EDO é dada pela equação (2.12). Desse modo, a solução geral da equação (4.4) será dada por

$$G_c(t) = c_1e^{-0,04t} + c_2e^{-0,01t}.$$

Como já encontramos a solução geral da EDO homogênea associada à equação (4.2), precisaremos agora encontrar uma solução particular de (4.2) dadas as condições iniciais do P.V.I expresso em (4.1), o qual faremos pelo método dos coeficientes a determinar. Nesse sentido, pelo método dos coeficientes a determinar, iremos procurar uma solução da forma

$$G_p(t) = A_0. \quad (4.5)$$

A primeira derivada da equação (4.5) com relação a t é igual a $G'_p(t) = 0$, já a segunda derivada é dada por $G''_p(t) = 0$. Assim, ao voltarmos na equação (4.2) e fazer as substituições, teremos

$$\begin{aligned} G'' + \frac{1}{20}G' + \frac{1}{2500}G &= \frac{75}{2500} \\ 0 + \frac{1}{20}(0) + \frac{1}{2500}(A_0) &= \frac{75}{2500} \\ \frac{1}{2500}A_0 &= \frac{75}{2500} \\ A_0 &= 75. \end{aligned}$$

Assim, como $A_0 = 75$, a partir da equação (4.5), temos que uma solução particular de (4.2) é dada por

$$G_p(t) = 75.$$

Desse modo, como vimos no Teorema (2.9.1), a solução geral da equação (4.2) será igual a

$$\begin{aligned} G(t) &= G_c(t) + G_p(t) \\ &= c_1 e^{-0,04t} + c_2 e^{-0,01t} + 75. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como precisaremos da primeira derivada da equação (4.6), temos que $G'(t)$ é igual a

$$G'(t) = -0,04c_1 e^{-0,04t} - 0,01c_2 e^{-0,01t}.$$

Pela primeira condição inicial, temos que $G(0) = 150$, logo:

$$\begin{aligned} G(0) &= c_1 e^{-0,04(0)} + c_2 e^{-0,01(0)} + 75 \\ c_1 e^0 + c_2 e^0 + 75 &= 150 \\ c_1 + c_2 &= 150 - 75 \\ c_1 + c_2 &= 75. \end{aligned}$$

Já a outra condição inicial é $G'(0) = -3,75$, dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} G'(0) &= -0,04c_1 e^{-0,04(0)} - 0,01c_2 e^{-0,01(0)} \\ -0,04c_1 e^0 - 0,01c_2 e^0 &= -3,75 \\ -0,04c_1 - 0,01c_2 &= -3,75. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos o seguinte sistema a partir das duas condições iniciais:

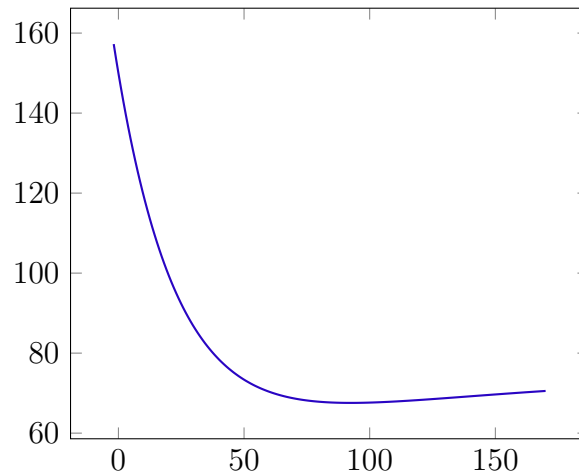
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -0,04c_1 - 0,01c_2 = -3,75 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima pelos métodos já conhecidos, temos os valores das constantes $c_1 = 100$ e $c_2 = -25$. Dessa forma, a solução do P.V.I (4.1) é dada por

$$G(t) = 100e^{-0,04t} - 25e^{-0,01t} + 75.$$

e a curva solução está expressa na Figura 20.

Figura 20 – Curva solução do P.V.I (4.1).



Fonte: Autor (2023)

Como o problema quer saber qual a concentração de glicose no sangue após 2 horas, isto é, 120 minutos, basta aplicarmos $t = 120$ para encontrar essa concentração. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} G(120) &= 100e^{-0,04(120)} - 25e^{-0,01(120)} + 75 \\ &= 100e^{-4,8} - 25e^{-1,2} + 75 \\ &\approx 68,293. \end{aligned}$$

Vimos que a concentração de glicose no sangue após 2 horas é aproximadamente igual a 68,293 mg de glicose por 100 ml de sangue. Logo, o paciente não é diabético.

4.1.2 Circuitos Elétricos

Para um melhor aprofundamento sobre a teoria de Circuitos Elétricos, ver (STEWART, 2021).

Um circuito elétrico comumente possui uma força eletromotriz E , que pode ser proporcionada pela pilha ou pelo gerador, um resistor R , um indutor L e um capacitor C , em série. Se a carga no capacitor no momento t é dada por $Q = Q(t)$, então a corrente é a taxa de variação de Q em relação a t , isto é, $I = \frac{dQ}{dt}$.

Na área da física que as quedas de voltagem no resistor, indutor e capacitor são dadas por RI , $L\frac{dI}{dt}$ e $\frac{Q}{C}$, respectivamente. A partir da lei de voltagem de Kirchhoff, a soma dessas quedas de voltagem é igual a voltagem fornecida, logo, temos:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Dado que $I = \frac{dQ}{dt}$, essa equação se torna

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad (4.7)$$

em que trata de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. Se conhecermos a carga Q_0 e a corrente I_0 no instante $t = 0$, teremos as seguintes condições iniciais

$$Q(0) = Q_0 \quad Q'(0) = I(0) = I_0.$$

Desse modo, possuiremos o seguinte P.V.I

$$\begin{cases} L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \\ Q(0) = Q_0 \\ Q'(0) = I_0 \end{cases}.$$

Para o caso desse trabalho, as notações de derivadas estão representadas na notação de Lagrange, assim, temos que o P.V.I acima será representado por

$$\begin{cases} LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \\ Q(0) = Q_0 \\ Q'(0) = I_0 \end{cases}. \quad (4.8)$$

Esse P.V.I pode ser resolvido de forma análoga ao que fizemos no Exemplo (2.2.1). Nesse sentido, iremos discutir sobre um problema envolvendo esse tipo de circuito.

Problema 2. *Determine a carga no capacitor em um circuito em série RLC, supondo $L = \frac{1}{2} \text{ h}$, $R = 10 \Omega$, $C = 0,01 \text{ f}$, $E(t) = 150 \text{ V}$, $Q(0) = 1 \text{ C}$ e $I(0) = 0 \text{ A}$. Qual é a carga no capacitor após $t = 60 \text{ s}$? (ZILL, 2016, p. 221, adaptado)*

Solução 4.1.2. *Como o problema já fornece os valores de R , L , C , $E(t)$ e também das condições iniciais, basta voltarmos no P.V.I (4.8) e fazer as substituições, tomando como base que se $C = 0,01$, implica que $\frac{1}{C} = 100$. Desse modo, teremos*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Q'' + 10Q' + 100Q = 150 \\ Q(0) = 1 \\ Q'(0) = 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Multiplicando a EDO fornecida no P.V.I (4.9) por 2, obteremos o seguinte P.V.I equivalente:

$$\begin{cases} Q'' + 20Q' + 200Q = 300 \\ Q(0) = 1 \\ Q'(0) = 0 \end{cases}. \quad (4.10)$$

Para resolvermos esse P.V.I precisaremos da equação característica associada à equação

$$Q'' + 20Q' + 200Q = 300, \quad (4.11)$$

a qual é dada por

$$r^2 + 20r + 200 = 0.$$

O discriminante dessa equação característica é negativo, logo, caímos no Caso (3) em que as raízes estarão no campo dos números complexos. Utilizando a fórmula quadrática, temos que as raízes r_1 e r_2 serão iguais a

$$r_1 = -10 + 10i \quad e \quad r_2 = -10 - 10i,$$

e, nesse caso, temos que $\lambda = -10$ e $\mu = 10$. Dessa maneira, a partir da equação (2.14), a solução geral da equação característica será dada por

$$Q_c(t) = c_1 e^{-10t} \cos(10t) + c_2 e^{-10t} \sen(10t). \quad (4.12)$$

Análogo ao Problema (1), já encontramos a solução geral da EDO homogênea associada à equação (4.11), agora precisamos encontrar uma solução particular de (4.11) dadas as condições iniciais do P.V.I (4.10). Dessa forma, procuramos uma solução da forma

$$Q_p(t) = A_1 t + A_0. \quad (4.13)$$

A primeira derivada da equação (4.13) com relação a t é igual a $Q'_p(t) = A_1$, e a segunda derivada é igual a $Q''_p(t) = 0$. Logo, ao voltarmos na equação (4.11) e fazer as devidas substituições, teremos

$$\begin{aligned} 0 + 20A_1 + 200(A_1 t + A_0) &= 300 \\ 20A_1 + 200A_1 t + 200A_0 &= 300 \\ (200A_1)t + (20A_1 + 200A_0) &= 300. \end{aligned}$$

Com isso, caímos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} 200A_1 + \quad \quad = 0 \\ 20A_1 + 200A_0 = 300 \end{cases}$$

e, ao resolvê-lo pelos métodos conhecidos, temos que $A_1 = 0$ e $A_0 = \frac{3}{2}$. Desse modo, a partir da equação (4.13), uma solução particular de (4.11) é dada por

$$Q_p(t) = 0(t) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

e, por consequência do Teorema (2.9.1), a solução geral da equação (4.11) será igual a

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_c(t) + Q_p(t) \\ &= c_1 e^{-10t} \cos(10t) + c_2 e^{-10t} \sen(10t) + \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como iremos precisar da primeira derivada de (4.14), temos que $Q'(t)$ é igual a

$$Q'(t) = -10c_1e^{-10t} \cos(10t) - 10c_1e^{-10t} \operatorname{sen}(10t) + 10c_2e^{-10t} \cos(10t) - 10c_2e^{-10t} \operatorname{sen}(10t).$$

Pela primeira condição inicial, temos que $Q(0) = 1$, logo:

$$\begin{aligned} Q(0) &= c_1e^{-10(0)} \cos(10(0)) + c_2e^{-10(0)} \operatorname{sen}(10(0)) + \frac{3}{2} \\ 1 &= c_1e^0 \cos(0) + c_2e^0 \operatorname{sen}(0) + \frac{3}{2} \\ 1 &= c_1 + \frac{3}{2} \\ c_1 &= 1 - \frac{3}{2} \\ c_1 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pela segunda condição, temos que $Q'(0) = 0$

$$\begin{aligned} Q'(0) &= -10c_1e^{-10(0)} \cos(10(0)) - 10c_1e^{-10(0)} \operatorname{sen}(10(0)) + 10c_2e^{-10(0)} \cos(10(0)) - \\ &\quad 10c_2e^{-10(0)} \operatorname{sen}(10(0)) \\ 0 &= -10c_1e^0 \cos(0) - 10c_1e^0 \operatorname{sen}(0) + 10c_2e^0 \cos(0) - 10c_2e^0 \operatorname{sen}(0) \\ 0 &= -10c_1 - 0 + 10c_2 - 0 \\ 0 &= -10c_1 + 10c_2. \end{aligned}$$

Por conseguinte, obtemos o seguinte sistema a partir das duas condições iniciais:

$$\begin{cases} c_1 &= -\frac{1}{2} \\ -10c_1 + 10c_2 &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema pelo que já conhecemos, temos que $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = -\frac{1}{2}$. Portanto, a solução do P.V.I (4.10) é igual a

$$Q(t) = -\frac{1}{2}e^{-10t} \cos(10t) - \frac{1}{2}e^{-10t} \operatorname{sen}(10t) + \frac{3}{2}.$$

Como o problema quer saber a quantidade de carga no capacitor após $t = 60$ s, basta calcularmos $Q(60)$. Assim, teremos:

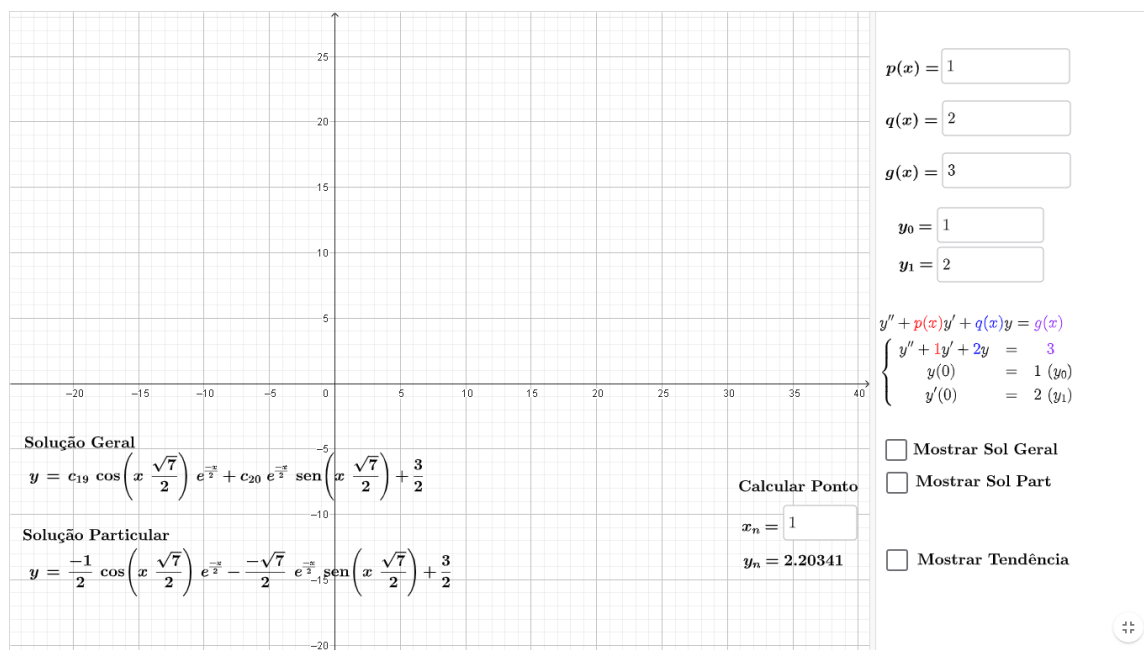
$$\begin{aligned} Q(60) &= -\frac{1}{2}e^{-10(60)} \cos(10(60)) - \frac{1}{2}e^{-10(60)} \operatorname{sen}(10(60)) + \frac{3}{2} \\ &= 1,5C. \end{aligned}$$

Dessa maneira, a quantidade de carga no capacitor após $t = 60$ s é igual a $1,5C$.

4.2 Análise via GeoGebra

Nesta seção iremos analisar os mesmos problemas anteriores através do *applet* desenvolvido no *software* GeoGebra, em que será possível mostrar a curva solução geral e particular, verificar a solução geral e solução particular e também mostrar tendência, isto é, mostrar para aonde as curvas soluções estão tendendo à medida que o tempo passa. Na Figura 21 podemos observar a tela inicial do *applet* para resolução de EDO de segunda ordem.

Figura 21 – Tela inicial do *applet*.



Fonte: Autor (2023)

Nesse *applet* temos os campos das funções $p(x)$, $q(x)$ e $g(x)$ e as condições iniciais dadas por $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$, e trabalharemos com a variável independente sendo igual a x e não t , dispondo, assim, do P.V.I

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Nesse sentido, podemos partir para a análise dos dois problemas utilizando essa janela gráfica.

4.2.1 Modelo para Detecção de Diabetes

Para a análise com o *applet* desenvolvido no GeoGebra, nossa variável independente será x em vez de t . Nesse sentido, ao compararmos o P.V.I (4.1) com o P.V.I (4.15), temos

que $p(x) = \frac{1}{20}$, $q(x) = \frac{1}{2500}$, $g(x) = \frac{75}{2500}$, $y_0 = 150$ e $y_1 = -3.75$ (representamos o número decimal com um ponto, pois é requisito do GeoGebra). Com isso, se fôssemos resolver analiticamente, teríamos que resolver o P.V.I

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{20}y' + \frac{1}{2500}y = \frac{75}{2500} \\ y(0) = 150 \\ y'(0) = -3.75 \end{cases} \quad (4.16)$$

Com os valores das funções e das condições em mãos, podemos digitar dentro dos campos de entrada do *applet* logo ao lado do sinal de igualdade em cada parâmetro, ver Figura 22.

Figura 22 – Parâmetros preenchidos dentro do *applet*.

The image shows a vertical list of input fields for a differential equation solver. Each field is preceded by a label and an equals sign. The labels are $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$, y_0 , and y_1 . The input values are $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{2500}$, $\frac{75}{2500}$, 150, and -3.75. The fields are arranged vertically, with $p(x)$ at the top and y_1 at the bottom.

Fonte: Autor (2023)

Logo abaixo dos parâmetros da Figura 22 irá aparecer a representação do P.V.I, ver Figura 23, em que é possível observar que é equivalente ao P.V.I (4.16)

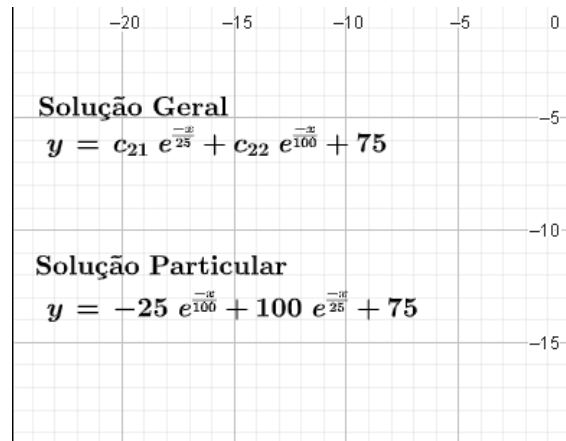
Figura 23 – Problema de Valor Inicial.

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{20}y' + \frac{1}{2500}y = \frac{75}{2500} \\ y(0) = 150 (y_0) \\ y'(0) = -3.75 (y_1) \end{cases}$$

Fonte: Autor (2023)

Após termos preenchido os parâmetros, no canto inferior esquerdo do *applet* também será mostrado tanto a solução geral quanto a solução particular, ver Figura 24.

Figura 24 – Solução Geral e Particular.

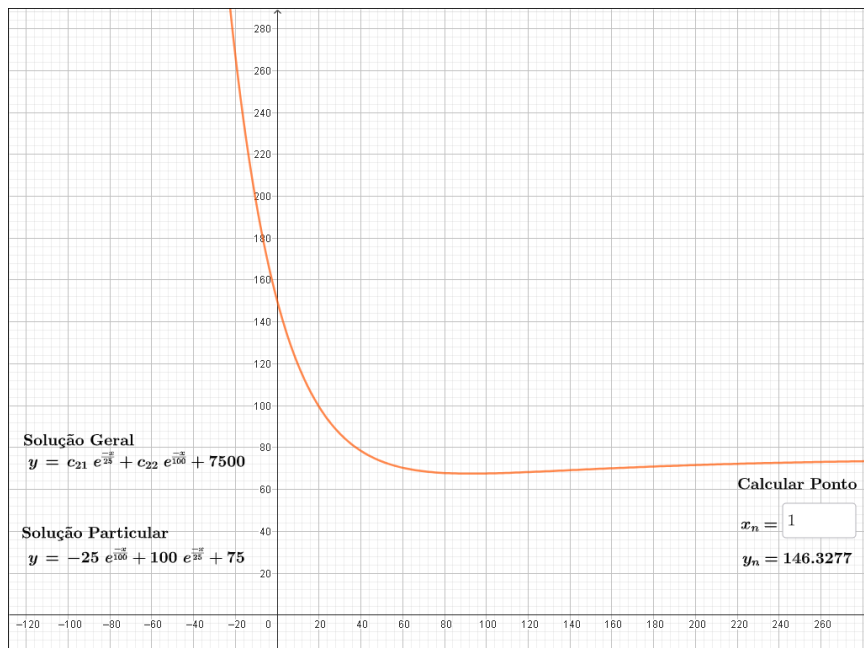


Fonte: Autor (2023)

A solução geral e particular que encontramos no Problema (1), respectivamente, foi $G_c(t) = c_1 e^{-0,04t} + c_2 e^{-0,01t}$ e $G(t) = 100e^{-0,04t} - 25e^{-0,01t} + 75$. Comparando essas soluções com as fornecidas na Figura 24, temos apenas a troca da variável independente e a representação de $-0,04$ sendo igual a $-\frac{1}{25}$.

Ao clicarmos na caixa ao lado do campo *Mostrar Sol. Part.*, iremos exibir a curva da solução particular, ver Figura 25.

Figura 25 – Curva solução particular.

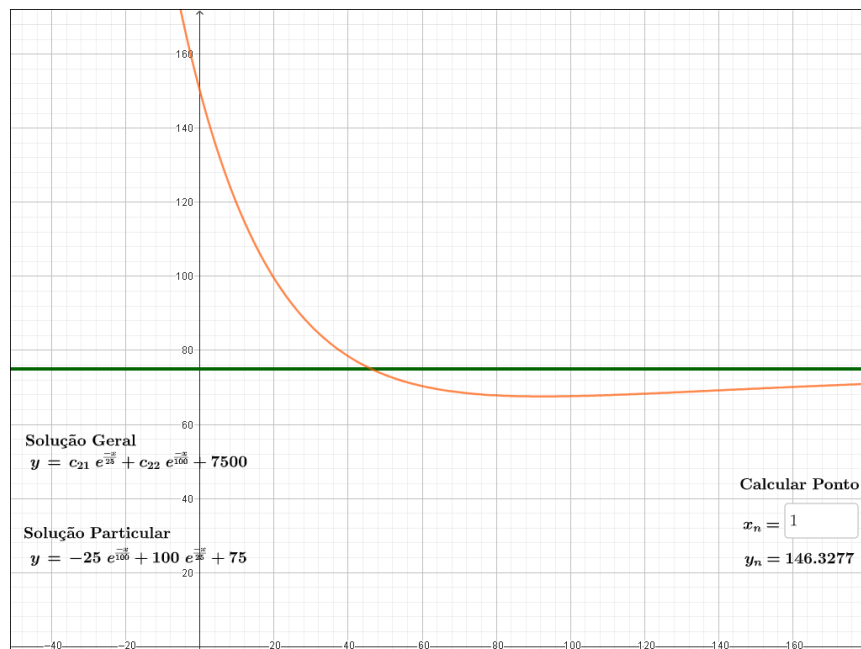


Fonte: Autor (2023)

O campo *Mostrar Tendência*, nesse problema, exibe a curva $y = 75$, que significa que as curvas ao longo do tempo tendem a uma quantidade de 75 mg de glicose por 100

ml de sangue, ver Figura 26.

Figura 26 – Comportamento da família de soluções.



Fonte: Autor (2023)

Já o último campo de nome *Calcular Ponto* trata de aplicar o valor na equação solução. Na análise analítica, aplicamos $t = 120$ para encontrar a concentração de glicose no sangue após ter passado 120 minutos, e é esse valor que teremos que digitar no campo x_n para encontrar essa concentração. Após digitado o valor 120 no campo x_n iremos obter, no campo y_n , a concentração de glicose no sangue, ver Figura 27.

Figura 27 – Concentração de glicose no sangue após 120 minutos.

Calcular Ponto	
$x_n =$	<input type="text" value="120"/>
$y_n =$	68.29312

Fonte: Autor (2023)

Desse modo, podemos observar que assim como na solução analítica, temos que, após 120 minutos, a concentração de glicose no sangue é aproximadamente igual a 68,293 mg de glicose por 100 ml de sangue.

4.2.2 Circuitos Elétricos

De forma análoga ao item analisado anteriormente, temos no Problema (2) o P.V.I (4.10) e, ao compararmos com (4.15), as funções serão dadas por $p(x) = 20$, $q(x) = 200$

e $g(x) = 300$, e as condições iniciais equivalem a $y_0 = 1$ e $y_1 = 0$. Desse modo, podemos voltar à tela inicial do *applet* e digitar esses valores em seus respectivos parâmetros, ver Figura 28.

Figura 28 – Campos das funções e condições iniciais preenchidos.

$$p(x) = 20$$

$$q(x) = 200$$

$$g(x) = 300$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 0$$

Fonte: Autor (2023)

Após digitado os valores, já será possível visualizar tanto a solução geral quanto a particular (Figura 29).

Figura 29 – Solução geral e particular.

Solução Geral	$y = c_{21} \cos(10 x) e^{-10x} + c_{22} e^{-10x} \text{sen}(10 x) + \frac{3}{2}$
Solução Particular	$y = \frac{-1}{2} \cos(10 x) e^{-10x} - \frac{1}{2} e^{-10x} \text{sen}(10 x) + \frac{3}{2}$

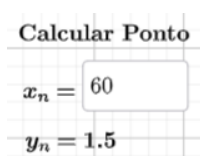
Fonte: Autor (2023)

Ao compararmos a solução geral e particular encontradas de forma analítica no Problema (2) com as soluções da Figura 29, é possível observar, sendo c_{21} e c_{22} constantes, apenas a mudança da variável t para x .

Podemos, ainda, mostrar curva da solução geral e da solução particular, assim como mostrar a tendência das soluções ao passo que o tempo aumenta, os quais não serão analisados pois tratam de passos análogos ao primeiro item analisado.

Por fim, como o problema pede para calcular a quantidade de carga no capacitor após ter passado 60 segundos, basta preencher esse valor no campo x_n e logo já irá aparecer o resultado no parâmetro y_n , ver Figura 30.

Figura 30 – Quantidade de carga no capacitor após 60 segundos.



Fonte: Autor (2023)

Assim como na resolução analítica, temos que após 60 segundos, a quantidade de carga no capacitor corresponde, nesse caso, a 1,5 *Coulombs*.

Conclusão

Através do desenvolvimento deste trabalho, pode-se perceber a relevância que os modelos que envolvem a resolução de uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem apresentam, sendo ricos em aplicações de interesse da sociedade como foi o modelo para detecção de diabetes e o outro sobre a quantidade de carga em um capacitor.

A detecção de diabetes e o estudo de um circuito em série composto por Resistor (R), Indutor (L) e Capacitor (C) ilustram a diversidade de situações em que as EDO de Segunda Ordem desempenham um papel crucial na modelagem matemática.

A compreensão de todos os métodos de solução trata de uma etapa primordial durante o processo de ensino e aprendizagem das equações diferenciais de segunda ordem e a utilização de um *software* educacional, como é o caso do GeoGebra, pode ser bastante útil durante essa etapa.

O *applet* abordado neste trabalho para resolução de EDOs de Segunda Ordem, desenvolvido durante um projeto de iniciação tecnológica no Instituto Federal de Alagoas - Campus Maceió, pode servir como mais uma ferramenta pedagógica para ser utilizada dentro da sala de aula através da utilização da modelagem matemática. Nesse sentido, se os alunos conhecem os métodos de solução e querem alterar, por exemplo, as condições iniciais dos problemas, eles podem fazer uso dessa janela gráfica interativa, tendo um retorno imediato dos resultados, algo que analiticamente demoraria mais tempo.

Referências

- BASSANEZI, R. C. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2002. 392 p. ISBN 85-7244-207-3.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2020.
- SILVA, L. H. d. **Equações diferenciais ordinárias e suas aplicações**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1. 600 p. ISBN 978-85-221-1461-0.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2021. v. 2. 664 p. ISBN 978-85-221-1463-4.
- VAZ, D. A. de F.; JESUS, P. C. C. de. Uma sequência didática para o ensino da matemática com o software geogebra. **Revista EVS-Revista de Ciências Ambientais e Saúde**, v. 41, n. 1, p. 59–75, 2014.
- YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. **Equações diferenciais**. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017. 174 p.
- ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 437 p.