Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas
***Campus* Maceió**
Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Gisele Costa da Silva

A Teoria matricial dos Grafos

Maceió
2023

Gisele Costa da Silva

A Teoria matricial dos Grafos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Hugo Santos Nunes

MACEIÓ - AL
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
Campus Maceió
Biblioteca Benevides Monte

S586t Silva, Gisele Costa da.
A teoria matricial dos grafos / Gisele Costa da Silva. – Maceió, 2023.
52 f. : il.

Orientação: Prof. Me. Hugo Santos Nunes.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió, Maceió, 2023.

Arquivo no formato digital em PDF do trabalho acadêmico.

1. Matemática – Teoria dos grafos. 2. Teoria das Matrizes. I. Título.
*CDD: **510.07***

Naiva Maria Amaral
Bibliotecária – CRB-4/989

Gisele Costa da Silva

A Teoria matricial dos Grafos

Monografia submetida ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 27 / 03 / 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Hugo Santos Nunes (Orientador)
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Prof. Dr. Arlyson A. Nascimento (Coorientador)
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Prof. Me. Diogo Meurer de Souza Castro
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Aos meus pais, Geraldo e Maria, aos meus irmãos, Jirlene Maria, Célia Regina, Maria Girleide, Geraldo Filho e Antônio José, pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso. Aos meus pais, irmãos e sobrinhos, pelo exemplo, apoio e incentivo nos momentos difíceis. Agradeço a todos os professores por seus ensinamentos, em especial, ao Professor Hugo Santos Nunes, por aceitar ser meu orientador e desempenhar tal função com dedicação e amizade. Agradeço aos meus colegas de curso, pelo companheirismo e pela troca de experiências. E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a conclusão dessa etapa.

"Águia não sou, meu Senhor
Dela trago tão somente o olhar
E também no coração a aspiração do seu voar"
Irmã Kelly Patrícia

Resumo

Nos últimos anos, muita atenção foi dedicada a uma área relativamente nova na pesquisa matemática chamada teoria dos grafos. Os grafos são úteis para estudar como os componentes das redes que surgem no comércio, nas ciências sociais, na medicina e em outras áreas se inter-relacionam. Por exemplo, os grafos são úteis para estudar a propagação de uma doença contagiosa ou uma rede de voos comerciais servindo um determinado número de grandes cidades. A teoria dos grafos é um tópico muito abrangente. Neste trabalho serão apresentadas apenas algumas definições e será mostrada a estreita relação entre a teoria dos grafos e a teoria das matrizes.

Palavras-chave: Pesquisa matemática. Teoria dos grafos. Teoria das matrizes.

Abstract

In recent years, much attention has been devoted to a relatively new area of mathematical research called graph theory. Graphs are useful for studying how components of networks that arise in commerce, the social sciences, medicine, and other areas interrelate. For example, graphs are useful for studying the spread of a contagious disease or a network of commercial flights serving a number of large cities. Graph theory is a very broad topic. In this work, only a few definitions will be presented and the close relationship between graph theory and matrix theory will be shown.

Keywords: Mathematical Research. Graph Theory. Matrix Theory.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos é um ramo da matemática que busca estudar as relações entre elementos de um determinado conjunto, empregando estruturas denominadas Grafos. Sua origem está associada ao problema das pontes de Königsberg, solucionado e publicado em artigo pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783) em 1736. Artigo este, considerado de grande importância não só para a teoria, mas para toda a ciência da matemática.

Devido a sua ampla capacidade de representação de relações entre elementos, a Teoria dos Grafos vem sendo utilizada em diversas áreas e seu estudo vem se solidificando com o passar dos anos, pois sua vasta aplicabilidade faz desta teoria algo bastante significativo para a sociedade. Seu desenvolvimento na matemática é algo recente, mas está fortemente ligado a Álgebra e a Teoria de Matrizes.

As matrizes são a base para a Teoria dos Grafos, e assim como a Teoria dos Grafos, a Teoria das Matrizes desempenha um importante papel na Matemática e no cotidiano da sociedade, tendo também uma diversificada aplicabilidade em áreas de estudo como economia, biologia e engenharia. Sendo assim, o estudo da Teoria das Matrizes em conjunto com a Teoria dos Grafos tem uma importância singular na resolução de problemas que envolvem relação entre dados.

Deste modo, o presente trabalho tem como objetivo apresentar aplicações envolvendo Matrizes e Teoria dos Grafos em situações relevantes de diferentes áreas de conhecimento. E para seu desenvolvimento a metodologia aplicada foi a pesquisa bibliográfica. Segundo Gil (2017, p. 20):

> A pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado. Tradicionalmente, esta modalidade de pesquisa inclui material impresso, como livros, revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos.

Sendo seu conteúdo convenientemente organizado da seguinte maneira. O capítulo inicial faz uma introdução sobre Matrizes, trazendo um pouco do seu contexto histórico, seguido por definições e propriedades, além de exemplos que tem papel fundamental na compreensão da Teoria das Matrizes.

O capítulo seguinte trata do estudo sobre a Teoria dos grafos, apresentando um pequeno resumo do contexto histórico, seguido das principais definições e teoremas. O capítulo também traz a relação entre Grafos e Matrizes, e exemplos essenciais para o bom entendimento do conteúdo.

Por fim, temos o último capítulo dedicado as aplicabilidades de Matrizes e Teoria dos Grafos. Nele são apresentados exemplos abrangendo toda a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, com o estudo de três casos práticos e comuns do dia a dia.

2 Matrizes

2.1 Contexto histórico

A ideia inicial de matrizes apareceu no livro Chui Chang Suan Shu (Nove capítulos sobre a Arte Matemática), publicado na China por volta de 250 a.C. De acordo com (BOYER, 1996), na obra é possível encontrar problemas com métodos de resolução de equações lineares que se assemelham aos de matrizes.

No entanto, o termo Matriz foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês James Joseph Sylvester, no ano de 1850, em artigo publicado no Philosophical Magazine. Onde a definição apresentada por ele trouxe a matriz como um elemento do determinante:

> "(...) nós devemos começar, não com um quadrado, mas com um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isto não representará em si mesmo um determinante, mas, uma Matriz da qual podemos formar vários sistemas de determinantes por fixar um número p, e selecionar quaisquer p linhas e p colunas, os quadrados correspondendo ao que pode ser chamado de determinantes de $p-$ésima ordem" (SYLVESTER, 1850b, apud BERNARDES, 2020, p. 89).

Mas foi seu amigo, o matemático Arthur Cayley, que ao publicar o texto (A Memoir on the Theory of Matrices), introduziu operações com matrizes e enunciou as propriedades dessas operações (CAYLEY, 1858, apud BERNARDES, 2020), dando o primeiro significado para a palavra Matriz e sugerindo a ideia de operações com matrizes. Ao defini-la como "um conjunto de quantidades organizadas em forma de quadrado", percebe-se a tentativa do matemático em fazer uma estruturação algébrica para as matrizes, associando-as a uma notação abreviada de conjunto de equações lineares. Assim, Matriz surge do interesse de Cayley por transformações lineares e invariantes algébricas, ideia compartilhada por seu amigo Sylvester.

Porém, mesmo com estudos sobre matrizes como os realizados por Sylvester e Cayley, a representação matricial só passou a ser utilizada no final do século XIX. E teve a popularização da linguagem matricial apenas no início do século seguinte. Contudo, sua importância vem se evidenciando de maneira evoluída e significativa com o passar do tempo.

2.2 Definição de Matriz

As matrizes têm como função relacionar dados numéricos, por isso seu estudo é de interesse, não só para a matemática, mas para diversas áreas onde ela pode ser aplicada.

Definição 2.1. *Dá-se o nome de Matriz ao arranjo retangular formado por mn números reais ou complexos, distribuídos em linhas e colunas. Onde m indica o número de linhas da matriz e n o número de colunas.*

Definição 2.2. *O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

De maneira abstrata, a matriz do tipo $m \times n$ é geralmente apresentada da seguinte maneira:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podendo também ser apresentada por $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ou simplesmente $A = [a_{ij}]$. Cada um dos elementos de uma matriz pode ser localizado pela linha e coluna na qual ele se encontra. E seu tamanho é descrito em termos do seu número de linhas (fileiras horizontais, numeradas de cima para baixo) e de colunas (fileiras verticais, numeradas da esquerda para a direita).

Sendo assim, se A é uma matriz do tipo $m \times n$, então a_{ij} é um elemento de A, localizado na linha i e na coluna j, onde $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Exemplo 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Nos exemplos acima, é possível então observar que A é uma matriz do tipo 2×3, pois tem 2 linhas e 3 colunas; B é uma matriz 1×4, com 1 linha e 4 colunas; C é uma matriz 1×1, com 1 linha e 1 coluna; e D é uma matriz 4×1, pois possui 4 linhas e 1 coluna.

Em geral, usa-se as letras maiúsculas romanas para indicar a matriz e letras minúsculas para indicar as entradas, que são os elementos da matriz.

2.3 Tipos Especiais de Matrizes

Algumas matrizes, devido à suas características, são denominadas especiais. São elas:

Definição 2.3 (Matriz Linha). *É a matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, é constituída por uma única linha.*

Definição 2.4 (Matriz Coluna). *É a matriz do tipo $m \times 1$, ou seja, é constituída por uma única coluna.*

Definição 2.5 (Matriz Quadrada). *A matriz é denominada quadrada quando possui o mesmo número de linhas e colunas.*

Em uma matriz quadrada é possível definir *Diagonal Principal* e *Diagonal Secundária*. Onde a diagonal principal é constituída por elementos a_{ij}, sendo $i = j$. Já a diagonal secundária é formada por elementos a_{ij}, onde $i + j = n + 1$. E n é a dimensão da matriz a_{ij}.

Definição 2.6 (Matriz Triangular). *É a matriz que possui todos os elementos, acima ou abaixo da diagonal principal iguais a zero.*

A matriz é dita *Matriz Triangular Superior*, se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$. E *Matriz Triangular Inferior*, se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$.

Definição 2.7 (Matriz Diagonal). *É a matriz onde todos os elementos exteriores à diagonal principal são iguais a* 0.

Definição 2.8 (Matriz Escalar). *É a matriz cujos elementos da diagonal principal possuem o mesmo valor, e os elementos não pertencentes a diagonal principal são iguais a* 0.

Definição 2.9 (Matriz Identidade). *É a matriz cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a* 1*, e os elementos não pertencentes a diagonal principal são iguais a* 0.

Definição 2.10 (Matriz Nula). *É a matriz cujo valor de todos os seus elementos é igual a zero. Este tipo de matriz pode ser representada por* $\mathbf{0}_{m\times n}$.

Se a matriz nula for quadrada, ela é considerada uma matriz escalar uma vez que os elementos da diagonal principal têm o mesmo valor e os elementos restantes são iguais a zero.

2.4 Operações com Matrizes

Definição 2.11 (Igualdade de Matrizes). *Duas matrizes são ditas* ***iguais*** *se tem o mesmo tamanho $m \times n$, e seus elementos correspondentes forem iguais.*

Se considerarmos as matrizes A , B e C, representadas abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & x+4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

A e B, são iguais, se e somente se, $x = 5$. E não há valor de x com o qual $B = C$, pois B e C tem tamanhos diferentes.

A igualdade demonstrada para $A[a_{ij}]$ e $B[b_{ij}]$ pode ser expressa por $(A_{ij}) = (B_{ij})$, ou, $a_{ij} = b_{ij}$, entendendo-se que a igualdade é válida para qualquer valor de i e j.

Definição 2.12 (Adição e Subtração de Matrizes). *Se A e B são matrizes de mesmo tamanho, então a matriz* ***soma*** *de A com B é obtida pela soma das entradas das matrizes A e B. E a matriz* ***diferença*** *é obtida pela diferença dos elementos das matrizes A e B. Sendo assim, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ tem o mesmo tamanho:*

$$\begin{aligned} (A+B)_{ij} &= (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ (A-B)_{ij} &= (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *Considerando as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

então:

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \quad e \quad A - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propriedade 1 (Adição de Matrizes). *Sejam A,B e C matrizes arbitrárias em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$. *(Associativa)*

2. $A + B = B + A$. *(Comutativa)*

3. $A + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n} + A = A$. *(Elemento neutro)*

4. *Para toda matriz de ordem $m \times n$, existe uma matriz de mesma ordem tal que $A + (-A) = (-A) + A = 0$.* *(Simétrico)*

Definição 2.13 (Matriz multiplicação por escalar). *Dada uma matriz A e um número escalar $k \in \mathbb{R}$, denomina-se **matriz multiplicação por escalar** $k.A$, a matriz obtida pela multiplicação da constante k por cada elemento da matriz A.*

Em notação, se $A = [a_{ij}]$, então $(kA)_{ij} = k(A)_{ij} = ka_{ij}$.

Exemplo 2.3. *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

então:

$$3.A = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 33 \\ 0 & -3 & 15 \\ 12 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Propriedade 2 (Propriedades da Multiplicação de Matriz por Escalar). *Sejam A e B matrizes de mesma ordem e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$:*

1. $(k_1 + k_2).A = k_1.A + k_2.A$

2. $(k_1.k_2).A = k_1.(k_2.A)$

3. $k.(A + B) = k.A + k.B$

4. *Para toda matriz A de ordem $m \times n$ cujo escalar seja $k = 0$, $k.A = \mathbf{0}_{m\times n}$.*

5. *Para toda matriz A de ordem $m \times n$, $1.A = A$*

6. $(-k).A = -(k.A)$

Definição 2.14 (Multiplicação de matrizes). *Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. Definimos o produto das matrizes $A.B$, como sendo $A.B = [c_{ij}]_{m\times p}$. Onde, cada elemento de $A.B$ é obtido a partir da soma dos produtos dos elementos correspondentes a i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B. Temos então:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Observação 2.1. *Só podemos efetuar o produto de duas matrizes* $A_{m\times n}$ *e* $B_{n\times p}$ *se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. A matriz resultado será* $C = A.B$ *de ordem* $m \times p$*.*

Exemplo 2.4. *Considerando as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

temos:

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 2 & 3\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 2 & 5\cdot 0 + 3\cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 2.15 (Potenciação de matrizes)**.** *Seja* A *uma matriz quadrada. Definimos as potências de* A *como* $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A.A$ .... $A^k = A.A^{k-1} = A^{k-1}.A$

Exemplo 2.5. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\text{Então } A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 3.0 & 1.3 + 3.2 \\ 0.1 + 2.0 & 0.3 + 2.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3 Teoria dos grafos

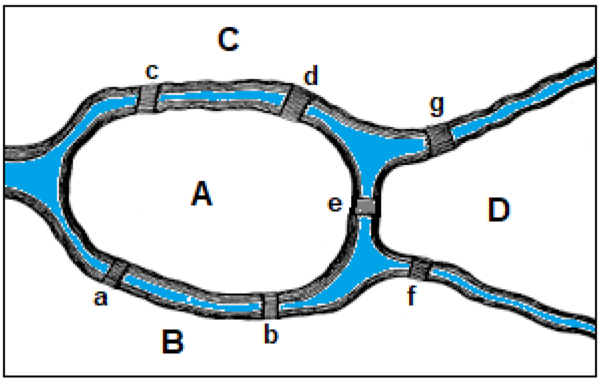
Este capítulo mostra como os resultados que aprendemos sobre matrizes podem ser aplicados a uma área da matemática conhecida como teoria dos grafos. O estudo da Teoria dos Grafos se deve principalmente a sua infinidade de aplicações práticas. Esta teoria é tida como um ramo da matemática bastante útil e importante, pois permite a resolução de problemas em diversas áreas.

3.1 Contexto histórico

Formalmente, o termo Grafo foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês James Joseph Sylvester em um artigo publicado no ano de 1877, na revista e *Nature*. No entanto, a resolução do Problema das Sete Pontes de Königsberg, publicada no artigo e *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes*, pelo matemático Leonhard Euler em 1736, é citada como a primeira publicação da Teoria dos Grafos.

O problema baseia-se na cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado, na Rússia), onde o rio Pregel que corta a cidade, forma duas ilhas ao longo do seu percurso, dividindo a cidade em quatro regiões. Na época, havia na cidade sete pontes interligando as regiões, conforme mostra a Figura 1:

Figura 1: As pontes de Königsberg.

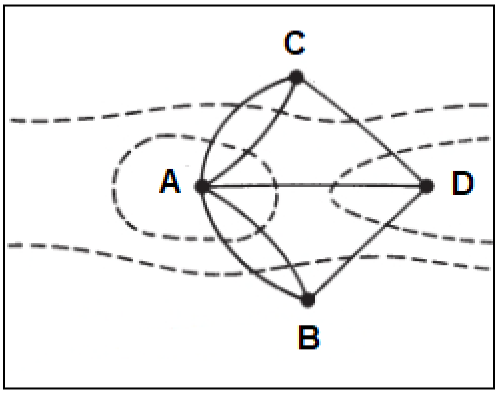


Fonte: Lopes, 2015.

Buscava-se então, saber se havia a possibilidade de se passear pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida. Ninguém havia conseguido um caminho para solucionar o problema, nem uma justificativa para a impossibilidade da solução. Até que em 1736, Leonhard Euler provou que o problema não tinha solução, justificando a não possibilidade de um caminho nas condições impostas.

Para chegar a solução Euler simplificou a visualização através do mapa, transformando os caminhos em retas e as intersecções em pontos. Ele acabou representando o problema por um Grafo, como pode ser observado na Figura 2.

Figura 2: Representação gráfica de Euler.



Fonte: Lipschutz, 2013.

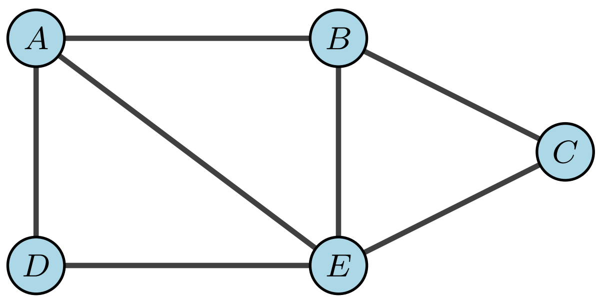
Ao buscar solucionar o problema, Euler percebeu que para se verificar a situação buscada seria necessário se ter duas linhas ao atravessar cada ponto, uma para entrar no ponto e outra para sair. Portanto, cada vértice deveria ter grau par de linhas. No entanto, no grafo das pontes de Königsberg isso não ocorre, por contagem evidencia-se um número ímpar e, portanto, o problema não pode ser solucionado.

O raciocínio utilizado por Euler para encontrar a resposta do enigma das pontes de Königsberg, foi de grande importância para a resolução de outros problemas, pois ele não só provou que o enigma não tinha solução, como criou critérios para sua verificação que podem ser usados em problemas semelhantes. Surgiu então a Teoria dos Grafos, no entanto, seu desenvolvimento na matemática e suas aplicações nos diversos campos de conhecimento, só passou a ser evidentemente notado a partir do século XX.

3.2 Conceitos básicos

Um grafo é um desenho que indica se certos objetos estão ou não relacionados entre si de alguma forma. A Figura 3 ilustra um grafo típico, contendo cinco pontos, de A a E, e sete segmentos de reta entre pares particulares de pontos. Por exemplo, os pontos aqui podem representar cinco pessoas, e um segmento de reta entre os pontos pode indicar que as duas pessoas envolvidas se conhecem.

Figura 3: Um grafo típico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em geral, um grafo é uma coleção de objetos, chamados vértices, que geralmente são representados geometricamente como pontos, juntamente com um conjunto de conexões entre esses vértices, chamados de arestas, que geralmente são representados como segmentos de reta. Para o estudo dos grafos é interessante conhecer conceitos básicos como os apresentados a seguir.

Definição 3.1 (Grafo)**.** *Seja V um conjunto de nós ou vértices e A um conjunto de arestas ou arcos, dá-se o nome de **grafo** ao par ordenado $G = (V, A)$, onde todo elemento A está relacionado a elementos de V.*

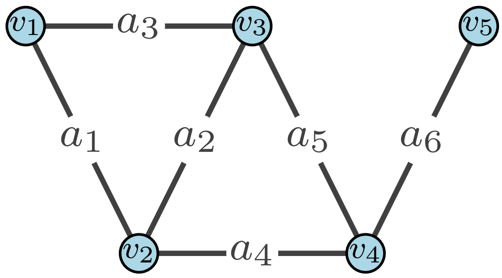
Exemplo 3.1. *O exemplo abaixo mostra a representação gráfica de um grafo onde:*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \quad e \quad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\},$$

sendo:

$$a_1 = (v_1, v_2),\ \ a_2 = (v_2, v_3),\ \ a_3 = (v_1, v_3),\ \ a_4 = (v_2, v_4),\ \ a_5 = (v_3, v_4) \quad e \quad a_6 = (v_4, v_5).$$

Figura 4: Grafo com 5 vértices e 6 arestas.

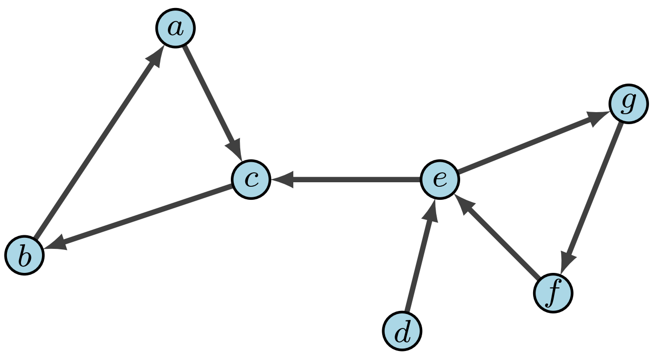


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.2 (Grafo Direcionado)**.** *Se as relações representadas pelas arestas que conectam um nó a outro tem um sentido de ligação definido, onde a aresta só pode ser seguida em uma única direção, sendo as arestas marcadas por uma seta, o grafo é chamado de **grafo direcionado**.*

Exemplo 3.2. *O exemplo traz a representação gráfica de um grafo direcionado.*

Figura 5: Grafo direcionado.

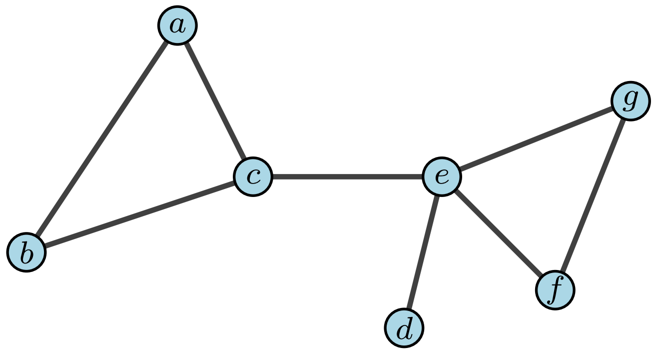


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.3 (Grafo Não Direcionado)**.** *O grafo será **não direcionado** quando as relações representadas pelas arestas não tiverem um sentido definido, podendo a aresta ser seguida em qualquer direção. Este tipo de grafo pode ser pensado como um grafo dirigido com arestas de sentido duplo.*

Exemplo 3.3. *O exemplo da representação gráfica de um grafo não direcionado.*

Figura 6: Grafo não direcionado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.4 (Laço)**.** *É uma aresta que liga um mesmo vértice a ele mesmo.*

Definição 3.5 (Arestas múltiplas)**.** *Também chamada de **arestas paralela**, são arestas diferentes que possuem os mesmos vértices como extremidades.*

Definição 3.6. *Um grafo é dito **simples** quando ele não possui laços nem arestas múltiplas.*

Definição 3.7. *Quando o grafo possui laços e arestas múltiplas ele é chamado de **multigrafo**.*

Exemplo 3.4. *No exemplo temos um grafo simples e um multigrafo. Na Figura 7b é possível observar um laço no vértice v_3 e as arestas múltiplas entre v_3 e v_1, e entre v_2 e v_3.*

Figura 7: Exemplo de grafos simples e multigrafo.

(a) Grafo Simples. (b) Multigrafo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.8 (Subgrafo)**.** *Um grafo G' é dito um **subgrafo** de um grafo G se o conjunto de vértices $V(G') \subseteq V(G)$ e o conjunto de arestas $A(G') \subseteq A(G)$.*

Exemplo 3.5. *O exemplo traz a figura de um grafo G' que é subgrafo de G.*

Figura 8: Exemplo de grafo e subgrafo

(a) Grafo G. (b) Subgrafo G'.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.9 (Ordem). *A **ordem** de um grafo G é dada pela cardinalidade do seu conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices que G possui.*

Exemplo 3.6. *O grafo G apresentado na figura 9 tem ordem* $= 5$, *pois seu conjunto de vértices é dado por* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Definição 3.10 (Passeio). *Um **passeio** em um grafo G é uma sequência alternada de vértices e arestas, onde cada aresta é incidente ao vértice que a precede e ao que a sucede.*

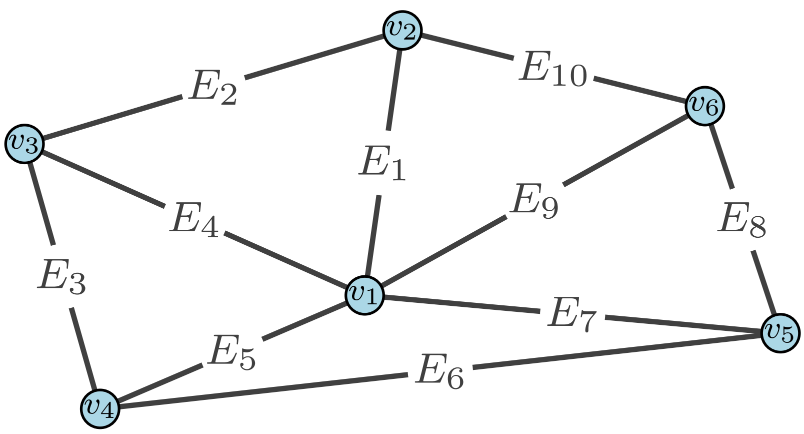
Definição 3.11 (Trajeto). *Dá-se o nome de **trajeto** ao passeio onde todas as arestas são distintas.*

Definição 3.12 (Caminho). *Um **caminho** é um passeio onde todos os vértices são distintos.*

Definição 3.13 (Comprimento). *O **comprimento** de um passeio, trajeto ou caminho é o número de arestas que o constitui.*

Exemplo 3.7. *Considere o grafo abaixo:*

Figura 9: Grafo.



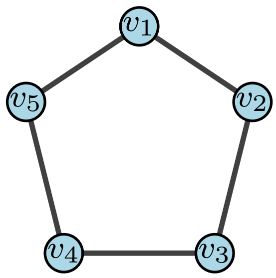
Fonte: Elaborado pelo autor.

No grafo acima um passeio, é por exemplo, a sequência $v_3, v_1, v_5, v_6, v_1, v_4, v_3$ que tem comprimento 6. É também um trajeto, pois não temos repetição de arestas. Um exemplo de caminho seria a sequência v_3, v_1, v_6, v_5, v_4 de comprimento 4.

Definição 3.14 (Ciclo)**.** *Um* ***ciclo*** *ou* ***circuito*** *é um caminho fechado, cujo vértice inicial é também o vértice final.*

Exemplo 3.8. *A sequência $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$ apresentada na figura do grafo abaixo é um exemplo de ciclo.*

Figura 10: Grafo (Ciclo).

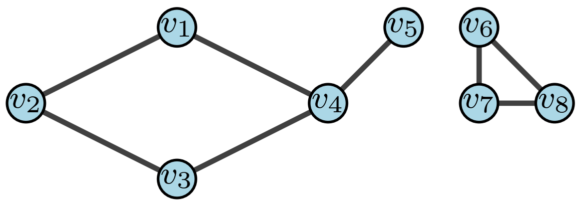


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.15 (Conexidade)**.** *Um grafo G é* ***conexo*** *se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices pertencente a ele. Caso contrário, o grafo é dito* ***desconexo****.*

Exemplo 3.9. *O grafo apresentado na Figura 10 é conexo, pois entre cada par de vértices existe um caminho que os une. Já a Figura 11 traz um grafo desconexo, onde é possível observar suas componentes divididas em dois subconjuntos $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $V_2 = \{v_6, v_7, v_8\}$.*

Figura 11: Grafo desconexo.



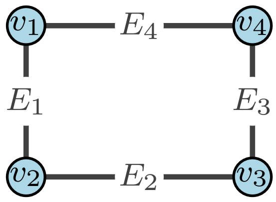
Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 3.1. *Um grafo G é dito desconexo se o seu conjunto de vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos disjuntos não vazios V_1 e V_2, tal que não exista aresta em G cujo vértice extremo esteja no subconjunto V_1 e outro no subconjunto V_2.*

Definição 3.16 (Incidência)**.** *Dados dois vértices v_i e v_j, eles são ditos incidentes de uma aresta a_k, se eles forem os extremos de a_k.*

Exemplo 3.10. *No grafo v_2 e v_3 são vértices incidentes na aresta E_2.*

Figura 12: Grafo (Incidência).



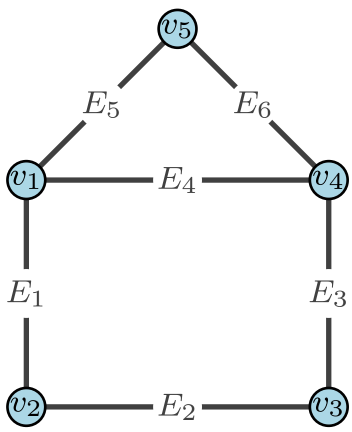
Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.17 (Vértices adjacentes)**.** *Dados dois vértices v_i e v_j, eles são ditos adjacentes ou vizinhos se existir uma aresta a_k em comum entre eles, ou seja, há uma aresta incidente aos vértices que ela conecta.*

Definição 3.18 (Arestas adjacentes)**.** *Dados duas arestas a_i e a_j, elas são ditas adjacentes se tiverem ao mesmo tempo um vértice v_k em comum.*

Exemplo 3.11. *No grafo temos que v_1 e v_4 são vértices adjacentes, pois a aresta E_4 é comum a eles. Temos também, E_5 e E_6 como exemplo de arestas adjacentes pois, v_5 é um vértice em comum entre as duas arestas.*

Figura 13: Grafo (Vértice e Aresta Adjacente).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.19 (Grau de um vértice)**.** *É o número de arestas que incidem em um vértice. Será denotado por $g(v)$.*

Definição 3.20. *A soma dos graus dos vértices de um grafo recebe o nome de **grau do grafo**.*

Exemplo 3.12. *O grafo apresentado na Figura 13, possui grau* 12. *Pois:*

Tabela 1: Grau dos vértices do Grafo apresentado na Figura 13.

Vértice	Grau $g(v)$
v_1	3
v_2	2
v_3	2
v_4	3
v_5	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 3.2. *O grau de um grafo é sempre um número par.*

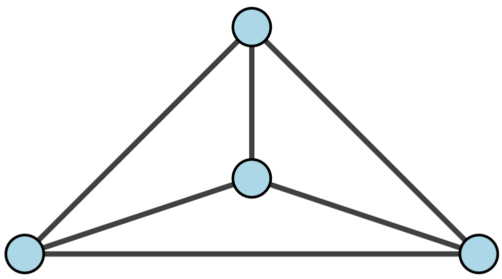
Ao somarmos em um grafo os graus dos vértices cada aresta pertencente a ele é contada duas vezes. Portanto a soma será um número par. Assim, tomando m como o número de arestas do grafo:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m.$$

Definição 3.21 (Grafo Completo)**.** *Dá-se o nome de* ***grafo completo*** *ao grafo simples em que cada um dos seus n vértices é adjacente a qualquer outro vértice. Um grafo completo com n vértices é denotado por* K_n.

Exemplo 3.13. *O exemplo traz um grafo completo* K_4.

Figura 14: Grafo Completo.

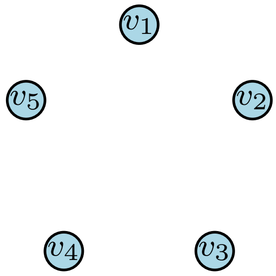


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.22 (Grafo Nulo)**.** *Um grafo simples G é* ***nulo*** *ou* ***vazio*** *quando o conjunto de arestas é vazio. Portanto,* $G = (V, A)$ *é dito nulo se* $V \neq \varnothing \quad e \quad A = \varnothing$.

Exemplo 3.14. *O exemplo traz um grafo nulo.*

Figura 15: Grafo Nulo.

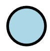


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.23 (Grafo Trivial)**.** *Quando o grafo simples possui um único vértice ele é dito **trivial**.*

Exemplo 3.15. *O exemplo traz um grafo trivial.*

Figura 16: Grafo Trivial.

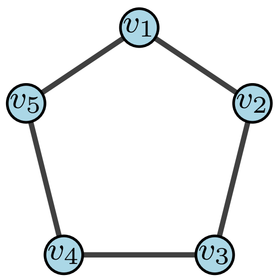


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.24 (Grafo Regular)**.** *Um grafo G é **regular** (de grau $g(v)$) quando todos os seus vértices tem o mesmo grau $g(v)$.*

Exemplo 3.16. *O exemplo mostra um grafo de grau 2, isto é, todos os seus vértices tem grau 2.*

Figura 17: Grafo Regular.

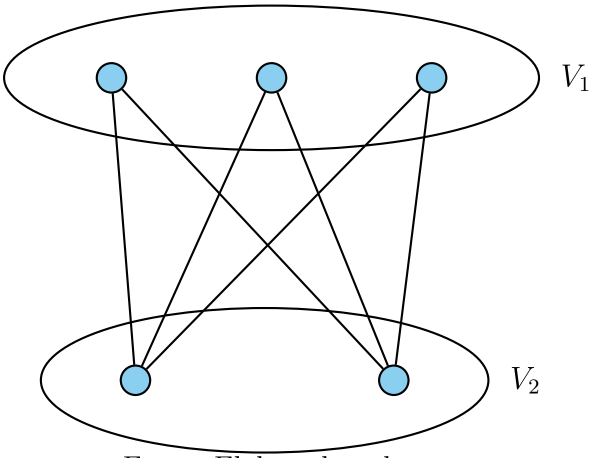


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.25 (Grafo Bipartido)**.** *Um grafo G é dito **bipartido** quando o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2, de maneira que os vértices de um subconjunto não sejam adjacentes.*

Exemplo 3.17. *O exemplo traz um grafo bipartido onde V_1 e V_2 são subconjuntos do grafo.*

Figura 18: Grafo Bipartido.

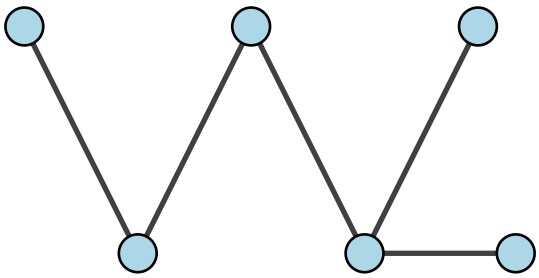


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.26 (Árvore)**.** *Um grafo G é denominado* ***árvore*** *se ele for conexo e não possuir ciclos.*

Exemplo 3.18. *O exemplo traz uma árvore também chamada de grafo conexo.*

Figura 19: Árvore.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 3.3. *Um grafo G é uma árvore se, e somente se, existir um e apenas um caminho entre cada par de vértices.*

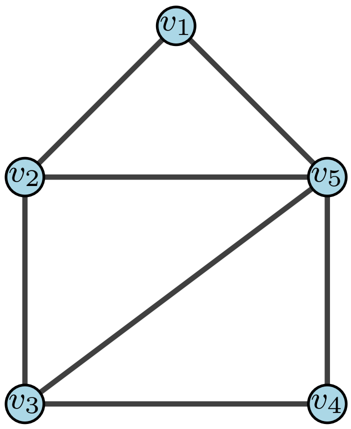
3.3 Representação de um Grafo

Ao se trabalhar com grafos é importante saber representá-lo de maneiras diferentes, não apenas na forma de desenho. Esta seção mostra que é possível utilizar o que foi aprendido sobre matrizes no estudo de grafos, pois, em diversas áreas temos a representação gráfica de um grafo como adequada e pertinente. Além da representação geométrica, podemos colocar todas as informações relevantes para um grafo em forma de tabela usando uma matriz. É uma forma útil onde se estabelece uma relação entre grafos e álgebra, e facilita a resolução de problemas onde se tem um número elevado de ligações. Duas matrizes possíveis de serem geradas por um grafo são:

Definição 3.27 (Matriz de adjacência)**.** *Dado um grafo G com n vértices e m arestas, sua matriz de adjacência é a matriz A_G de ordem $n \times n$, cujo elemento a_{ij} é igual ao número de arestas ligando o vértice i ao vértice j.*

Exemplo 3.19. *O exemplo traz um grafo e sua matriz de adjacência.*

Figura 20: Grafo G e sua matriz de adjacência.



$$A_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como não existe no grafo exemplificado nenhum laço, ou seja, uma aresta do tipo uu com $(u \in V)$, todos os elementos da diagonal principal da matriz A_G são iguais a zero. E como não há arestas múltiplas, a matriz de adjacência tem apenas zero e um como valores dos seus elementos. O zero indica que não há ligação entre os vértices e um indica que existe uma ligação entre os vértices.

Cada grafo pode ser expresso matematicamente na forma de uma matriz de adjacência. De fato, todas as informações relevantes sobre um grafo estão em sua matriz de adjacência. Assim, dada apenas a matriz de adjacência, podemos reconstruir o grafo. Nessas matrizes as linhas e colunas são atribuídas aos nós do grafo e a presença de uma aresta é simbolizada por um valor numérico. Usando a representação matricial do grafo podemos calcular propriedades desse grafo como grau e outras centralidades aplicando conceitos básicos de matrizes.

Teorema 3.4. *Seja G um grafo simples e A_G a sua matriz de adjacência. O número de passeios de comprimento K entre os vértices v_i e v_j de G, que denotaremos por $p_{ij}(K)$, é igual à entrada a_{ij}^K da matriz A_G^K.*

Demonstração. Fazendo indução em K:

- Para $K = 1$, o resultado é válido, uma vez que só existe um único passeio de comprimento 1 entre os vértices v_i e v_j se existir uma aresta que os ligue e neste caso, por definição de matriz de adjacência

$$a_{ij} = 1 = p_{ij}(1).$$

- Suponha, por indução, que para $k > 2$ o número de passeios de comprimento $k-1$ entre os vértices v_i e v_j em G é igual à entrada a_{ij}^{K-1} da matriz A_G^{K-1}. Vejamos para os passeios de comprimento k.

- Como $A_G^K = A_G^{K-1}A$. Dessa forma, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(K)} &= \sum_{p=1}^{n} a_{ip}^{(K-1)} a_{pj} \\ &= \sum_{p=1}^{n} p_{ip}(K-1) p_{pj}(1) \\ &= p_{ij}(K). \end{aligned}$$

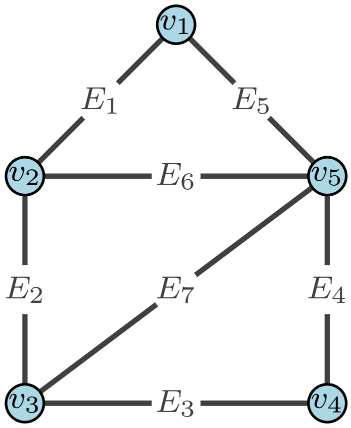
  uma vez que cada passeio de comprimento $k-1$ entre os vértices i e j acrescentamos uma aresta, obtemos passeios de comprimento k. Portanto, $a_{ij}^{(K)} = p_{ij}(K)$, para todo $K \geq 1$.

□

Definição 3.28 (Matriz de incidência)**.** *Dado um grafo G com n vértices e m arestas, sua matriz de incidência é a matriz A_G de ordem $n \times m$, cujo elemento a_{ij} corresponde ao número de vezes que o vértice i é incidente a aresta j.*

Exemplo 3.20. *O exemplo traz um grafo e sua matriz de incidência.*

Figura 21: Grafo G e sua matriz de incidência.



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 \end{array} \\
A_G = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na matriz do exemplo é possível observar que as linhas estão associadas aos vértices e as colunas às arestas. O elemento da linha i e coluna j é 1 quando a aresta j incide sobre o vértice i, caso contrário o elemento é 0.

Corolário 3.1 (Potências de uma matriz de incidência quadrada)**.** *Se A é a matriz de incidência quadrada de um grafo dirigido. Então:*

1. *O ij-ésimo componente de A^2 representa o número de ligações do nó i ao nó j com comprimento 2.*

2. *Em geral, o ij-ésimo componente de A^m representa o número de ligações do nó i ao nó j com comprimento m.*

Além disso, seja $a_{ij}^{(m)}$ o ij-ésimo componente de A^m, então:

1. *Se $a_{ij}^m = k$, então há exatamente k trajetos e m caminhos do nó i ao nó j.*

2. *Se $a_{ij}^s = 0$ para $s < m$, então o caminho mais curto desde o nó i ao nó j é um trajeto de m caminhos.*

3. *Se $a_{ij}^s = 0$ para $1 \leq s \leq m$, então não existe trajetória desde o nó i ao nó j.*

4. *O ij-ésimo componente de A^m pode ser calculado de $A.A^{m-1}, A^2.A^{m-2}, ..., A^{m-1}.A$, não importa se o resultado é o mesmo. Do produto das matrizes temos então:*

$$a_{ij}^m = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{m-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 a_{kj}^{m-2} = \cdots = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{m-1} a_{kj}.$$

Demonstração. Este corolário segue do teorema 3.4, que já foi demonstrado. □

Exemplo 3.21. *Tomando a matriz B, vamos aplicar o teorema 3.4 e o corolário 3.1, para encontrar as ligações com comprimento* 2 *e* 3.

$$B = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Solução. Utilizando o teorema e elevando a matriz B ao quadrado:

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \\ B^3 &= BB^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Analisando e interpretando as informações da matriz B^2. Temos por exemplo, $b_{14} = 2$, ou seja, o elemento da matriz B^2 que se encontra na posição b_{14} é 2. Esse resultado é obtido a partir da multiplicação da linha 1 pela coluna 4, ambas em destaque.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo a fórmula do produto para b_{14}, temos:

$$\begin{aligned} b_{14}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{4} b_{1k}b_{k4} = b_{11}b_{14} + b_{12}b_{24} + b_{13}b_{34} + b_{14}b_{44} \\ &= 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

O elemento $b_{14} = 2$ da matriz B^2, indica que há duas possíveis ligações indo do nó 1 ao nó 4, de comprimento 2. Uma se obtém de $b_{12}b_{24}$ e outra de $b_{13}b_{34}$. As possíveis ligações são:

$$n_1 \to n_2 \to n_4.$$

$$n_1 \to n_3 \to n_4.$$

Observando a matriz é possível perceber que $b_{32} = b_{32}^{(2)} = 0$, isso indica que não há ligações de comprimento um, nem de comprimento dois. No entanto, ao elevarmos a matriz ao cubo, encontramos uma trajetória de comprimento 3 para ir do nó 3 ao nó 2. A trajetória pode ser encontrada, sem ver o grafo, pela formula:

$$\begin{aligned} b_{32}^{(3)} &= \sum_{k=1}^{4} b_{3k}b_{k2}^{(2)} = b_{31}b_{12}^{(2)} + b_{32}b_{22}^{(2)} + b_{33}b_{32}^{(2)} + b_{34}b_{42}^{(2)} \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

A trajetória encontrada é obtida de $b_{34}b_{42}^{(2)}$, onde:

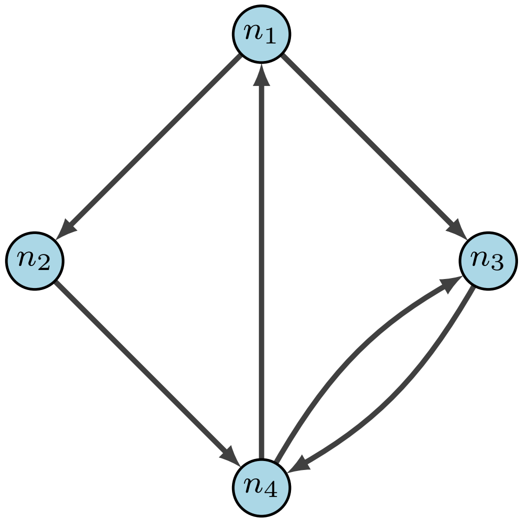
$$b_{34}b_{42}^{(2)} = b_{34}b_{41}b_{12}.$$

Ou seja

$$n_3 \to n_4 \to n_1 \to n_2.$$

Observando o grafo da matriz B, é possível comparar os resultados obtidos:

Figura 22: Grafo da matriz B.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$\square$

4 Grafos e aplicações de matrizes

A história da álgebra linear mostra que originalmente as matrizes foram utilizadas para resolver o que chamamos de sistemas de equações lineares (GONZÁLEZ, 2014) . Atualmente sua importância se apresenta em diversas áreas como engenharia, química e economia.

Este capítulo traz então, alguns exemplos de aplicação de matrizes.

4.1 Aplicação em uma Agência de Viagens

Uma aplicação da propriedade associativa do produto entre matrizes pode ser feita com o problema de atribuição de rotas por uma agência de viagens, a fim de oferecer ao cliente diferentes rotas de viagem de uma cidade a outra. A matriz do modelo pode ser construída com distâncias, custos e tempo de viagem entre cidades, entre outros.

O problema consiste em se encontrar diferentes possíveis rotas, com ou sem escala, para se viajar de uma cidade a outra. Nessa aplicação, com o uso das matrizes é possível determinar as possíveis formas de viagem indo de uma cidade c_1 a uma cidade c_n, para daí se optar pela melhor rota. Para exemplificar o problema, utilizaremos então o caso de escalas com diferentes rotas entre os países F, G e H. O exemplo apresentado a seguir foi retirado do livro (GONZÁLEZ, 2014).

Exemplo 4.1. *Suponha a representação da programação das rotas entre os países F, G e H, nas matrizes abaixo:*

$$F = \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_5 & c_6 & c_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad G = \begin{array}{c} \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_8 & c_9 & c_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad e \quad H = \begin{array}{c} \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Considere no problema:

- *Cada matriz representa as ligações diretas entre as cidades do país ao qual pertence.*

- *O produto entre as matrizes de um país com outro, por exemplo, $F.G$, representam as ligações indiretas entre as cidades do país F com as cidades do país G. O mesmo ocorre com $G.H$.*

- *O produto $F.G.H$ representa as ligações entre as cidades do país F com as cidades do país H, fazendo escala em cidades do país G.*

- *Cada elemento da matriz produto indica o número de ligações que existe entre as cidades. E a decisão entre a melhor rota para ir de uma cidade a outra depende das condições e do custo da viagem. O problema tem então como objetivo, encontrar as possíveis rotas.*

Deve-se determinar as seguintes rotas possíveis:

1. *Ir da cidade c_1 localizada no país F, a cidade c_{12} localizada no país H.*
2. *Ir da cidade c_3 localizada no país F, a cidade c_{12} localizada no país H.*
3. *Ir da cidade c_1 localizada no país F, a cidade c_{14} localizada no país H.*

Solução. Para encontrar a solução atendendo as condições do problema, inicialmente calcula-se o produto $F.G.H$ entre as matrizes. Resolvendo por partes, temos:

Determinando a matriz produto $F.G$:

$$\begin{aligned} F.G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, podemos calcular a matriz produto $F.G.H$ como sendo o produto entre a matriz

$F.G$ e a matriz H.

$$
\begin{aligned}
(F.G).H &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$
\begin{aligned}
F.G.H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.
\end{aligned}
$$

1. Tomando $a_{ij} = (fgh)_{ij}$. Ao realizar o produto $F.G.H$ é possível observar na matriz resultante que:

   (a) A matriz resultante do produto $F.G.H$ nos dá o elemento $a_{12} = 0$, que indica que não há rotas possíveis entre a cidade c_1, pertencente ao país F e a cidade c_{12} pertencente ao país H.

   (b) Na matriz resultante do produto $F.G.H$, temos o elemento $a_{32} = 1$, isso indica que para ir da cidade c_3 no país F, a cidade c_{12} no país H há uma única rota.

Informação obtida com a realização dos cálculos:

$$\begin{aligned}
(fgh)_{32} &= \sum_{i=1}^{3}(fg)_{3i}h_{i2} \\
&= (fg)_{31}h_{12} + (fg)_{32}h_{22} + (fg)_{33}h_{32} \\
&= (\sum_{j=1}^{3} f_{3j}g_{j1})h_{12} + (\sum_{j=1}^{3} f_{3j}g_{j2})h_{22} + (\sum_{j=1}^{3} f_{3j}g_{j3})h_{32} \\
&= (f_{31}g_{11} + f_{32}g_{21} + f_{33}g_{31})h_{12} + (f_{31}g_{12} + f_{32}g_{22} + f_{33}g_{32})h_{22} \\
&\quad +(f_{31}g_{13} + f_{32}g_{23} + f_{33}g_{33})h_{32} \\
&= (1 \times 0 + \mathbf{1} \times \mathbf{1} + 0 \times 0)\mathbf{1} + (1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1)0 \\
&\quad +(1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1)0 \\
&= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

A possível rota para viajar da cidade c_3 no país F para a cidade c_{12} no país H seria, saindo de c_3, passando por c_6, depois por c_8 para dai chegar em c_{12}.

(c) Observando a matriz produto FGH temos o elemento $a_{14} = 3$, indicando a possibilidade de três rotas indo da cidade c_1 no país F a cidade c_{14} no país H. Temos:

$$\begin{aligned}
(fgh)_{14} &= \sum_{i=1}^{3}(fg)_{1i}h_{i4} \\
&= (fg)_{11}h_{14} + (fg)_{12}h_{24} + (fg)_{13}h_{34} \\
&= (\sum_{j=1}^{3} f_{1j}g_{j1})h_{14} + (\sum_{j=1}^{3} f_{1j}g_{j2})h_{24} + (\sum_{j=1}^{3} f_{1j}g_{j3})h_{34} \\
&= (f_{11}g_{11} + f_{12}g_{21} + f_{13}g_{31})h_{14} + (f_{11}g_{12} + f_{12}g_{22} + f_{13}g_{32})h_{24} \\
&\quad +(f_{11}g_{13} + f_{12}g_{23} + f_{13}g_{33})h_{34} \\
&= (1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0)0 + (1 \times 0 + 0 \times 1 + \mathbf{1} \times \mathbf{1})\mathbf{1} \\
&\quad +(\mathbf{1} \times \mathbf{1} + 0 \times 0 + \mathbf{1} \times \mathbf{1})\mathbf{1} \\
&= \mathbf{3}.
\end{aligned}$$

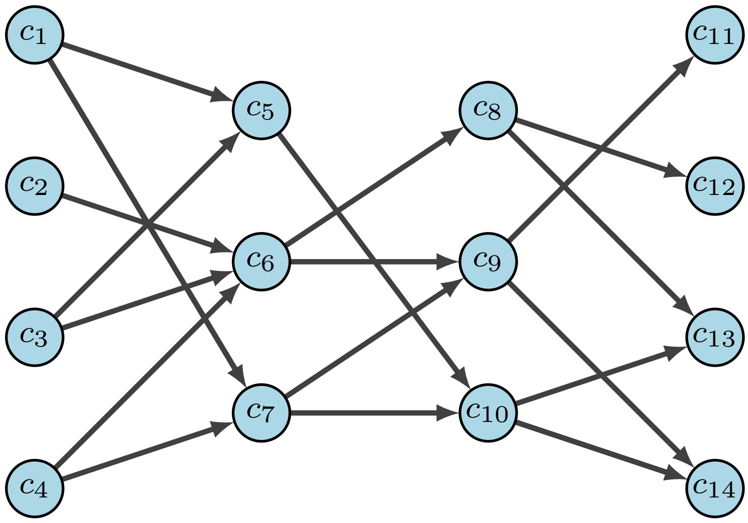
A matriz produto $F.G.H$ nos dá assim, as seguintes possíveis rotas para viajar da cidade c_1 no país F a cidade c_{14} no país H:

Rota 1: Saindo de c_1, passando por c_7 e c_9 para dai chegar em c_{14}.

Rota 2: Saindo de c_1, passando por c_5 e por c_{10} para só então chegar em c_{14}.

Rota 3: Saindo de c_1, passando por c_7 e c_{10} para dai chegar em c_{14}.

Figura 23: Grafo da matriz $F.G.H$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

□

Os resultados obtidos ao solucionar o problema resolvendo o produto entre as matrizes $F.G.H$, permite a agência de viagens dar ao seu cliente, todas as informações em relação as possíveis rotas. Ficando com ele, de acordo com seus interesses e condições, a decisão sobre a melhor rota. Pois, o tipo de aplicação exemplificado é um caso que permite conhecer rotas, e em elevados números de possibilidades é também possível colocar condições necessárias para se alcançar alguns critérios desejados.

4.2 Propagação de Epidemias

Outra aplicação da propriedade associativa do produto entre matrizes pode ser observada ao estudar como um vírus se espalha entre os habitantes das populações afetadas.

Na medicina, quando surge uma nova doença ou se inicia um surto, para esse tipo de problema existe nas entidades responsáveis, além da apreensão pela busca da cura, a preocupação com pessoas, cidades e países que podem se infectar caso as medidas necessárias não sejam tomadas. Para entender a aplicação, vejamos o exemplo apresentado a seguir retirado do livro (GONZÁLEZ, 2014).

Exemplo 4.2. *Suponha a possibilidade do surto de um vírus em uma pequena cidade, cujos efeitos não são detectados rapidamente, mas que em pouco tempo os sintomas aparecem. O vírus se espalha quando os habitantes de um bairro* 1 *tem contato com os do bairro* 2 *e estes por sua vez com os do bairro* 3*, e assim por diante. Os pesquisadores querem então saber, como os habitantes de um bairro foram infectados.*

Por meio de matrizes, se faz uma relação entre pessoas, onde 1 *indica que houve contágio e* 0 *que não houve. As matrizes seguintes mostram os contatos diretos que aconteceram em quatro bairros, onde p_{ij} representa a pessoa i do bairro j.*

$$A = \begin{array}{c} \\ p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_{12} & p_{22} & p_{32} & p_{42} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c} \\ p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \\ p_{42} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{43} & p_{53} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \\ p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ p_{43} \\ p_{53} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Considere no problema:

- *As matrizes representam os contágios que ocorreram a partir do contato direto entre os habitantes dos bairros.Nas linhas estão as pessoas que contaminaram e nas colunas as que foram contaminadas.*
- *O produto entre as matrizes indica os contágios indiretos que ocorreram dos habitantes do bairro* 1 *aos do bairro* 3*, através de habitantes do bairro* 2*. Por exemplo, $A.B$ representa a contaminação indireta que as pessoas do bairro* 1 *fazem com as do bairro* 3*, e $B.C$ representa a contaminação indireta de pessoas do bairro* 2 *com as do bairro* 4*.*
- *O produto entre as matrizes $A.B.C$ indica os contágios indiretos que aconteceram entre habitantes do bairro* 1 *aos do bairro* 4 *através de habitantes dos bairros* 2 *e* 3*.*

- *Os valores dos elementos da matriz produto indicam a quantidade de maneiras possíveis de transmissão da infecção entre as pessoas.*

O problema pede para determinar:

1. *Como pessoas do bairro* 1 *contaminaram as do bairro* 4 *e através de quais pessoas ocorreu a contágio?*

2. *Qual habitante do bairro* 1 *contaminou mais pessoas do bairro* 4*?*

Solução. Para solucionar o problema é necessário encontrar o produto entre as matrizes. Pois a matriz resultante do produto $A.B.C$ indica os contágios indiretos que ocorreram entre pessoas do bairro 1, com pessoas do bairro 4. Realizando o produto por partes, temos que:

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, podemos calcular a matriz produto $A.B.C$ como sendo o produto entre a matriz $A.B$ e a matriz C.

$$\begin{aligned} (A.B).C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$A.B.C \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A matriz resultante do produto $A.B.C$, nos mostra que a pessoa 3 que reside no bairro 1, é quem pode de forma indireta ter contaminado mais pessoas do bairro 4, pois ela teve contato indireto com as pessoas 1, 2 e 4 do bairro 4. Já a pessoa 1 que reside no bairro 1, é quem pode ter contaminado menos pessoas já que ela teve contato indireto apenas com a pessoa 4 do bairro 4.

Os resultados obtidos na matriz produto $A.B.C$ podem ser conferidos, ao realizar cálculos como o do exemplo seguinte:

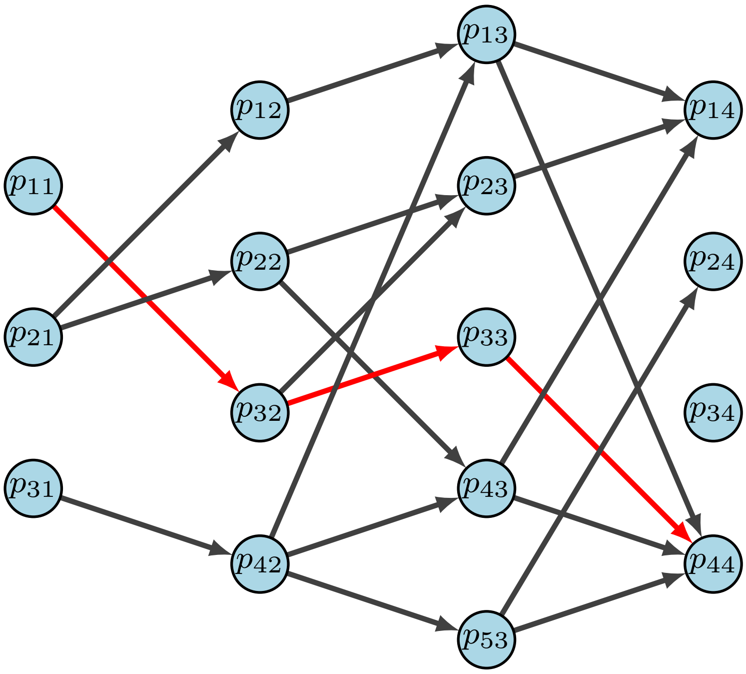
$$\begin{aligned}
(abc)_{14} &= \sum_{i=1}^{1}(ab)_{1i}c_{i4} \\
&= (ab)_{11}c_{14} + (ab)_{12}c_{24} + (ab)_{13}c_{34} + (ab)_{14}c_{44} + (ab)_{15}c_{54} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{4} a_{1j}b_{j1}\right)c_{14} + \left(\sum_{j=1}^{4} a_{1j}b_{j2}\right)c_{24} + \left(\sum_{j=1}^{4} a_{1j}b_{j3}\right)c_{34} + \left(\sum_{j=1}^{4} a_{1j}b_{j4}\right)c_{44} \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{4} a_{1j}b_{j5}\right)c_{54} \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41})c_{14} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}g_{32} + a_{14}b_{42})c_{24} \\
&\quad +(a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} + a_{14}b_{43})c_{34} + (a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} + a_{14}b_{44})c_{44} \\
&\quad +(a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_{45})c_{54} \\
&= (0 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0)1 + (0 \times 0 + 0 \times 0 + \mathbf{1} \times \mathbf{1} + 0)\mathbf{1} \\
&\quad +(0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0)1 \\
&= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

usando o fato de que $c_{24} = c_{44} = 0$.

Observando as matrizes iniciais, é possível perceber em A que a pessoa 1 do bairro 1, contaminou a pessoa 3 do bairro 2, esta então contaminou a pessoa 3 do bairro 3, o que pode ser observado em B, que por fim contagiou a pessoa 4 do bairro 4, ver matriz C. Ou seja:

$$p_{11} \to p_{32} \to p_{33} \to p_{44}.$$

Figura 24: Grafo da matriz $A.B.C$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

□

As mesmas observações podem ser utilizadas para se analisar os outros resultados.

4.3 Logística: redes

Na engenharia industrial, um dos problemas clássicos a se resolver está relacionado a logística de distribuição de materiais. Onde se busca descobrir o melhor planejamento de distribuição de materiais, dentro ou fora da empresa. O problema costuma ser mais complexo, pelo fato de envolver custos, mas para o objetivo do texto, o exemplo apresentado buscará resolver apenas uma parte do problema que é provar que existe ligações entre os nós da rede. É algo pensado para centenas ou milhares de nós, onde os nós que se pretende ligar não estão diretamente conectados.

Para responder o problema, o engenheiro de logística deve conhecer todas as conexões diretas entre todos os nós, excluindo as conexões de um nó com ele mesmo. Com esta informação, o engenheiro constrói uma matriz de adjacência de ordem $n \times n$. O problema consiste em descobrir se existe conexões entre um par de nós pertencente a rede, caso exista deve-se estabelecer a rota a ser seguida. A seguir um exemplo retirado do Livro (GONZÁLEZ, 2014).

Exemplo 4.3. *Suponha um problema de redes composto por oito nós e tem a seguinte matriz de adjacência:*

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \\ n_7 \\ n_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 & n_7 & n_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

O problema pede para:

1. *Por meio de produto entre matrizes, determine a primeira ligação do nó* 3 *com o nó* 1.
2. *Por meio de produto entre matrizes, determine a primeira ligação do nó* 2 *com o nó* 5.
3. *Encontrar as ligações com uma ordem maior que* 3 *comprimentos.*

Solução. Ao se elevar a matriz de adjacência da rede a diferentes potencias,é possível encontrar as diferentes ligações.

1. Ao se elevar a matriz ao quadrado, é possível observar que existe uma ligação entre o nó 3 e o nó 1, que se deve ao elemento $a_{31}^{(2)} = 1$. Para determinar a rota, deve-se

verificar como foi feito o produto entre a linha 3 e a coluna 1 da matriz A.

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \\ n_7 \\ n_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 & n_7 & n_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da matriz A^2 resultante do produto, temos que $a_{31}^{(2)} = 1$ é obtido pela multiplicação de $a_{38} = 1$ com $a_{81} = 1$. Portanto, a rota a ser seguida será sair de n_3, passar por n_8 para chegar a n_1.

2. Calculando A^2, não se obtém ligações entre os nós 2 e 5. Mas, ao se elevar a matriz de adjacência ao cubo é possível observara existência de duas ligações entre o nó 2 e o nó 5, isso ocorre porquê o $a_{25}^{(3)} = 2$. Para se determinar as rotas, determinamos o produto entre as matrizes. Como já temos a matriz A^2 do item anterior, pela propriedade comutativa da multiplicação, podemos fazer $A^3 = A.A^2$ ou $A^3 = A^2.A$.

Assim:

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \\ n_7 \\ n_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 & n_7 & n_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= A.A^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do produto da matriz temos que $a_{25}^{(3)} = 2$, se obtém:

$$a_{25}^{(3)} = a_{24}a_{45}^{(2)} + a_{27}a_{75}^{(2)}.$$

Falta determinar as rotas $a_{45}^{(2)} = 1$ e $a_{75}^{(2)} = 1$. Na matriz A^2, temos que o elemento $a_{45}^{(2)}$ resulta da operação entre os elementos destacados. Ou seja:

$$a_{45}^{(2)} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{45}^{(2)} = a_{43}a_{35}.$$

O mesmo ocorre com $a_{75}^{(2)}$, onde:

$$a_{75}^{(2)}: \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{75}^{(2)} = a_{78}a_{85}.$$

Sendo assim, temos:

$$a_{25}^{(3)} = a_{24}a_{45}^{(2)} + a_{27}a_{75}^{(2)} = a_{24}a_{43}a_{35} + a_{27}a_{78}a_{85}.$$

E as possíveis rotas são:

$$n_2 \to \begin{cases} n_4 \to n_3 \to n_5. \\ n_7 \to n_8 \to n_5. \end{cases}$$

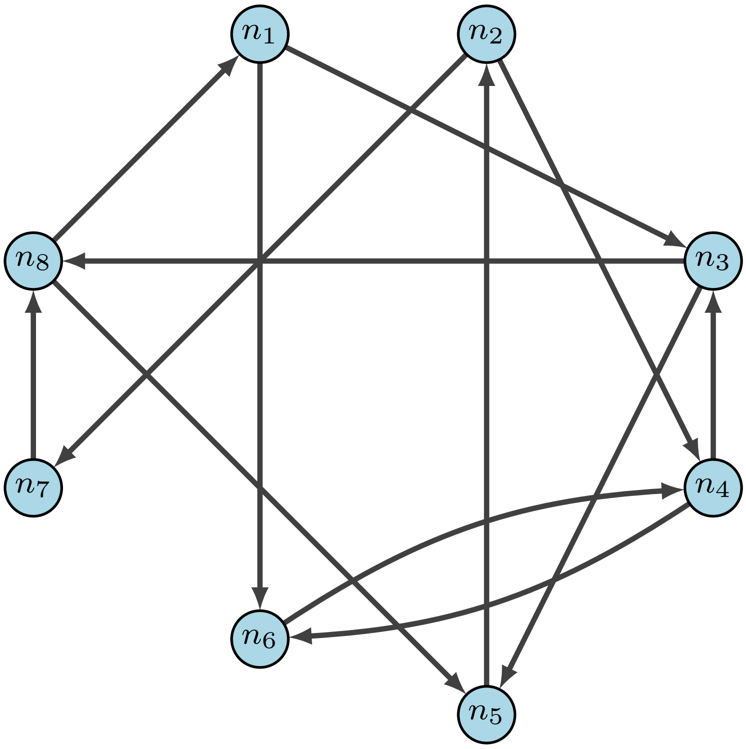
Com uma rota saindo de n_2, passando por n_4, em seguida por n_3 para daí chegar a n_5. A segunda seria saindo de n_2, passando por n_7, depois por n_8 para só então chegar a n_5.

3. Analisando as matrizes A, A^2 e A^3 é possível observar que as ligações entre os nós que ainda não estão conectadas e, portanto, representam as possíveis ligações com comprimento maior que 3 são:

$$\begin{gathered} n_1 \to n_7 \\ n_2 \to n_2 \\ n_4 \to n_7 \\ n_5 \to n_1 \\ n_5 \to n_5 \\ n_6 \to n_1 \\ n_6 \to n_2 \\ n_6 \to n_7 \\ n_7 \to n_4 \\ n_7 \to n_7 \end{gathered}$$

As demais ligações são de comprimento menor ou igual a 3.

Figura 25: Grafo da matriz A.



Fonte: Elaborado pelo autor.

□

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo apresentado buscou trazer um pouco da concepção sobre a origem e a evolução histórica da Teoria das Matrizes e da Teoria dos Grafos. Além de mostrar os conceitos teóricos básicos sobre estas teorias e aplicações na resolução de problemas.

Na construção da fundamentação bibliográfica foi possível verificar que o trabalho em conjunto de ambas as teorias, tem um importante papel no que diz respeito a solução dos mais variados problemas. Pois a Matemática está interligada a diversas outras áreas de estudo, como a engenharia, a química, a economia, a medicina, dentre outras.

Com a pesquisa, foi também possível observar que a Teoria dos Grafos não se trata apenas de um conceito matemático abstrato, é um ramo da matemática com uma vasta aplicabilidade em situações relevantes do cotidiano da sociedade, sendo útil para diversas áreas. Em que a Teoria das Matrizes se fez necessária para dar suporte às aplicações, possibilitando a estruturação dos grafos para investigação dos resultados.

Os casos desenvolvidos, discutidos e ilustrados neste trabalho abrangem apenas algumas das possibilidades existentes para utilização dos Grafos, que possibilitam a verificação da eficiência e praticidade alcançada por meio dos conceitos teóricos deste ramo da matemática, promovendo resolução de diversas situações problemas do cotidiano que envolvam relação de dados.

Deste modo, o Grafo é uma ferramenta essencial que auxilia na interpretação e compreensão de resultados, possibilitando o aprimoramento de trabalhos desenvolvidos nas mais diversas áreas do conhecimento, em que seu uso se faz importante. E impulsionar e aprofundar seu estudo é uma necessidade cada vez mais essencial.

Referências

[1] ANTON, Howard; BUSBY, R. C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Bookman Editora, 2006.

[2] BERNARDES, Aline; ROQUE, Tatiana. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 31, p. 01-19, 2016.

[3] BOYER, Carl B. **História da Matemática**.(2ª edição). Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil, 1996.

[4] CABRERA, Liliane Menezes. **Uma introdução a matrizes, determinantes e sistemas lineares e suas aplicações**. 2018. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

[5] CAYLEY, Arthur. II. A memoir on the theory of matrices. **Philosophical transactions of the Royal society of London**, n. 148, p. 17-37, 1858.

[6] GIL, Antonio Carlos et al. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

[7] GOLDBARG, Marco; GOLDBARG, Elizabeth. **Grafos**: conceitos, algoritmos e aplicações. Elsevier, 2012.

[8] GONZÁLEZ, Eduardo Gutiérrez; OCHOA, Sandra. **Álgebra Lineal y sus Aplicaciones**. Ciudad de Mexico: Grupo Editorial Patria S. A., 2014.

[9] HUNTER, David James. **Fundamentos da matemática discreta**. LTC, 2011.

[10] JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos** – uma introdução. São Paulo: OBMEP, 2009.

[11] KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução À Álgebra Linear com Aplicações**. Grupo Gen-LTC, 2000.

[12] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Matemática discreta-**: Coleção schaum. Bookman Editora, 2013.

[13] NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura; JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos**: introdução e prática. Editora Blucher, 2017.

[14] STEINBRUCH, Alfredo. **Matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares**. McGraw-Hill, 1989.

[15] TCHIVEMBE, Elias. **Matrizes e Grafos**. 2018. Tese de Doutorado.