



**INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS**  
**CAMPUS MACEIÓ - AL**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**JONAS ALEXANDRE DOS SANTOS SILVA**

**DA GEOMETRIA AO MOVIMENTO: A MOTIVAÇÃO PARA O CONCEITO DE  
DERIVADA**

**MACEIÓ – AL**  
**2025**

JONAS ALEXANDRE DOS SANTOS SILVA

DA GEOMETRIA AO MOVIMENTO: A MOTIVAÇÃO PARA O CONCEITO DE  
DERIVADA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, como requisito para obtenção do grau de docência em matemática.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Arlyson Alves do Nascimento

MACEIÓ – AL

2025



**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**  
**Instituto Federal de Alagoas**  
***Campus Maceió***  
**Biblioteca Benevides Monte**

---

515.3

S586g

Silva, Jonas Alexandre dos Santos.

Da geometria ao movimento [recurso eletrônico] : a motivação para o conceito de derivada / Jonas Alexandre dos Santos Silva. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 902 KB). – 2025.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader.

Modo de acesso: Internet.

Orientação: Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, Maceió, 2025.

1. Matemática. 2. Matemática – História. 3. Cálculo diferencial. 4. Derivada. 5. Cinemática. I. Título.

---

**Franciane Monick Gomes de França**  
**Bibliotecária – CRB 4/1831**

JONAS ALEXANDRE DOS SANTOS SILVA

DA GEOMETRIA AO MOVIMENTO: A MOTIVAÇÃO PARA O CONCEITO DE  
DERIVADA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito para obtenção do grau de docência em matemática.

APROVADO EM: 07/07/2025

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof<sup>o</sup> Dr. Arlyson Alves do Nascimento (Orientador)  
Instituto Federal de Alagoas - IFAL

---

Prof<sup>o</sup> Me. Anderson Rangel Batista Siqueira  
Instituto Federal de Alagoas - IFAL

---

Prof<sup>a</sup> Me. Vivia Dayana Gomes dos Santos  
Instituto Federal de Alagoas - IFAL

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente e em especial a Deus, Senhor de todas as coisas que sempre esteve conosco durante todos os momentos difíceis da licenciatura, nos segurando pela mão quando chegava o desânimo. Agradeço a instituição IFAL e todo seu corpo docente que sempre me incentivaram a prosseguir estudando sempre, em especial o professor Arlyson que contribuiu de forma fundamental para a conclusão deste trabalho.

## RESUMO

O cálculo diferencial representa uma das mais importantes descobertas da matemática e da ciência. Seu desenvolvimento ocorreu de forma gradual, com contribuições de diversos pensadores ao longo da história, sendo atribuído, em grande parte, aos trabalhos de Gottfried Leibniz e Isaac Newton. Embora ambos fossem polímatas, possuíam visões distintas: Leibniz abordou o tema sob uma perspectiva puramente matemática, buscando métodos para determinar a inclinação de retas tangentes, enquanto Newton focou na determinação da velocidade instantânea de um móvel. Este trabalho tem como objetivo apresentar o desenvolvimento do cálculo diferencial sob essas duas abordagens, desde as aplicações na geometria analítica até sua relevância na cinemática. Além disso, são discutidos o conceito formal de derivada, suas principais regras e aplicações, destacando sua importância como ferramenta para a análise do movimento de corpos.

**Palavras-chave:** cálculo diferencial; derivada; história da matemática; cinemática.

## ABSTRACT

Differential calculus represents one of the most significant discoveries in mathematics and science. Its development occurred gradually, with contributions from several thinkers throughout history, being largely attributed to the works of Gottfried Leibniz and Isaac Newton. Although both were polymaths, they had different perspectives: Leibniz approached the topic from a purely mathematical standpoint, seeking methods to determine the slope of tangent lines, while Newton focused on calculating the instantaneous velocity of a moving object. This work aims to present the development of differential calculus from both perspectives, ranging from its applications in analytic geometry to its relevance in kinematics. Furthermore, the formal concept of the derivative, its main rules, and applications are discussed, highlighting its importance as a tool for analyzing the motion of bodies.

**Keywords:** differential calculus; derivative; history of mathematics; kinematics.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Valores de $y$ para retas secantes próximas de 1 .....	17
Tabela 2- Velocidade média para intervalos de tempo cada vez menores .....	18

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Exemplos de grandezas variando no cotidiano .....	09
Figura 2- Zenão de Eléia (490a.c. – 430 a.c.) .....	13
Figura 3- Ponto de partida de Aquiles e a Tartaruga .....	14
Figura 4- Reta tangente ao círculo .....	15
Figura 5- Reta tangente a uma curva qualquer no ponto P .....	15
Figura 6- Aproximação a reta tangente a parábola $y = x^2$ .....	16
Figura 7- Torre CN .....	17
Figura 8- Aproximação da velocidade instantânea .....	19
Figura 9- Aproximação da reta tangente através de secantes sucessivas .....	20
Figura 10- Q está à direita de P .....	21
Figura 11- Variação na posição .....	22
Figura 12- Velocidade média .....	22
Figura 13- Taxa média .....	24
Figura 14- Gráfico da função constante .....	26
Figura 15- Gráfico da Função Horária em Relação ao Tempo .....	31

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

MRUV	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
SI	Sistema Internacional de Unidades
<i>m</i>	Metro
<i>s</i>	Segundos
<i>m/s</i>	Metro por segundo
<i>m/s<sup>2</sup></i>	Metro por segundo ao quadrado
IFMS	Instituto Federal de Mato Grosso do Sul

## SUMÁRIO

1. <b>INTRODUÇÃO</b> .....	9
2. <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	12
2.1. O PROBLEMA DA TANGENTE.....	14
2.2. O PROBLEMA DA VELOCIDADE.....	17
2.3. DERIVADAS E TAXAS DE VARIAÇÃO.....	19
2.4. REGRAS DE DERIVAÇÃO.....	24
3. <b>APLICAÇÕES NA CINEMÁTICA</b> .....	30
4. <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	36
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	38

## 1. INTRODUÇÃO

A matemática é, por excelência, uma ciência que busca compreender padrões, modelar fenômenos e descrever, com precisão, as variações que ocorrem no mundo ao nosso redor. Desde a antiguidade, a curiosidade humana em relação ao movimento de corpos, ao crescimento de populações, ao fluxo de líquidos ou mesmo à mudança de temperatura instigou o desenvolvimento de instrumentos conceituais capazes de quantificar e prever tais alterações. Um dos conceitos centrais surgidos desse anseio por compreender o mundo em transformação é o de derivada, parte essencial do cálculo diferencial.

**Figura 1 – Exemplos de grandezas variando no cotidiano**



**Fonte: Hélvio Romero/Estadão conteúdo (2013) Fonte: Filho e Toscano (2013)**

O cálculo diferencial tem suas raízes no século XVII, embora suas ideias preliminares já fossem conhecidas desde a Grécia Antiga com pensadores como Arquimedes e os paradoxos de Zenão. No entanto, foi com Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) que a teoria ganhou forma sistemática. Ambos, de maneira independente, desenvolveram o que hoje conhecemos por cálculo, ainda que com motivações distintas. Newton estava interessado em problemas da física, como a descrição do movimento de planetas e objetos em queda, utilizando o conceito de fluxões para tratar da velocidade e da aceleração instantâneas. Já Leibniz, com uma abordagem mais formal e simbólica, introduziu a notação moderna de diferenciação e definiu as regras do cálculo infinitesimal como as conhecemos atualmente. Segundo Boyer (1996), embora Newton e Leibniz tenham desenvolvido o cálculo de forma independente, o simbolismo introduzido por Leibniz foi mais influente no ensino moderno, especialmente por sua clareza e aplicabilidade em contextos algébricos e analíticos. Os trabalhos de ambos ainda que inovadores foram fortemente baseados em seus antecessores

como Boyer (1996, p. 287) exemplifica em uma escrita de Newton a Hooke “Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes.”

A derivada, nesse contexto, surge como uma ferramenta para expressar a taxa de variação instantânea de uma grandeza em relação a outra. Geometricamente, ela representa a inclinação da reta tangente à curva de uma função em um determinado ponto. Fisicamente, corresponde à velocidade de um corpo em um instante específico, ou ainda à rapidez com que uma quantidade se altera — seja no tempo, no espaço ou em outro parâmetro (Stewart, 2013).

Na natureza, as taxas de variação se manifestam em diversos fenômenos: o ritmo de crescimento de uma planta, a propagação de uma onda sísmica, a dissipação de calor em um metal, a aceleração de uma partícula ou mesmo a taxa de batimentos cardíacos em função do esforço físico. Em todos esses contextos, o uso da derivada permite não apenas descrever o comportamento de tais fenômenos, mas também prever suas tendências e otimizar processos.

No ensino da matemática, especialmente no nível médio, a compreensão do conceito de derivada costuma ser um desafio. Isso se deve, muitas vezes, à abordagem excessivamente formal e descontextualizada com que o tema é apresentado. Visando superar essa dificuldade, o presente trabalho propõe uma introdução ao conceito de derivada que parte de problemas motivadores, como o cálculo da reta tangente e da velocidade instantânea, explorando sua interpretação geométrica e física antes da formalização analítica. Tal abordagem visa tornar o conteúdo mais intuitivo, acessível e significativo para os alunos, contribuindo para uma aprendizagem mais sólida e conectada com o mundo real (Silva, 2021).

Neste estudo, inicialmente, são apresentados fundamentos históricos e conceituais da geometria analítica e da derivada, destacando os trabalhos de Descartes, Fermat, Newton e Leibniz. Em seguida, são desenvolvidos problemas clássicos que envolvem tangentes e velocidades, permitindo que o estudante compreenda a essência do cálculo diferencial como uma ferramenta para estudar variações. Por fim, são discutidas aplicações na cinemática, área da física que estuda o movimento dos corpos, evidenciando o papel central das derivadas na modelagem matemática de fenômenos naturais e tecnológicos.

A importância de uma abordagem conceitual e progressiva no ensino de derivadas é ainda mais destacada quando se considera a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que valoriza o uso da matemática para interpretar e resolver problemas do cotidiano e da natureza. Segundo as diretrizes da BNCC para o Ensino Médio, espera-se que o estudante compreenda e utilize noções de taxa de variação e interpretação gráfica de funções como parte essencial da formação científica (Brasil, 2018).

Dessa forma, este trabalho busca não apenas apresentar o conceito de derivada de maneira fundamentada e contextualizada, mas também colaborar com o desenvolvimento de práticas pedagógicas que favoreçam a compreensão e o uso consciente da matemática em situações reais. Essa abordagem interdisciplinar, que integra conhecimentos de matemática e física, atende às competências gerais da BNCC, especialmente:

- Competência 1: Valorizar e utilizar os conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo (BRASIL, 2018, p. 466);
- Competência 5: Utilizar tecnologias digitais de forma crítica, significativa e ética (BRASIL, 2018, p. 468);
- Competência 6: Relacionar conceitos científicos com situações cotidianas e fenômenos naturais.

A articulação entre o conceito abstrato de derivada e suas aplicações na cinemática exemplifica como a matemática pode ser utilizada como ferramenta para modelar e resolver problemas concretos, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de investigação científica e o pensamento crítico. Dessa forma, contribuímos para uma formação crítica, investigativa e interdisciplinar dos estudantes.

A organização deste trabalho está estruturada em quatro capítulos principais. No primeiro capítulo, apresenta-se esta introdução, que contextualiza historicamente e conceitualmente o tema. O segundo capítulo é dedicado à fundamentação teórica, abordando o problema da tangente, da velocidade, o conceito de derivada e as principais regras de derivação. No terceiro capítulo, são exploradas aplicações da derivada no contexto da cinemática, estabelecendo conexões entre os conceitos matemáticos e seus usos na física. Por fim, o quarto capítulo traz as considerações finais, destacando as contribuições do estudo e possíveis caminhos para futuras investigações no ensino de cálculo diferencial.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A geometria analítica consiste em um método de resolver problemas matemáticos estabelecendo correspondências biunívocas entre determinadas funções (sua representação algébrica) com suas representações geométricas (curvas no plano), como Eves fala:

Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação  $f(x, y) = 0$  e as propriedades geométricas da curva associada. Transfere-se assim, de maneira inteligente, a tarefa de provar um teorema em geometria para a de provar um teorema correspondente em álgebra e análise. (HOWARD EVES, 2011, p. 384).

Quanto à origem de tal método há divergências entre os historiadores sobre a quem devemos atribuir sua invenção, pois sistemas de coordenadas já eram utilizados por povos antigos, como egípcios, gregos e romanos, na confecção de mapas, agrimensura e até mesmo no famoso jogo de xadrez. Howard (2011) ainda afirma, contudo, pode-se confundir o assunto em si com um ou mais de seus aspectos e embora muitos tenham contribuído para o desenvolvimento da geometria analítica o fator determinante para este método é de fato a transferência de uma investigação geométrica para uma algébrica correspondente, sendo assim os trabalhos no século XVII foram decisivos por dois matemáticos franceses, René Descartes e Pierre de Fermat para o método tomar a forma que a conhecemos hoje.

René Descartes (1596 - 1650) foi um filósofo e matemático francês, notável pensador ocidental, mais conhecido por suas contribuições em filosofia também foi importante matemático embora tenha feito apenas uma publicação sobre matemática durante toda sua vida um dos três apêndices intitulado La Géométrie de seu livro “O discurso do método”. Com pouco mais de 100 páginas dividida em 3 partes, para Eves (2011) a primeira contém avanços significativos e contém os fundamentos da geometria descritiva, a segunda parte, entre outras coisas, a classificação de curvas e um método interessante de construir tangentes para essas curvas. A terceira parte trata da resolução de equações de grau maior que dois, a convenção do uso das primeiras letras do nosso alfabeto para indicar constantes e as últimas para indicar variáveis começou com Descartes, além da nossa atual notação para indicar potências e também a percepção de que uma letra poderia representar uma quantidade positiva ou negativa.

“Ao mesmo tempo em que descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, o assunto também ocupava a atenção de outro gênio matemático francês, Pierre de Fermat.” (EVES, 2011, p.389). Tendo vivido (1601 - 1665) e ao fazer seus estudos sobre funções em coordenadas no plano cartesiano notou que em diversas funções existem pontos de máximos e mínimos (chamados de pontos críticos da função) ao longo da curva, era de sua vontade saber

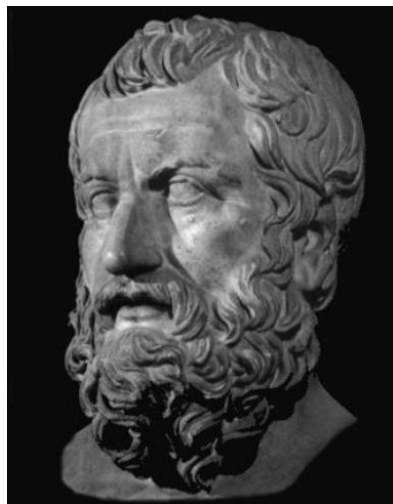
se um determinado ponto da função era crítico, mas sem a necessidade de esboçar seu gráfico e sim usando somente equações uma vez que era um estudioso da geometria analítica.

Um dos elementos mais importantes ao se definir a equação de uma reta é sua inclinação em relação ao eixo das abscissas, denominado (coeficiente angular), pois analisando o gráfico de funções nos pontos críticos ele notou que a reta tangente de uma função num dado ponto crítico é paralela ao eixo das abscissas e por consequência seu coeficiente angular é nulo. Sabendo disso, o matemático francês elaborou um método consistente e sistemático de determinar se um dado ponto é crítico em uma função qualquer: “Um ponto crítico de uma função é onde a sua reta tangente tem inclinação nula”.

A dificuldade para este método é que temos apenas um único ponto para determinar a reta tangente e é sabido que um único ponto se passe infinitas retas, assim temos o clássico problema da reta tangente que consiste em: determinar a reta tangente de um dado ponto, onde conhecemos somente o próprio ponto.

A ideia de infinitésimos remota os gregos antigos embora a século XVII seja decisivo para invenção do cálculo, sobretudo sobre os avanços matemáticos obtidos em sua primeira metade, suas bases remotas à Grécia antiga. O primeiro registro que se tem na Grécia sobre o conceito de infinitésimos foi no livro de Aristóteles acerca de Zenão de Eléia (450 a.c.).

**Figura 2 – Zenão de Eléia (490a.c. – 430 a.c.)**



**Fonte: IFMS**

Eves aponta ser razoável admitir que uma grandeza pode ser subdividida em partes menores indefinidamente, mas também existe a suposição de que uma grandeza pode ser dividida até que se chegue a sua parte indivisível, num primeiro momento as duas premissas

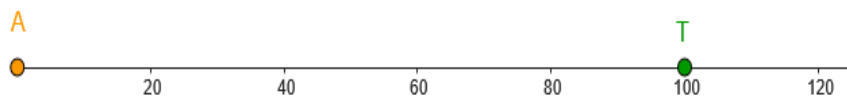
parecem ser válidas e os paradoxos de Zenão apontam para dificuldades lógicas para cada uma dessas premissas.

*A Dicotomia:* Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcança o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.

*A Flecha:* Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move. (EVES, 2011, p. 418).

Além destes paradoxos ainda se destaca o famoso paradoxo da corrida de Aquiles e a tartaruga, por ser mais veloz Aquiles permite que a tartaruga largue a sua frente, do seguinte modo:

**Figura 3 - Ponto de partida de Aquiles e a Tartaruga**



**Fonte: Silva (2025)**

Como podemos observar Aquiles parte da origem enquanto a tartaruga parte do ponto 100, supondo que a tartaruga possua velocidade de 1 m/s e Aquiles tenha velocidade de 20 m/s, teremos que quando Aquiles atingir a posição 100 a tartaruga já estará mais a frente pois está se deslocou também e quanto à origem de tal método há divergências entre os historiadores sobre a quem devemos atribuir sua invenção, pois sistemas de coordenadas já eram utilizados por povos antigos, como egípcios, gregos e romanos, na confecção de mapas, agrimensura e até mesmo no famoso jogo de xadrez.

Domingues e Howard afirmam, contudo, pode-se confundir o assunto em si com um ou mais de seus aspectos e embora muitos tenham contribuído para o desenvolvimento da geometria analítica o fator determinante para este método é de fato a transferência de uma investigação geométrica para uma algébrica correspondente, sendo assim os trabalhos no século XVII foram decisivos por dois matemáticos franceses, René Descartes e Pierre de Fermat para o método tomar a forma que a conhecemos hoje. Com esses conceitos desenvolvidos, estudaremos o conceito de derivada a partir de dois problemas aparentemente distintos, como afirmam Munem e Foulis:

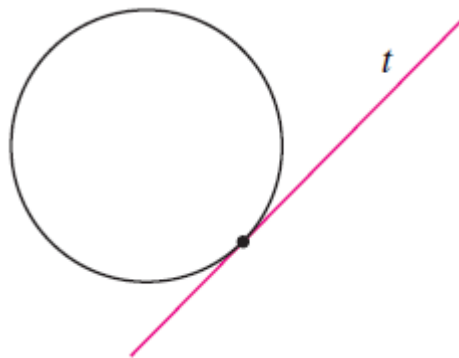
[...] usaremos o conceito de limite para resolvermos dois problemas aparentemente não relacionados; mais tarde, veremos que eles são na verdade o mesmo problema em discussão. O primeiro problema é o de acharmos a taxa de variação de uma quantidade variável – por exemplo a taxa de variação da distância no tempo (velocidade). O segundo problema é o de acharmos o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado. (MUNEM, FOULIS, 1982, p. 89).

## 2.1 O PROBLEMA DA TANGENTE

A palavra tangente do latim *tangens*, que significa “tocando”. Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. Como tornar precisa essa ideia?

Para um círculo, poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura 2.

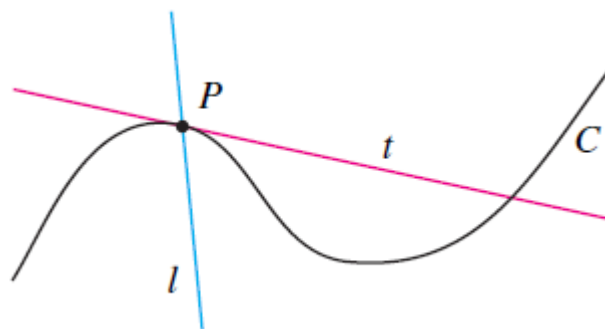
**Figura 4 – Reta tangente ao círculo**



**Fonte: Stewart (2013)**

Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. A Figura 3 mostra duas retas,  $l$  e  $t$ , passando através de um ponto  $P$  em uma curva  $C$ .

**Figura 5 – Reta tangente a uma curva qualquer no ponto  $P$**



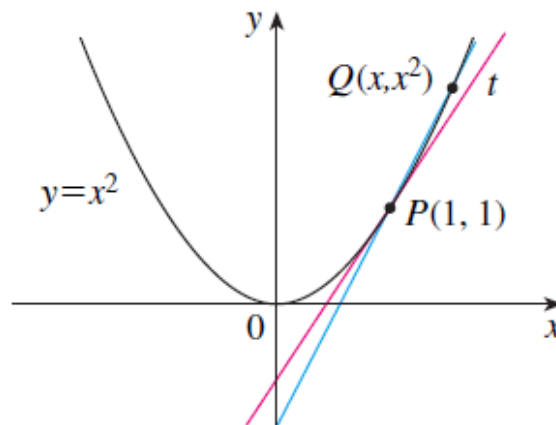
**Fonte: Stewart (2013)**

A reta  $l$  intersecta  $C$  somente uma vez, mas certamente não se parece com o que pensamos ser uma tangente. A reta  $t$ , por outro lado, parece ser uma tangente, mas intercepta  $C$  duas vezes. Para sermos objetivos, vamos examinar no exemplo a seguir o problema de encontrar uma reta  $t$  tangente à parábola  $y = x^2$ .

**Exemplo 1.** Encontre uma equação da reta tangente à parábola  $y = x^2$  no ponto  $P(1; 1)$ . (STWEART, 2013)

**Solução:** Podemos encontrar uma equação da reta tangente  $t$  assim que soubermos sua inclinação  $m$ . A dificuldade está no fato de conhecermos, somente o ponto  $P$ , em  $t$ , quando precisamos de dois pontos para calcular a inclinação. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de  $m$  escolhendo um ponto próximo  $Q(x; x^2)$  sobre a parábola (como na Figura 4) e calculando a inclinação  $m_{PQ}$  da reta secante  $PQ$ .

**Figura 6 – Aproximação a reta tangente a parábola  $y = x^2$**



**Fonte: Stewart (2013)**

Uma **reta secante**, do latim *secans*, significando corte, é uma linha que corta (intersecta) uma curva mais de uma vez. Escolhendo  $x \neq 1$  de forma que  $Q \neq P$ . Então

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Assim, por exemplo, para o ponto  $Q(1,5; 2,25)$ , temos que

$$m_{PQ} = \frac{2,25 - 1}{1,5 - 1} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$$

e a Tabela 1 mostra os valores de  $m_{PQ}$  para vários valores de  $x$  próximos a 1.

Tabela 1 – Valores de  $y$  para retas secantes próximas de 1

$x_-$	$m_{PQ}$	$x_+$	$m_{PQ}$
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,1	2,1	0,9	1,9
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999

Fonte: Stewart, 2013

Quanto mais próximo  $Q$  estiver de  $P$ , mais próximo de  $x$  estará de 1, e a tabela indica que  $m_{PQ}$  estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente  $t$  deve ser  $m = 2$ . Dizemos que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes.

## 2.2 O PROBLEMA DA VELOCIDADE

Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante. Podemos conjecturar, pela observação do velocímetro, que o carro tem uma velocidade definida em cada momento. Mas como definir essa velocidade “instantânea”? Vamos investigar o exemplo da bola caindo.

**Exemplo 2.** Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação do alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos. (STWEART, 2013)

**Figura 7 – Torre CN**



Fonte: Stewart (2013)

**Solução:** Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. Esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar. Se a distância percorrida após  $t$  segundos for chamada  $s(t)$  e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4,9t^2.$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ( $t = 5$ ), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de  $t = 5$  até  $t = 5,1$ :

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{variação da posição}}{\text{variação do tempo}}$$

$$\text{velocidade média} = \frac{s(5,1) - s(5)}{5,1 - 5,0}$$

$$\text{velocidade média} = \frac{4,9(5,1)^2 - 4,9(5)^2}{0,1} = 49,49 \text{ m/s}.$$

A Tabela 2 mostra os resultados de cálculos simulares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Tabela 2 – Velocidade média para intervalos de tempo cada vez menores

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

Fonte: Stewart, 2013.

Parece que, à medida que encurtamos o período do tempo, velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A velocidade instantânea quando  $t = 5$  é definida como valor

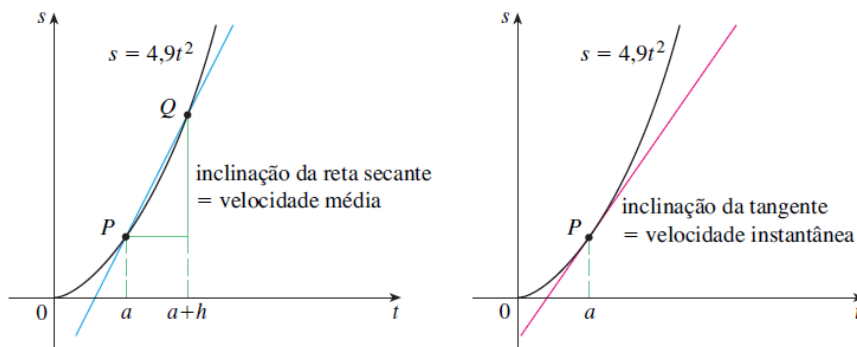
limite dessas velocidades medidas em períodos de tempo cada vez menores, começando em  $t = 5$ . Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é  $v = 49 \text{ m/s}$ .

Você deve ter percebido que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar as tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre o problema da tangente e o cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos  $P(a; 4,9a^2)$  e  $Q(a+h; 4,9(a+h)^2)$  sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante  $PQ$  será

$$m_{PQ} = \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{(a+h) - a},$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo  $[a, a+h]$ . Logo, a velocidade no instante  $t = a$  (o limite dessas velocidades médias quando  $h$  tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em  $P$  (o limite das inclinações das retas secantes).

**Figura 8 – Aproximação da velocidade instantânea**



**Fonte: Stewart (2013)**

Observe que os Exemplos 1 e 2 mostram que resolver problemas de velocidade e de tangente precisamos encontrar limites.

### 2.3 DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

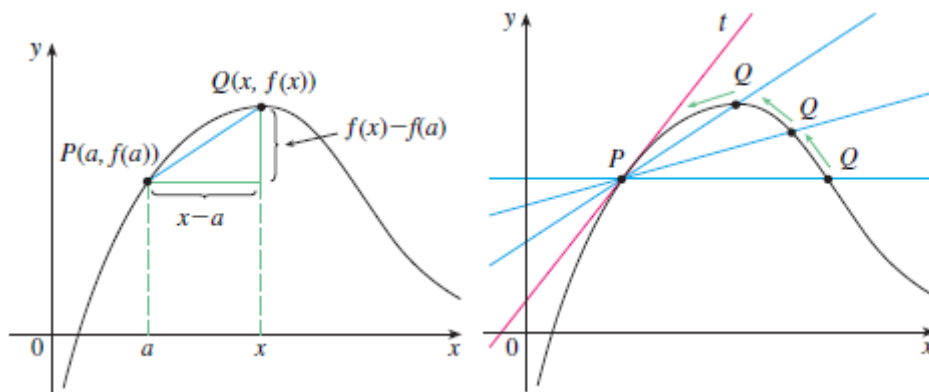
O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite, como vimos anteriormente. Este tipo especial de limite é chamado *derivada* e veremos que ele pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia.

Se uma curva  $C$  tiver uma equação  $y = f(x)$  e quisermos encontrar a reta tangente a  $C$  em um ponto  $P(a; f(a))$ , consideramos um ponto próximo  $Q(x; f(x))$ , onde  $x \neq a$ , e calculamos a inclinação da reta secante  $PQ$ :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Então fazemos  $Q$  aproximar-se de  $P$  ao longo da curva  $C$  ao obrigar  $x$  tender a  $a$ . Se  $m_{PQ}$  tender a um número  $m$ , então definimos a *tangente*  $t$  como a reta que passa por  $P$  e tem inclinação  $m$ . Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante  $PQ$  quando  $Q$  tende a  $P$ , como ilustra a Figura 6.

**Figura 9 – Aproximação da reta tangente através de secantes sucessivas**



**Fonte: Stewart (2013)**

A **reta tangente** à curva  $y = f(x)$  em um ponto  $P(a; f(a))$  é a reta passando por  $P$  com a inclinação

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que o limite exista.

No próximo exemplo, vamos confirmar uma conjectura que foi feita no Exemplo 1. Vamos lembrar que, a forma ponto-inclinação da equação da reta por um ponto  $(x_1; y_1)$  com uma inclinação  $m$  é dada por  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

**Exemplo 3.** Encontre uma equação da reta tangente à parábola  $y = x^2$  no ponto  $P(1; 1)$ .

**Solução:** Observe que  $a = 1$  e  $f(x) = x^2$ , logo a inclinação é dada por

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2.$$

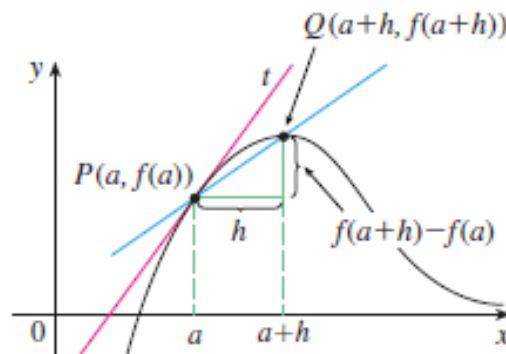
Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em  $(1; 1)$  é  $y - 1 = 2(x - 1)$  ou  $y = 2x - 1$ .

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto. A ideia por detrás disso é que, se dermos zoom (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta. Há outra expressão para a inclinação da reta tangente que é, as vezes, mais fácil de ser usada. Se  $h = x - a$ , então  $x = a + h$  e, assim, a inclinação da reta secante  $PQ$  é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Veja a Figura 7 onde o caso  $h > 0$  é ilustrado e  $Q$  está à direita de  $P$ . Se acontecesse que  $h < 0$ , entretanto,  $Q$  estaria à esquerda de  $P$ .

**Figura 10 –  $Q$  está à direita de  $P$**



**Fonte: Stewart (2013)**

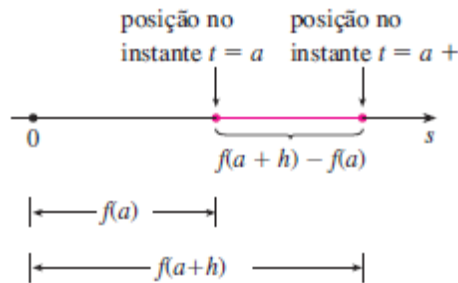
Observe que quando  $x$  tende a  $a$ ,  $h$  tende a 0 (pois  $h = x - a$ ); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente fica

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

No Exemplo 2, estudamos o movimento de uma bola abandonada de cima da Torre CN e sua velocidade foi definida como o valor-limite das velocidades médias em períodos cada vez menores. Em geral, suponha que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação  $s = f(t)$ , na qual  $s$  é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante  $t$ . A função  $f$  que

descreve o movimento é chamada **função de posição** do objeto. No intervalo de tempo entre  $t = a$  e  $t = a + h$ , a variação na posição será de  $f(a + h) - f(a)$ . (Veja a Figura 8).

**Figura 11 – Variação na posição**



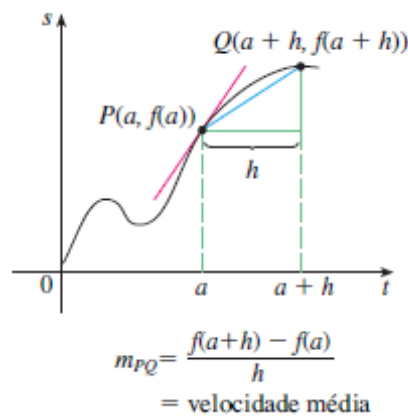
**Fonte: Stewart (2013)**

A velocidade média nesse intervalo é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

que é o mesmo que a inclinação da reta secante  $PQ$  na Figura 9.

**Figura 12 – Velocidade média**



**Fonte: Stewart (2013)**

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores  $[a, a + h]$ . Em outras palavras, fazemos  $h$  tender a 0. Como no Exemplo 2, da queda da bola, definimos **velocidade** (ou **velocidade instantânea**)  $v(a)$  no instante  $t = a$  como o limite dessas velocidades médias:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Isso significa que a velocidade  $v$  no instante  $t = a$  é igual à inclinação da reta tangente  $m$  em  $P(a; f(a))$ .

**Exemplo 4.** Suponha que a bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.

- (a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?  
 (b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

**Solução:** Precisamos encontrar a velocidade tanto quando  $t = 5$  quanto quando a bola atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral  $t = a$ . Usando a equação de movimento  $s = f(t) = 4,9t^2$ , temos

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a^2 + ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4,9(2a + h) = 9,8a \end{aligned}$$

- (a) A velocidade após 5 segundos é dada por  $v(5) = (9,8)(5) = 49 \text{ m/s}$ .  
 (b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em  $t$ , quando  $s(t) = 450$ , isso é,

$$4,9t^2 = 450 \Rightarrow t^2 = \frac{450}{4,9} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 9,6 \text{ s.}$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(9,6) = (9,8)(9,6) \approx 94 \text{ m/s.}$$

Suponha que  $y$  seja uma quantidade que depende de outra quantidade  $x$ . Assim,  $y$  é uma função de  $x$  e escrevemos  $y = f(x)$ . Se  $x_1$  a  $x_2$ , então a variação em  $x$  (também chamada incremento de  $x$ ) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em  $y$  será

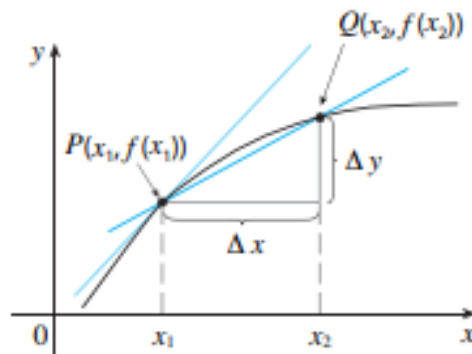
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

é denominado taxa média de variação de  $y$  em relação a  $x$  no intervalo  $[x_1, x_2]$  e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante  $PQ$  na Figura 10.

**Figura 13 – Taxa média**



**Fonte: Stewart (2013)**

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo  $x_2$  tender a  $x_1$  e, portanto, fazendo  $\Delta x$  tender a 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado taxa (instantânea) de variação de  $y$  em relação a  $x$  em  $x = x_1$ , que é interpretada com a inclinação da tangente à curva  $y = f(x)$  em  $P(x_1, f(x_1))$ :

$$\text{Taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

onde reconhecemos este limite como a derivada  $f'(x_1)$ .

Sabemos que uma das interpretações da derivada  $f'(a)$  é a inclinação da reta tangente à curva  $y = f(x)$  quando  $x = a$ . Agora temos uma segunda interpretação: A derivada  $f'(a)$  é a taxa instantânea de variação de  $y = f(x)$  em relação a  $x$  quando  $x = a$ .

A conexão com a primeira interpretação é que, se esboçamos a curva  $y = f(x)$ , então a taxa instantânea de variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde  $x = a$ . Isso significa que quando a derivada for grande e, portanto, a curva for íngreme, os valores de

$y$  mudarão rapidamente. Quando a derivada for pequena, a curva será relativamente achatada e os valores de  $y$  mudarão lentamente.

Em particular, se  $s = f(t)$  for a função de posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então  $f'(a)$  será a taxa de variação do deslocamento  $s$  em relação ao tempo  $t$ . Em outras palavras,  $f'(a)$  é a velocidade da partícula no instante  $t = a$ . A velocidade escalar da partícula é o valor absoluto da velocidade, isto é,  $|f'(a)|$ .

Vimos anteriormente que a derivada de uma função  $f$  em um número fixo  $a$  é dada por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A partir de agora, adotaremos uma nova perspectiva: em vez de considerarmos  $a$  como um valor fixo, permitiremos que ele varie. Substituindo  $a$  pela variável  $x$ , obtemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

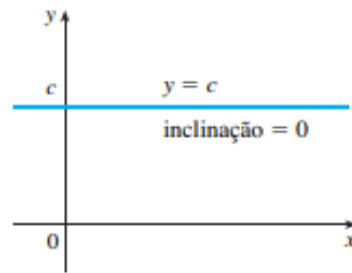
Dado qualquer número  $x$  para o qual esse limite exista, atribuímos a  $x$  o número  $f'(x)$ . Assim, podemos considerar  $f'$  como uma nova função, chamada derivada de  $f$  e definida pela expressão anterior. Sabemos que o valor de  $f'$  em  $x$ ,  $f'(x)$ , pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x; f(x))$ . A função  $f'$  é denominada derivada de  $f$ , pois foi 'derivada' a partir de  $f$  pela operação limite.

## 2.4 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Vimos anteriormente que a derivada de uma função em um número fixo é obtida por meio de um limite. No entanto, utilizar essa definição em todos os casos pode ser um processo excessivamente trabalhoso e repetitivo e serão apresentadas regras gerais para facilitar o trabalho como Munem e Foulis afirmam:

O cálculo direto das derivadas desta maneira pode ser cansativo, mesmo para as funções relativamente simples que temos considerado. Socorro para este cansaço está por chegar-existem regras gerais para diferenciação que permitem cálculos corretos de tais derivadas. (MUNEM, FOULIS, 2011, p. 144).

Vamos iniciar com a função mais simples: a função constante,  $f(x) = c$ . O gráfico dessa função é uma reta horizontal  $y = c$ , cuja inclinação é zero; logo, devemos ter  $f'(x) = 0$  (veja a Figura 11).

**Figura 14 – Gráfico da função constante****Fonte: Stewart (2013)**

A demonstração formal a partir da definição de uma derivada é simples:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Agora, vamos analisar a função  $f(x) = ax + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes reais. Trata-se de uma função afim, cujo gráfico é uma reta com inclinação igual ao coeficiente  $a$  e intercepto no eixo  $y$  igual a  $b$ . A demonstração formal, com base na definição de derivada, também é simples no caso da função afim  $f(x) = ax + b$ . Aplicando a definição, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a. \end{aligned}$$

Observe que, no caso particular em que o coeficiente  $a = 1$  e a constante  $b = 0$ , a função afim se reduz à função identidade, ou seja,  $f(x) = x$ . Nesse caso, a derivada de  $f$  em qualquer ponto  $x$  é igual a 1, pois a inclinação da reta é constante e igual ao valor de  $a$ , ou seja,  $f'(x) = 1$ .

Outro caso interessante é o da função  $f(x) = x^n$ , onde  $n$  é um número inteiro positivo. Observe que para o caso  $n = 1$ , temos a função identidade  $f(x) = x$  e sua derivada é constante e igual a 1. Vamos utilizar o seguinte resultado algébrico para demonstrar a derivada da função  $f(x) = x^n$ :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

Essa identidade pode ser facilmente verificada por meio da multiplicação dos fatores do lado direito da igualdade. Ela será útil para reescrever a razão de diferença na definição da derivada e facilitar o processo de obtenção do limite. Se  $f(x) = x^n$ , podemos utilizar a definição de derivada para calcular  $f'(a)$ . Aplicando essa definição, temos:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Usando a identidade algébrica para  $x^n - a^n$ , podemos reescrever o numerador e, com isso, temos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a}.$$

Cancelando o fator  $(x - a)$  no numerador e no denominador, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \end{aligned}$$

Como agora a expressão não apresenta mais indeterminação, basta substituir  $x$  por  $a$ :

$$\begin{aligned} f'(a) &= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1} \\ f'(a) &= na^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função  $f(x) = x^n$  é dada por  $f'(a) = na^{n-1}$ . Na verdade, a regra da potência é verdadeira para todo número real  $n$ . Desta forma temos, a regra da potência (versão geral): Se  $n$  for um número real qualquer, então  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

Quando as novas funções são formadas a partir de antigas por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das antigas funções. Em particular, a fórmula a seguir nos diz que a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.

Se  $c$  for constante e  $f$ , uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{d}{dx} f(x)$$

Seja  $g(x) = cf(x)$ . Então

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \end{aligned}$$

$$= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= cf'(x).$$

A regra a seguir nos diz que a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas de suas funções. Observação: como vamos trabalhar com mais de uma derivada na mesma expressão, para facilitar a notação por vezes substituiremos a notação

$$\frac{d}{dx} = f'(x) \text{ por } f'(x).$$

Se  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x).$$

Seja  $F(x) = f(x) + g(x)$ . E aplicando na definição de derivada

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \end{aligned}$$

E pela propriedade da soma dos limites

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Escrevendo  $f - g$  como  $f + (-1)g$  e aplicando a Regra da Soma e a Regra por constante, obtemos a seguinte fórmula. Se  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x).$$

As fórmulas desta seção nos permitem derivar novas funções formadas a partir das antigas funções por multiplicação ou divisão. Se  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x) \frac{d}{dx}[g(x)] + [f(x)]g(x) \frac{d}{dx}.$$

Seja  $F(x) = f(x) \cdot g(x)$  e aplicando na definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x+h) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}. \end{aligned}$$

E pela propriedade da soma e produto dos limites, temos que

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Em outras palavras, a Regra do Produto diz que a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função. Se  $f$  e  $g$  forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Seja  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , então  $F(x) \cdot g(x) = f(x)$ . Derivando ambos os lados e aplicando a regra do produto, temos que

$$F'(x).g(x) + F(x).g'(x) = f'(x)$$

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x).g'(x)}{g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}.g'(x)}{g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)}}{g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Em palavras, a Regra do Quociente diz que a derivada de um quociente é o denominador vezes, a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador. A regra do quociente e as outras fórmulas de derivação nos permitem calcular a derivada de qualquer função racional.

### 3. APLICAÇÕES NA CINEMÁTICA

Como vimos, anteriormente o desenvolvimento do conceito de derivada tiveram contribuições de vários autores ao longo do tempo, porém os expoentes para o desenvolvimento do conceito do conceito e derivada, e do cálculo diferencial e infinitesimal como um todo, foi de Newton e Leibniz, ainda que contemporâneos um do outro, trabalharam de forma independente. O trabalho de Leibniz foi mais voltado a matemática pura, associado ao clássico problema da tangente, mas a motivação de Newton foi a mecânica e o interesse em não a velocidade média de um corpo em um determinado intervalo e sim com que “rapidez” um móvel se move em um instante em particular.

De acordo com Halliday (2016), a velocidade escalar média de um corpo é definida como o quociente entre a variação do espaço percorrido  $\Delta s$  e o intervalo de tempo gasto  $\Delta t$ :

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Dizemos que o movimento é uniforme quando a velocidade de um corpo permanece constante durante todo o intervalo de tempo considerado. Nesse caso particular, o valor da velocidade em qualquer instante de tempo é trivialmente o mesmo:

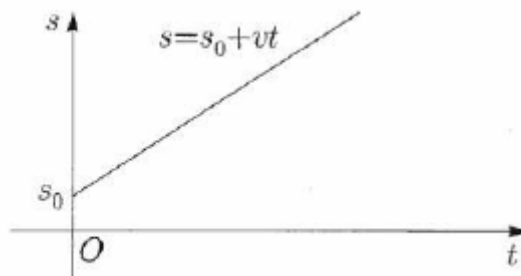
$$V = \frac{S - S_o}{t - t_o}.$$

Considerando  $t_o = 0$ , temos que

$$S(t) = S_o + V \cdot t.$$

Esta é a clássica equação horária da posição em função do tempo.

**Figura 15 – Gráfico da Função Horária em Relação ao Tempo**



**Fonte: Ávila (2006)**

Ainda que simples, esse tipo de movimento pode fornecer informações importantes. A função horária da posição, nesse caso, tem a forma de uma função afim, cujo coeficiente angular

— ou taxa de variação da posição em relação ao tempo — é a própria velocidade. Em outras palavras, a derivada da função posição em relação ao tempo é a velocidade, ou seja:

$$s(t)' = V.$$

Contudo, movimentos com velocidade constante são extremamente raros na realidade. O mais comum é que os corpos apresentem inúmeras variações de velocidade ao longo de seu trajeto. Ao conduzir um carro em uma cidade, por exemplo, é necessário reduzir a velocidade, parar em certos momentos e acelerar quando conveniente — várias vezes ao longo do percurso.

Segundo Halliday (2016), ao estudarmos o movimento de um corpo, calcular apenas sua velocidade média fornece pouca informação, uma vez que essa velocidade pode variar repetidamente durante o trajeto. Por esse motivo, é necessário considerar o conceito de aceleração média, definido como o quociente entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo em que essa variação ocorre, ou seja:

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

A partir da própria definição podemos facilmente encontrar a dita equação horária da velocidade:

$$a_m = \frac{V - V_o}{t - t_o}$$

Considerando  $t_o = 0$ , temos que

$$V - V_o = a_m \cdot t,$$

onde obtemos a equação horária da velocidade:

$$V(t) = V_o + a \cdot t.$$

Ao aplicarmos a derivada, temos que  $V'(t) = a$ . É fácil observar, não só por se tratar de uma função linear, mas também geometricamente, que a derivada da velocidade corresponde à aceleração. Sabendo que a velocidade média pode ser calculada como a média aritmética entre a velocidade inicial  $V_o$  e a velocidade em um instante posterior  $V$ , podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$V_m = \frac{V_o + V}{2}.$$

E aplicando a função horária da velocidade, obtemos que

$$V_m = \frac{V_o + (V_o + a \cdot t)}{2}$$

e, com isso, temos que

$$V_m = V_o + \frac{a \cdot t}{2}.$$

E substituindo a definição de velocidade média, temos que

$$\frac{S - S_o}{t - 0} = V_o + \frac{a \cdot t}{2}.$$

Desta forma, obtemos a equação horária completa:

$$S(t) = S_o + V_o t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Um caso particular e tradicionalmente usado para facilitar o entendimento é o do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) que considera a aceleração constante em todo o intervalo de tempo considerado, ou seja, a velocidade varia na mesma medida.

**Exemplo 05.** Um foguete sobe na vertical segundo a lei horária  $s = 12t^2 \text{ m}$ , onde  $t$  é expresso em segundos. Calcule a altura do foguete quando atingir a velocidade do som ( $330 \text{ m/s}$ ) e o tempo necessário para que isso ocorra.

**Solução:** Para sabermos a função da velocidade, basta calcularmos a derivada da função posição em relação ao tempo. Assim, temos que

$$S(t) = 12t^2$$

$$S'(t) = 24t$$

Como desejamos saber o instante em que a velocidade do foguete é  $330 \text{ m/s}$ , igualamos esse valor à equação encontrada:

$$24t = 330$$

$$t = \frac{330}{24} = 13,75 \text{ s.}$$

Agora que sabemos o momento em que o foguete atinge essa velocidade, basta determinar em qual posição ele estará.

$$S(t) = 12t^2$$

$$S(13,75) = 12 \cdot (13,75)^2$$

$$S(13,75) = 12 \cdot (13,75)^2$$

$$S(13,75) = 12 \cdot (13,75)^2$$

$$S(13,75) = 2268,75 \text{ m}$$

**Exemplo 06.** O movimento de um elétron está sendo dado pela função  $S(t) = 10 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{5}t^3$  com  $s$  e  $t$  estão em unidades do SI, determine:

- A velocidade média entre 0 s e 5 s
- A função da velocidade do móvel
- A aceleração média entre 0 s e 5 s
- A máxima posição positiva que o móvel atinge
- A função da aceleração do móvel
- A máxima velocidade positiva atingida pelo móvel

**Solução a)** Como nos é pedido a velocidade média utilizamos a definição

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

Primeiramente calculemos as posições para cada um dos instantes 0 s e 5 s.

$$S(0) = 10 + 2(0) + \frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{5}(0)^3$$

$$S(0) = 10 \text{ m}$$

e

$$S(5) = 10 + 2(5) + \frac{1}{2}(5)^2 - \frac{1}{5}(5)^3$$

$$S(5) = 7,5 \text{ m}$$

Aplicando as posições na definição

$$V_m = \frac{7,5 - 10}{5 - 0}$$

$$V_m = -0,5 \text{ m/s}$$

**Solução b)** para sabermos a função da velocidade, basta calcularmos a derivada da função posição em relação ao tempo.

$$S(t) = 10 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{5}t^3$$

$$S'(t) = v(t) = 2 + t - \frac{3}{5}t^2$$

**Solução c)** a média da aceleração nos é dado de maneira análoga a velocidade, ou seja. O quociente da variação entre a variação de velocidade  $\Delta v$  pelo intervalo de tempo gasto  $\Delta t$ . Desse modo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{t - t_o}$$

De maneira similar ao item a) calculemos as velocidades nos instantes 0 s e 5 s.

$$v(0) = 2 + 0 - \frac{3}{5}0^2$$

$$v(0) = 2 \text{ m/s}$$

e

$$v(5) = 2 + 5 - \frac{3}{5}5^2$$

$$v(5) = -8 \text{ m/s}$$

Aplicando as velocidades na definição

$$a_m = \frac{-8 - 2}{5 - 0}$$

$$a_m = -2 \text{ m/s}^2$$

**Solução d)** utilizando a técnica de pontos críticos que motivou o estudo de retas tangentes, onde um ponto crítico (seja de máximo ou mínimo) é onde sua reta tangente tem inclinação nula ficamos com:

$$S'(t) = v(t) = 2 + t - \frac{3}{5}t^2$$

$$2 + t - \frac{3}{5}t^2 = 0$$

Resolvendo a equação polinomial do segundo grau temos encontramos o tempo:  $t_1 \cong 2,8 \text{ s}$  e fazendo  $s(2,8) \cong 15,2 \text{ m}$ .

**Solução e)** de maneira análoga ao item b) a taxa de variação da velocidade é a aceleração desta forma basta calcularmos a derivada da função velocidade.

$$v(t) = 2 + t - \frac{3}{5}t^2$$

$$v'(t) = a(t) = 1 - \frac{6}{5}t$$

**Solução f)** novamente calculando o ponto crítico através da velocidade

$$a(t) = 1 - \frac{6}{5}t$$

$$1 - \frac{6}{5}t = 0$$

$$t \cong 0,83 \text{ s}$$

Aplicando o tempo na função velocidade temos como resultado  $v = 2,42 \text{ m/s}$ .

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem interdisciplinar desenvolvida neste trabalho, que integra sistematicamente conceitos matemáticos de derivadas com aplicações físicas na cinemática, encontra sólido respaldo nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio. Conforme estabelecido no documento oficial, a matemática deve ser compreendida como "linguagem de interpretação e modelagem da realidade, instrumento para a compreensão do mundo e formação de cidadãos críticos" (BRASIL, 2018, p. 545). Essa convergência teórico-prática permite contextualizar conceitos abstratos como taxas de variação e limites, desenvolvendo nos estudantes a competência de modelagem matemática de fenômenos físicos. Especificamente, a articulação entre cálculo diferencial e movimento atende à habilidade EM13MAT305 da BNCC, que preconiza "analisar e interpretar representações de funções para resolver problemas de cinemática".

A experiência didática demonstra que os educandos assimilam mais efetivamente o conceito de derivada quando este é apresentado em conexão com problemas físicos de movimento. A interpretação geométrica da inclinação da reta tangente ganha significado concreto quando associada à velocidade instantânea, enquanto a relação hierárquica entre posição, velocidade e aceleração ilustra de maneira orgânica o processo de derivação sucessiva. Experimentos simples de movimento, como a análise da queda livre ou do movimento de projéteis, permitem validar empiricamente os modelos matemáticos, transformando abstrações em ferramentas úteis para compreensão do mundo físico.

O desenvolvimento histórico do cálculo diferencial no século XVII, impulsionado por figuras como Newton e Leibniz, representa um marco fundamental no avanço do conhecimento humano. A elegância formal das regras de derivação e a eficiência operacional das técnicas de diferenciação, exemplificadas nos problemas resolvidos neste trabalho mesmo sem recursos gráficos, evidenciam o poder dessa ferramenta matemática. Tradicionalmente, os livros didáticos utilizam como motivação tanto o problema geométrico da tangente quanto o problema físico da velocidade instantânea - abordagem que possui não apenas valor histórico, mas também riqueza didática, pois permite compreender as diferentes perspectivas que convergiram para a formalização do cálculo.

Esta integração entre teoria matemática e aplicações físicas não apenas facilita a compreensão conceitual, mas também desenvolve nos estudantes capacidades essenciais como pensamento crítico, análise científica e resolução de problemas complexos. Ao relacionar o formalismo das derivadas com fenômenos mensuráveis do cotidiano, promovemos uma formação integral que prepara os educandos para os desafios do século XXI, formando cidadãos capazes de utilizar o conhecimento matemático como ferramenta de interpretação e intervenção na realidade.

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo 1: Funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em:  
[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf).  
Acesso em: 30 jun. 2025

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos da Física: Volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MUNEM, Mustafa A., FOULIS David J. **Cálculo: Volume 1**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

SILVA, Carlos Eduardo. **Ensino de Cálculo no Ensino Médio: uma proposta baseada em problemas e visualização gráfica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São João del-Rei, 2021.

STEWART, James. **Cálculo: Volume 1**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

MARUN, Denis. **g1 O portal de notícias**. 2018. Disponível em:  
<https://g1.globo.com/carros/blog/denis-marum/post/2018/07/10/a-estrada-mostra-muitos-problemas-no-seu-carro-conheca-sintomas.ghtml> Acesso em: 30 jun. 2025

FILHO, Aurelio Gonçalves; TOSCANO; Carlos. **Física: Interação e Tecnologia Volume 1**. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

IFMS. **EAD IFMS**. 2023. Disponível em:  
<https://ead.ifms.edu.br/mod/page/view.php?id=843081> Acesso em: 30 jun. 2025