INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS – IFAL

CAMPUS ARAPIRACA

ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JANE DE BRITO IZIDORO

UTILIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ESTUDO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA ASSOCIADA À SOMA DE GAUSS

ARAPIRACA – AL

2022

JANE DE BRITO IZIDORO

UTILIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ESTUDO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA ASSOCIADA À SOMA DE GAUSS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Alagoas – IFAL, *Campus* Arapiraca, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Professor Me. José Roberto Almeida Lima.

ARAPIRACA – AL

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
***Campus* Arapiraca**

I98u

Izidoro, Jane de Brito.
Utilização de sequências didáticas no estudo de progressão aritmética associada à soma de Gauss / Jane de Brito Izidoro. – 2022.
1 PDF: il., color. (1 aquivo : 1 MB).

Arquivo digital no formato PDF do trabalho acadêmico com 47 folhas.

Orientação: Prof. Me. José Roberto de Almeida Lima.
Trabalho de Conclusão de Curso (especialização, Pós-graduação em Ensino das Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2022.

1. Progressões aritméticas. 2. Soma de Gauss. 3. Sequência didática. 4. Números naturais. I. Título.

CDD: 510

Luciete B. da Silva
Bibliotecária – CRB-4/1739

JANE DE BRITO IZIDORO

UTILIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ESTUDO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA ASSOCIADA À SOMA DE GAUSS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Alagoas – IFAL, *Campus* Arapiraca, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Ensino de Ciências e Matemática.

Data de Aprovação: 28/03/2022

Banca Examinadora

José Roberto de Almeida Lima

Prof. Me. José Roberto Almeida Lima

Instituto Federal de Alagoas -IFAL

Campus Arapiraca

Orientador

Adriano Valeriano da Silva

Prof. Me. Adriano Valeriano da Silva

Instituto Federal de Alagoas - IFAL

Campus Arapiraca

Examinador

Diogo

Prof. Me. Diogo Meurer de Souza Castro

Instituto Federal de Alagoas - IFAL

Campus Maceió

Examinador

A meus pais, Antonio e Antonia, por todo amor, dedicação, apoio, incentivo e até pelos "puxões" de orelha que, de uma maneira ou de outra me fizeram chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, Nosso Pai e Criador, por ter me concedido a graça de viver e apreciar todas as Suas Maravilhas, e hoje poder agradecer por todas as bênçãos que Me dá todos os dias de minha existência.

Agradeço aos meus pais e à minha irmã por todo o incentivo e apoio.

Por fim, agradeço a todos aqueles que contribuíram direta, ou indiretamente, para que pudesse chegar até aqui, principalmente aos professores que conheci ao longo de minha vida pessoal e profissional, nos quais me espelhei.

Muito Obrigada!

A persistência é o caminho do êxito.

Charles Chaplin

RESUMO

Este trabalho visa mostrar o que é uma sequência didática usando o ensino de progressões aritméticas como uma forma de apontar como fazer uma sequência didática, aplicando Soma de Gauss a situações simples do cotidiano. Inicialmente se abordará a Soma de Gauss, em seguida progressões aritméticas, mostrando como se pode estudar as progressões utilizando a Soma de Gauss. Posteriormente, serão apontadas algumas aplicações da Soma de Gauss ao cotidiano e os conceitos utilizados no trabalho para a compreensão do mesmo. Posteriormente, serão trazidos exemplos de sequências didáticas e será discutido o modelo de sequência elaborado. Por fim se trará uma sequência didática para o estudo das progressões aritméticas a qual abordará algumas noções de progressões aritméticas e suas propriedades, analisando a origem dessa Soma e a história de Gauss, para que, desse modo cheguemos à dedução da fórmula da soma de n números naturais. E a partir daí estudarmos os conceitos necessários para o estudo e compreensão da Soma de Gauss e seu uso em progressões aritméticas, conteúdos tais como os Axiomas de Peano e Números Triangulares, tudo isso sempre retornando à forma como o pequeno Gauss resolveu o problema que lhe foi proposto. Chegando, dessa forma às considerações finais onde serão revistos e reafirmados os conceitos utilizados no decorrer do trabalho avaliando a efetividade do mesmo.

Palavras-chave: Progressões Aritméticas; Números Naturais; Sequência Didática; Soma de Gauss.

ABSTRACT

This work aims to show what a didactic sequence is using the teaching of arithmetic progressions as a way of pointing out how to make a didactic sequence, applying Gauss Sum to simple everyday situations. Initially, the Gauss Sum will be approached, then arithmetic progressions, showing how you can study the progressions using the Gauss Sum. Subsequently, some applications of Gauss Sum to everyday life and the concepts used in the work to understand it will be pointed out. Subsequently, examples of didactic sequences will be presented and the elaborated sequence model will be discussed. Finally, there will be a didactic sequence for the study of arithmetic progressions which will address some notions of arithmetic progressions and their properties, analyzing the origin of this sum and the history of Gauss, so that, in this way, we arrive at the deduction of the formula of the sum of numbers natural. And from there, we study the concepts necessary for the study and understanding of Gauss's Sum and its use in arithmetic progressions, contents such as Peano's Axioms and Triangular Numbers, all this always returning to the way little Gauss solved the problem that it was proposed. Coming, in this way, to the final considerations where the concepts used in the course of the work will be reviewed and reaffirmed, evaluating its effectiveness.

Keywords: Arithmetic Progressions; Natural Numbers; Following teaching; Gauss sum.

Lista de Figuras

Sumário

1. Introdução

Sabe-se que a técnicas de ensino escolar vem mudando bastante, já não se pode prender-se apenas ao método tradicional no qual o professor escreve e fala e os alunos apenas copiam e concordam cegamente. Conseguir manter os alunos interessados na aula e, principalmente, fazer com que eles aprendam tem se tornado cada dia mais difícil, sobretudo em meio a tanta inovação tecnológica emergente. O ensino tradicional se tornou obsoleto, ultrapassado e isso causa uma diminuição da aprendizagem. Por isso tem se buscado muito novas técnicas de ensino, novas metodologias e práticas pedagógicas, as quais possam auxiliar o professor em seu trabalho, de forma a facilitar suas tarefas educacionais, e que também e, especialmente, ajudem os alunos a aprender de forma mais rápida e eficaz. Uma prática de ensino que é bastante procurada é a utilização de sequências didáticas para facilitar o caminho da aprendizagem.

> *A sequência didática nada mais é que um conjunto de atividades amarrados ao conteúdo. Que busca favorecer a aprendizagem dos alunos, sempre com o foco nos objetivos já estipulados em seu planejamento. Isso visa à importância do planejar para que o professor consiga organizar-se e orientar–se em relação aos discentes. (GUEDES, 2019)*

Desse modo, é possível afirmar que a elaboração de uma sequência didática deve ser feita estabelecendo objetivos bem definidos que levem em consideração o conhecimento prévio dos alunos, o conteúdo a ser ensinado, o que o professor anseia que seus alunos consigam aprender ao final da execução da sequência, enfim, diversos fatores devem ser analisados. Entretanto não há uma receita ou fórmula pronta para elaborar uma sequência didática, cada caso específico e cada situação de aprendizagem exige uma sequência didática elaborada especificamente para si, isto é,

> *Primeiramente, muita gente fica presa à formatação, perguntando **como fazer uma sequência didática** e acaba se importando mais com a forma do que com o conteúdo. A forma é importante, mas não há um padrão estabelecido pela ABNT como existem nos trabalhos acadêmicos. Separar as atividades em uma organização lógica só tem como objetivo deixar claro ao professor, ou seja, para você que está fazendo a sequência didática, a organização das atividades para promover a aprendizagem dos alunos. (GUEDES, 2019)*

Dessa forma, é correto dizer que o modelo de sequência é importante, pois uma sequência bem organizada vai facilitar a compreensão do educador em cada etapa a ser cumprida, porém a formatação não é o mais importante, os objetivos didáticos devem ser colocados como prioridade. Assim, a sequência didática deve ser planejada de forma a suprir as dificuldades de aprendizagem dos alunos e auxiliar o trabalho do professor, por isso é necessário que o professor já conheça os alunos aos quais a sequência será direcionada, para que a sequência seja adaptada às suas necessidades para ultrapassar as barreiras e dificuldades de aprendizagem, de forma que os alunos tenham uma aprendizagem satisfatória de forma mais simples e rápida.

Neste trabalho há a busca em entender a importância da utilização de sequência didática no ensino de Matemática no ensino fundamental através da elaboração e aplicação de uma sequência didática, da coleta e análise de dados antes e depois da utilização da sequência didática e de análise teórica do uso de sequências didáticas no ensino de Progressão Aritmética.

Foi escolhido o tema Utilização de Sequências Didáticas no Estudo de Progressão Aritmética associada à Soma de Gauss devido à importância deste conteúdo dentro e fora do ambiente escolar, a forma como é abordado em sala e sua aplicabilidade no cotidiano. Almeja-se evidenciar que as Progressões Aritméticas (P.A.) estão presentes em situações corriqueiras e, também, que a Soma de Gauss pode nos ajudar na resolução dessas situações.

Houve pesquisa em meio eletrônico, tendo como base diversos sites de conteúdo matemático e de conhecimentos gerais, também foram realizadas pesquisas em livros didáticos do ensino médio e superior para aprofundar o conhecimento sobre Progressões Aritméticas. No que condiz as características desta pesquisa, pode-se afirmar que esta terá uma abordagem qualitativa na qual se buscará analisar a importância do planejamento e utilização de uma sequência didática no ensino de P.A. através de uma pesquisa básica de caráter exploratório com o intuito de compreender a importância do uso de sequência didática no ensino de P.A. Em relação aos procedimentos utilizados, esta pesquisa caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica na qual serão analisados textos impressos e virtuais sobre o tema estudado, além de análise de documentários acerca do uso de sequências didáticas no ensino de matemática, especificamente, de Progressões Aritméticas.

Para firmar as hipóteses, buscou-se trabalhar com alguns autores notáveis no estudo de sequências didáticas que buscam técnicas e práticas pedagógicas que facilitem o trabalho do educador para alcançar uma aprendizagem significativa.

Aqui será exposto de maneira resumida os objetivos que se desejam alcançar durante a elaboração deste trabalho.

Objetivo Geral

- Conhecer, estudar e compreender a Soma de Gauss, analisando os aspectos históricos deste conteúdo, observando a origem da fórmula e sua aplicação ao conteúdo de

Progressões Aritméticas, bem como, os conceitos utilizados para seu desenvolvimento e utilização.

Objetivos Específicos

- Apresentar uma sequência didática com abordagem de Soma de Gauss para o estudo de Progressões Aritméticas em sala de aula observando seus resultados de aprendizagem;
- Introduzir os conceitos de Sequência Numérica e Números Triangulares para, através de suas propriedades, conhecer a Soma de Gauss;
- Aplicar a fórmula da Soma de Gauss em outras progressões aritméticas, tendo como embasamento a própria Soma;
- Observar algumas aplicações da Soma de Gauss em situações do cotidiano de modo que venha a compreender sua utilização.

O trabalho está organizado em cinco capítulos, incluindo a introdução. O capítulo 2 traz uma breve abordagem da Soma de Gauss, começando pela história do matemático Gauss, o qual deu origem à esta fórmula. Posteriormente, será tratado da soma dos 100 primeiros números naturais. No capítulo 3 se tem a definição de sequências numéricas e P.A. e em seguida discorre-se sobre a fórmula utilizada por Gauss para somar os n primeiros naturais, concluindo o capítulo com a soma dos termos de uma progressão aritmética. No capítulo 4 se vê as aplicações da Soma de Gauss com uma reapresentação dos conceitos utilizados anteriormente no trabalho.

O capítulo 5 aborda a ideia do uso de sequências didáticas para o estudo de progressões aritméticas, começando pela história do estudo de P.A., em seguida, discorre sobre a elaboração de uma sequência didática para o ensino de P.A. No quinto capítulo serão abordados os conceitos utilizados no decorrer do trabalho, tais como Sequências de Números Naturais e Progressões Aritméticas, comprovando algumas fórmulas. Também serão apresentadas algumas aplicações da Soma de Gauss na organização de objetos diversos em forma triangular ou piramidal. Para finalizar, tem-se algumas considerações analisando os argumentos apresentados para a consolidação deste trabalho.

2. Soma de Gauss

Neste capítulo, que se divide em duas seções, é abordada a história do matemático Gauss, desde seu nascimento até seu falecimento em 1855, analisando suas descobertas e contribuições para a humanidade, principalmente no que concerne às ciências exatas. Posteriormente, discorre-se sobre o raciocínio utilizado por Gauss para realizar o desafio que lhe foi proposto por seu professor. Finalmente, se discutirá acerca da fórmula obtida por Gauss para realizar a soma dos n primeiros números naturais.

2.1 História de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Braunscheweig, Alemanha, em 30 de abril de 1777 e veio a óbito em Göttingen, Alemanha, em 23 de fevereiro de 1855. Foi um extraordinário matemático físico e astrônomo alemão que colaborou bastante em diversas áreas do conhecimento científico, das quais podemos destacar a Teoria dos Números, a Análise Matemática e a Geometria Diferencial. Ficou conhecido como *"princeps mathematicorum"*, o príncipe da matemática ou o mais notável dos matemáticos, sendo um dos homens com mais influência na história da matemática, referindo a esta como a "rainha das ciências". Teve sua origem em uma família humilde, seu pai Gerhard Diederich, jardineiro e pedreiro, não o apoiava para estudar, entretanto, sua mãe Dorothea Benze, analfabeta, fez o possível para que seu filho pudesse receber instrução adequada, desse modo, aos sete anos Gauss entrou para a escola.

Gauss se mostrava admirável desde pequeno, aos 10 anos surpreendeu a todos ao dar uma brilhante solução a um problema proposto por seu professor, talvez como uma maneira de passar o tempo ou descansar, entretanto, foi surpreendido pelo pequeno Gauss que lhe apresentou uma solução correta, rápida e inacreditável, esta solução ficou conhecida como Soma de Gauss, a qual será abordada posteriormente, neste mesmo trabalho.

O professor de Gauss notou, então que este garoto possuía uma mente extremamente genial, passando a incentivar o garoto em seus estudos, juntamente com seu assistente Martin Bartels (1769 – 1856), a partir daí surgiu uma bela amizade entre Bartels e Gauss, a qual se estendeu por toda a vida. Aos 12 anos Gauss já debatia e discordava de determinados fundamentos da Geometria Euclidiana e, mais tarde, aos 16 anos, desenvolveu um conceito de geometria diferente da de Euclides, de tal modo, um ano mais tarde buscou sem cessar a comprovação de sua teoria, preenchendo todas as lacunas que estavam incompletas, mostrando que tudo o que havia feito era perfeitamente correto. Ele acresceu sua teoria de uma matemática tão inesgotável e sutil que esta nunca foi superada. Aos 18 anos já havia desenvolvido o método dos mínimos quadrados, neste trabalho o mérito é dividido com Legendre, método este que é utilizado em pesquisas geodésicas, este trabalho foi o impulso inicial para o interesse de Gauss no estudo da teoria dos erros de observação. Em setembro de 1798 foi para a Universidade de Helmstedt e hospedou-se na casa do professor de matemática Johann Friedrick Pfaff. Aos 21 anos, concluiu a Disquisitiones, porém o livro só foi publicado em 1801.

Em novembro de 1804, casou-se com Johanna Elisabeth Rosina Osthoff, que veio a falecer em 1809, e com quem teve três filhos: Joseph, Wilhelmine e Louis. Depois, casou-se com Friederica Waldeck com quem teve mais três filhos: Eugen, Wilhelm e Therese.

Gauss dedicou seu livro ao Duque Ferdinand, o qual manteve financeiramente os estudos de Gauss durante três anos, na Universidade de Göttingen, em sua dedicatória Gauss escreveu: “Sua bondade libertou-me de outras responsabilidades e permitiu que eu me dedicasse exclusivamente a este trabalho”. Outra fase importante na vida de Gauss teve início no primeiro dia do século XIX quando Giuseppe Piazzi de Palermo reconheceu um planeta, chamado Ceres, o qual, até então, era considerado um pequeno cometa, localizava-se em uma posição em que sua observação se tornava muito difícil e o cálculo de sua órbita era tido como impossível. Contudo para o jovem Gauss calcular a órbita do novo planeta lhe parecia um desafio muito tentador que lhe daria fama e dinheiro, uma vez que Gauss buscava algum trabalho lucrativo, pois o Duque já havia encerrado sua ajuda financeira. Assim, após 20 anos de muito trabalho, o planeta Ceres foi redescoberto exatamente onde os minuciosos cálculos de Gauss haviam previsto. Em 1809, publicou sua segunda obra intitulada Teoria do Movimento dos Corpos Celestiais Girando a Volta do Sol, na qual havia uma belíssima e longa explanação das órbitas dos planetas e cometas.

Gauss encontrou na ciência muita satisfação como simples recreação, sua maior motivação era simplesmente o avanço da matemática. Também lhe interessava a literatura europeia. O estudo de novas línguas e ciências era visto como um passatempo. Outro hobby de Gauss era a política mundial, fazendo-o dedicar-se a isso de uma a duas horas diárias, visitava o museu literário regularmente para manter-se informado de todos os eventos políticos ocorridos mundialmente.

Os últimos anos da vida de Gauss foram repletos de honrarias, porém não da felicidade que merecia. Em junho de 1854 deixou Göttingen para ver a estrada de ferro que estava sendo construída entre sua cidade e Kassel. Durante a viagem ocorreu um contratempo, no caminho os cavalos dispararam e ele foi atirado para fora da carruagem, felizmente não se feriu gravemente. No decorrer de sua recuperação ainda pode assistir a abertura das cerimônias de inauguração quando a estrada de ferro finalmente chegou a Göttingen em 31 de julho de 1854. No início de 1855 lhe apareceram os primeiros sintomas de gota. Gauss permaneceu consciente até os últimos minutos de vida. Na manhã de 23 de fevereiro deste mesmo ano, morreu pacificamente aos 77 anos, sendo sepultado no Albani-Friedhof em Göttingen.

2.2 Soma dos 100 Primeiros Números Naturais

Como havia sido mencionado na seção anterior, aos 10 anos Gauss já impressionava a todos com sua genialidade, visto que foi justamente nesse período de sua vida que formulou o que se conhece como Soma de Gauss, e o fez a partir de um desafio proposto por seu professor que, pela dificuldade do problema, acreditava que manteria os alunos bastante ocupados. O problema consistia em somar os 100 primeiros números naturais, isto é, somar todos os números de 1 a 100. Entretanto, para espanto do professor e dos demais alunos, Gauss conseguiu rapidamente resolver o problema dando a resposta correta 5050. Porém o que intrigava a todos era como o pequeno Gauss havia conseguido resolver tão rápido e de maneira correta.

Acompanhemos o raciocínio de Gauss, organizando matematicamente o problema, Gauss obteve a seguinte adição: $1+2+3+4+5+\cdots+96+97+98+99+100=?$

Então, ele notou que se somasse o primeiro número dessa soma com o último obtinha 101, somando o segundo número com o antepenúltimo obtinha 101, o terceiro com o antepenúltimo também obtinha 101, e assim por diante, então:

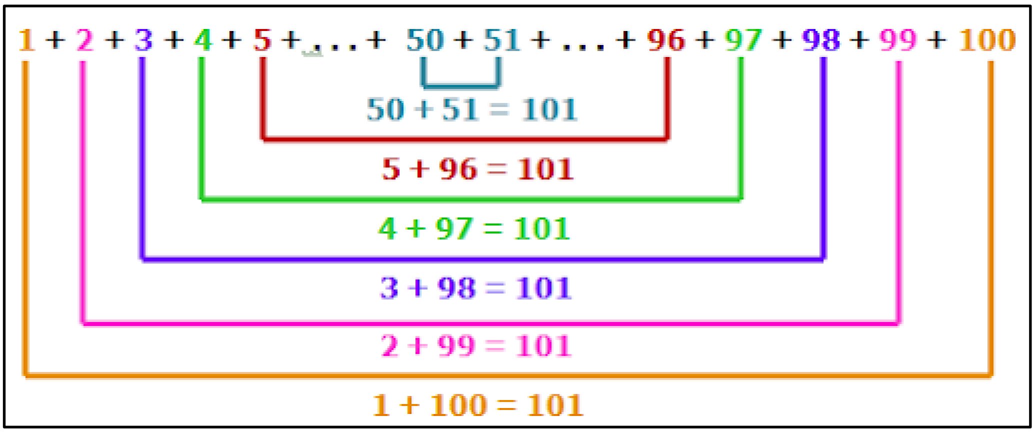

Figura 1: Soma dos 100 primeiros números naturais

A partir desta observação Gauss percebeu que somar os números de 1 a 100 consistia no mesmo que somar 50 vezes o número 101, ou ainda somar $\frac{100}{2}$ vezes $100+1$, que resulta no número 5050. Desse modo, a fórmula utilizada foi:

$$\boxed{\frac{100 \times 101}{2}}$$

A seguir, no próximo capítulo será introduzido o conceito de Progressões Aritméticas, utilizando a dedução da fórmula de Gauss para a soma dos n primeiros números naturais, finalizando com a soma dos termos de uma P.A. qualquer.

3. Progressões Aritméticas e Soma de Gauss

Sempre que se estabelece uma ordem para os elementos de um conjunto, de forma que cada elemento seja associado a uma posição, tem-se uma sequência ou sucessão.

Definição: Em análise matemática, define-se uma sequência como uma função

$$f : A \to B$$

definida sobre um subconjunto A dos números naturais que toma elementos no conjunto B. Uma sequência também pode ser vista como um conjunto de números ordenados pela lei de formação da sequência. O tamanho de uma sequência é definido de acordo com a quantidade de elementos que esta possui, podendo existir sequências finitas ou infinitas. Um elemento, ou termo, de uma sequência é indicado por a_n, onde n representa a posição ocupada pelo termo.

Exemplo: Seja $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ uma sequência finita onde a_1 é o primeiro termo e a_n é o último termo dessa sequência.

Uma sequência numérica é dita infinita quando é representada pela função $f : A \to B$ cujo domínio é o conjunto dos números naturais, isto é, uma sequência é infinita quando todo termo seu possui um sucessor.

Exemplos:

- $2, 4, 6, \cdots$ a sequência dos números pares positivos;
- $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 \cdots$ a sequência dos números primos;
- $1, 1, 1, 1, \cdots$ uma sequência constante;
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$ a sequência de Fibonacci.

A soma de Gauss é utilizada na soma de sequências numéricas diversas, assim também pode ser aplicada na solução de diversos problemas desde a soma dos termos de uma progressão aritmética, até a soma de objetos variados organizados de forma piramidal ou triangular tais como frutas, verduras, latas, entre outros objetos.

3.1 História do Estudo de Progressão Aritmética

As progressões começaram ser estudadas há bastante tempo, diversos povos como os mesopotâmios, babilônios e os egípcios tiveram muita influência no estudo de Matemática. E apesar de os egípcios nunca terem alcançado o elevado grau de eficiência da matemática babilônica, talvez por a Babilônia ser o centro das rotas de navios e da correspondência de saberes e conhecimentos, é inegável que a civilização egípcia exerceu um papel fundamental na preservação de boa parte dos papiros que contribuíram para o nosso estudo e compreensão da Matemática que temos atualmente. Além dos egípcios e babilônios, outros povos e diversos estudiosos mais recentes, e outros mais antigos prestaram contribuições ao estudo de progressões aritméticas.

Um exemplo do estudo de progressões na antiguidade é o papiro de Rhind (ou Ahmes) que data aproximadamente de 1650 a.C. e nada mais é do que um texto matemático que contém 85 problemas que foram copiados pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo, e que foi adquirido no Egito por A. Henry Rhind, egiptólogo francês.

Neste papiro são encontrados diversos problemas matemáticos, dentre eles, temos o seguinte: Divida 100 pães entre cinco homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual a soma das duas menores.

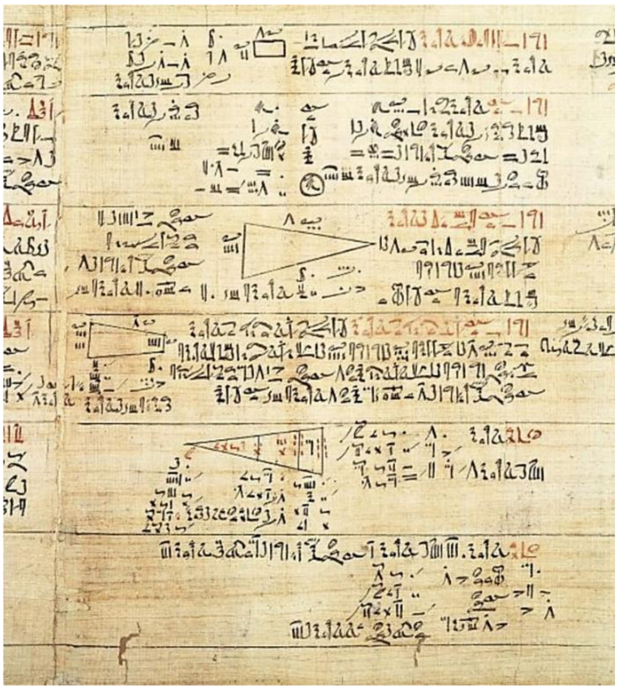

Figura 2: Trecho do Papiro de Rhind

Buscar-se-á solucionar o problema descrito anteriormente, sejam p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 as partes recebidas pelos cinco homens. Como dito no enunciado as partes deverão estar em progressão aritmética, assim considere-se a o termo inicial dessa P.A. e r sua razão.

Portanto, podemos fazer

$p_1 = a,\ p_2 = a + r,\ p_3 = a + 2r,\ p_4 = a + 3r$ e $p_5 = a + 4r$

A soma dessas partes deve ser 100, logo

$$\left.\begin{array}{c} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 100 \Leftrightarrow \\ a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + (a + 4r) = 100 \Leftrightarrow \\ 5a + 10r = 100 \end{array}\right\} (I)$$

Como foi dito no enunciado, um sétimo da soma das três partes maiores deve ser igual a soma das duas partes menores, assim:

$$\frac{p_3 + p_4 + p_5}{7} = p_1 + p_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a + 2r) + (a + 3r) + (a + 4r)}{7} = a + (a + r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3a + 9r)}{7} = 2a + r \Leftrightarrow$$

$$3a + 9r = 7 \cdot (2a + r) \Leftrightarrow$$

$$3a + 9r = 14a + 7r \Leftrightarrow$$

$$9r - 7r = 14a - 3a \Leftrightarrow$$

$$2r = 11a \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{11}{2}a$$

Substituindo o valor de r na equação (I), tem-se

$$5a + 10r = 100 \Leftrightarrow$$

$$5a + 10 \cdot 5,5a = 100 \Leftrightarrow$$

$$60a = 100 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{5}{3}$$

Agora realizando as substituições adequadas,

$$r = \frac{55}{6},\ p_1 = \frac{5}{3},\ p_2 = \frac{65}{6},\ p_3 = \frac{120}{6},\ p_4 = \frac{175}{6},\ p_5 = \frac{115}{3}$$

Verificando a veracidade dos valores encontrados, tem-se

$$\begin{aligned} & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \\ & = \frac{5}{3} + \frac{65}{6} + \frac{120}{6} + \frac{175}{6} + \frac{115}{3} = \\ & = \frac{10 + 65 + 120 + 175 + 230}{6} = \\ & = \frac{600}{6} = \\ & = 100 \end{aligned}$$

Portanto, é possível observar que os valores encontrados satisfazem o enunciado do problema.

Sabe-se, também que um sétimo da soma das três partes maiores deve ser igual à soma das duas partes menores, logo:

$$\frac{p_3 + p_4 + p_5}{7} = p_1 + p_2 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\frac{\frac{120}{6} + \frac{175}{6} + \frac{115}{3}}{7}}_{(i)} =$$

$$= \underbrace{\frac{5}{3} + \frac{65}{6}}_{(ii)}$$

Em *(i)*, temos

$$\frac{\frac{120}{6}+\frac{175}{6}+\frac{115}{3}}{7}=$$

$$=\frac{\frac{120+175+230}{6}}{7}=\frac{\frac{525}{6}}{7}=$$

$$=\frac{175}{14}=12,5$$

Por outro lado, em *(ii)*, temos

$$\frac{5}{3}+\frac{65}{6}=\frac{10+65}{6}=\frac{75}{6}=12,5$$

Deste modo, percebe-se que os valores obtidos satisfazem todas as condições apresentadas no enunciado do problema e, portanto, conclui-se que são verdadeiros.

3.2 Progressões Aritméticas

Definição 1: Dá-se o nome de Progressão Aritmética, P.A., a toda sequência numérica em que cada termo, exceto o primeiro, é igual ao termo anterior somado a uma constante r, a qual é chamada de razão da P.A. A fórmula para se obter o termo geral de uma progressão aritmética de n termos e razão r qualquer pode ser dada da seguinte forma:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$$

Onde a_i são termos da P.A. n é a quantidade de termos da progressão aritmética, em que $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

Assim, seja a P.A. $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ de razão r qualquer. É sabido, por definição, que cada termo da progressão aritmética é a soma do anterior com a razão da própria progressão, isto é,

$$a_2 = a_1 + r \quad (\mathrm{I})$$

$$a_3 = a_2 + r \quad (\mathrm{II})$$

$$a_4 = a_3 + r \quad (\mathrm{III})$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Substituindo a igualdade (I) na igualdade (II) obtemos:

$$a_3 = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \quad (\mathrm{IV})$$

Agora, substituindo (IV) na igualdade (III), temos:

$$a_4 = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \quad (\mathrm{V})$$

Continuando com esse raciocínio, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + r = \\ &= a_{n-2} + 2r = \\ &= a_{n-3} + 3r = \\ &= \cdots = \\ &= a_3 + (n-3) \cdot r = \\ &= a_2 + (n-2) \cdot r = \\ &= a_1 + (n-1) \cdot r \end{aligned}$$

Ou seja,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

No próximo tópico será utilizada a fórmula utilizada de Gauss para a realização da soma dos n primeiros números naturais, inicialmente trazendo a definição do conjunto dos números naturais.

3.3 Dedução da Fórmula de Gauss para a Soma dos *n* Primeiros Números Naturais

Perante o pensamento de Gauss, se buscará agora deduzir a fórmula para somar n números naturais.

Definição2: Dizem-se de números naturais todos os números inteiros positivos, e representam-se por $\mathbb{N}$, tal que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

Assim, sejam

$$1, 2, 3, \cdots (n-2), (n-1), n$$

os n primeiros números naturais, e se suponha que se almeja encontrar sua soma

$$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

Esta tarefa seria extremamente complicada se fossem somados os n números, um a um, pois não se sabe a quantidade de números que estamos tentando somar. Então, para simplificar esse cálculo deve ser relembrado o raciocínio de Gauss, somando o primeiro com o último termo dessa sequência de números, o segundo com o penúltimo, o terceiro com o antepenúltimo, e nota-se que as somas descritas são iguais observe:

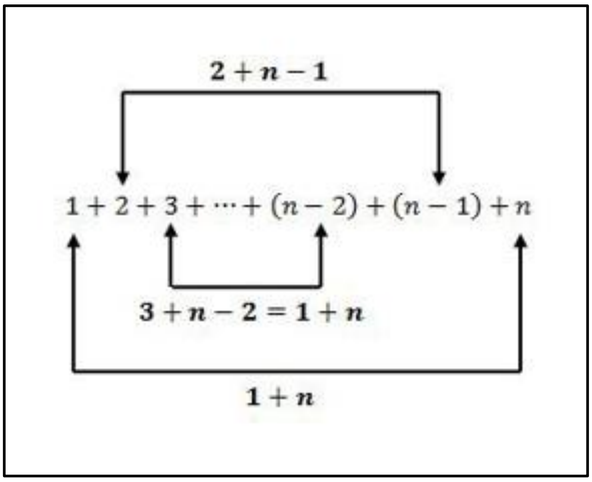

Figura 3: Soma dos n primeiros números naturais

Ou seja,

$$1+n=2+(n-1)=3+(n-2)=\cdots=(n-i)+(n-j), \quad \text{com } j=i-1$$

Assim, podemos fazer

$$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=$$

$$=[1+n]+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\cdots+[(n-i)+(n-j)]$$

Dessa forma,

$$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=$$

$$=(1+n)+(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)\ ,\ \frac{n}{2}\ \text{vezes.}$$

Organizando o resultado acima, temos que a soma dos n primeiros números naturais é dada por:

$$\boxed{(n+1)\cdot\frac{n}{2}}$$

Conclui-se dessa forma que a soma dos n primeiros números naturais pode ser obtida através da fórmula da Soma de Gauss.

3.4 Soma dos Termos de uma P.A. de *n* Termos e Razão *r*

A Soma de Gauss ou fórmula de Gauss pode ser utilizada para somar os termos de uma Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ qualquer com n elementos, conhecendo apenas seu primeiro termo e sua razão.

Pela definição de P.A., sabe-se que os termos de uma progressão aritmética qualquer, de razão r, são dados por:

$$\left.\begin{array}{c} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + r = \cdots = a_1 + (n-1)r \end{array}\right\} (\mathrm{A})$$

A soma dos termos de uma P.A. é

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (\mathrm{B})$$

Agora, perceba que ao substituir os resultados encontrados em (A) na equação (B), pode-se fazer

$$S_n = a_1 + [a_1 + r] + [a_1 + 2r] + \cdots + [a_1 + (n-3)r] + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r]$$

Seguindo o raciocínio de Gauss, é possível somar o primeiro termo ao último, o segundo ao penúltimo, enfim, ate que todos tenham sido somados como a seguir:

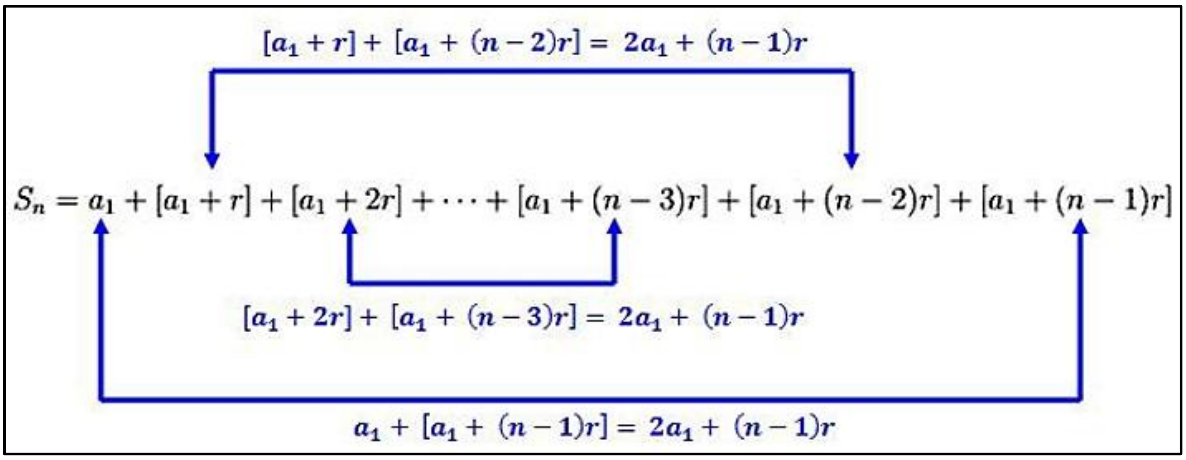

Figura 4: Soma dos *n* termos de uma P.A.

Perceba que somando o primeiro termo com o último foi obtido $2a_1 + (n-1)r$, o mesmo ocorre quando somamos o segundo com o penúltimo, e assim por diante, logo se tem $\frac{n}{2}$ adições iguais, assim, somar os n termos de uma progressão aritmética $a_1, a_2, \cdots, a_n$ é o mesmo que somar $\frac{n}{2}$ vezes os termos a_1 e a_n, que são, respectivamente, o primeiro e o último termos da P.A. dada. Portanto, conclui-se que a soma dos termos de uma P.A. de *n* termos e razão *r* é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Logo, é possível observar que a soma dos termos de uma P.A. qualquer também pode ser resumida utilizando Soma de Gauss, pois basta somar o primeiro e o último termos dessa P.A. e multiplicar o resultado obtido pela metade do número de elementos dessa progressão.

Exemplo 1: Calcule a soma dos termos da P.A. $3, 8, 13, 18, 23, 28$.

Usando a Soma de Gauss, tem-se:

$$S_n = \frac{(3 + 28) \times 6}{2} = 31 \cdot 3 \Leftrightarrow S_n = 93$$

Logo, a soma dos termos da P.A. dada é 93. Perceba como o método da Soma de Gauss simplificou o cálculo, diferente da maneira comum de realizar a soma na qual se faria a soma um a um de todos os elementos.

Exemplo 2: (UCS INV/2015) Uma fábrica fornece, a um supermercado, 1000 unidades de seu produto por R\$ 3.000,00. Para cada mil unidades adicionais, ela cobra R\$ 200,00 a menos do que ela cobrou do milhar precedente. Dessa forma, para adquirir 8.000 unidades, o valor que o supermercado deverá pagar será

a. R\$ 12.600,00

b. R\$ 19.200,00

c. R\$ 18.400,00

d. R\$ 25.400,00

e. R\$ 26.100,00

Solução: Do enunciado se pode deduzir que os valores de cada milhar, do primeiro ao oitavo, são os seguintes R\$ 3.000,00, R\$ 2.800,00, R\$ 2.600,00, R\$ 2.400,00, R\$ 2.200,00, R\$ 2.000,00, R\$ 1.800,00 e R\$ 1.600,00, respectivamente. Desse modo, se pode aplicar a Soma de Gauss e fazer:

$$\frac{(3.000+1.600)\times 8}{2}$$

Com cálculos rápidos, chega-se a

$$\frac{(4.600)\times 8}{2} = 4.600\times 4 = 18.400$$

Logo, a resposta correta é a alternativa c, R\$ 18.400,00.

Note que o método de Gauss facilita o trabalho de realizar os cálculos, bastando apenas somar o primeiro e o último termo, multiplicar pela quantidade de termos e dividir por 2, sem que haja necessidade de decorar a fórmula.

4. Aplicações da Soma de Gauss e Conceitos Utilizados

Diversos conceitos matemáticos foram utilizados, mesmo que implicitamente, para a elaboração da sequência didática descrita neste trabalho, tais conteúdos foram Sequências de números naturais, Princípio de Indução Finita, Números Triangulares e Progressões Aritméticas. Por isso nas seções a seguir haverá um aprofundamento desses conteúdos.

4.1 Organização Piramidal ou Triangular de Objetos

Muitas vezes, ao ir ao mercado ou a feira, observa-se frutas, verduras, produtos diversos organizados em forma de triângulo ou pirâmide, porém a forma geométrica não é a única característica matemática presente nessa forma de organização. A forma geométrica da organização desses objetos, os valores percentuais, a quantidade de objetos, a área ocupada, são alguns dos conceitos que podem ser estudados ao observar uma pilha de alimentos, por exemplo. Entretanto, se buscará aqui aplicar a Soma de Gauss para realizar mais facilmente a contagem de itens presentes nas pilhas de objetos expostos em feiras e mercados.

Figura 5: Pirâmide formada por frutas

Exemplo: Em uma dada feira há um vendedor de maçãs. Uma cliente se aproxima desejando comprar todas as maçãs que estão empilhadas em forma de pirâmide. Porém, o vendedor não sabe a quantidade de maçãs que há na pilha, ele apenas sabe que a pirâmide de maçãs possui dez camadas, onde a primeira (camada superior) possui uma maçã, a segunda possui três maçãs, a terceira possui cinco maçãs e a décima camada da pirâmide possui 19 maçãs.

Solução: Podemos representar a quantidade de maçãs presentes nessa pilha como uma P.A. de 10 termos, onde 1 e 19 são respectivamente o primeiro e o último termos dessa progressão, e a soma de seus termos pode ser dada por

$$m = 1 + 3 + 5 + \cdots + 19$$

Utilizando os conceitos da Soma de Gauss temos:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = \frac{(1+19)\cdot 10}{2}$$

Então

$$m = \frac{(20 \cdot 10)}{2} \Leftrightarrow m = 100$$

Portanto a quantidade de maçãs organizadas na pilha é de 100 maçãs. ■

Também é fácil perceber, em alguns supermercados, latas de alimentos, potes de creme, bem como papel higiênico organizados de forma triangular ou piramidal e, a contagem desses itens também pode ser feita através da Soma de Gauss, basta analisar se esses objetos seguem uma progressão aritmética. Assim podemos dizer que esta forma tão simples de organização é, também, um dos exemplos mais simples para trabalharmos a Soma de Gauss.

Figura 6: Triângulo formado por rolos de papel higiênico

4.2 Axiomas de Peano

Os números naturais fazem parte de um padrão matemático, onde se pode realizar a operação de contagem. Essa operação antecipa a noção de sequência numérica.

A junção de todos esses números forma um conjunto indicado por $\mathbb{N}$, o qual é chamado de conjunto dos números naturais. Logo, $(\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, \cdots)$. Entretanto essa definição só faz sentido quando se sabe o que é um número natural. Deve-se ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) a demonstração da possibilidade de construir toda a teoria dos números naturais tendo como base quatro proposições fundamentais, as quais são conhecidas, atualmente, como axiomas de Peano, onde se define o conjunto dos números naturais da seguinte maneira:

i. Existe uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$ chamado sucessor de n.
ii. A função $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.
iii. Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
iv. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $s(X) \subset X$, isto é $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O axioma iv é conhecido como Axioma de Indução ou Principio de Indução Finita (PIF) e é bastante utilizado para realizar demonstrações referentes aos subconjuntos dos números naturais. Podemos fazer a demonstração da fórmula da Soma de Gauss para os n primeiros números naturais, através do PIF.

Exemplo: Mostre que a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Usando o princípio de Indução Finita, deve-se mostrar que a afirmação é válida para $n = 1$,

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Agora suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2} \text{ [Hipótese de Indução – HI]}$$

Finalmente, deve ser mostrado que a afirmação é válida para $n=k+1$ e consequentemente, válida $\forall n\in\mathbb{N}$. Quer se mostrar que

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(k+1+1)}{2}=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

Da hipótese de indução tem-se:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)\Leftrightarrow$$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}$$

Logo,

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$$

$$=\frac{k^2+3k+2}{2}=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

Como a afirmação satisfaz o axioma iv de Peano, pode-se dizer que a soma

$$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

é válida para todo $n\in\mathbb{N}$.

Já que se definiu $\mathbb{N}$ como o conjunto dos números naturais, a notação $n\in\mathbb{N}$ significa que *n* é um número natural.

4.3 Números Triangulares

Definição: Chama-se de triangular o número natural que pode ser representado na forma de triângulo equilátero.

Para encontrar o enésimo número triangular a partir do anterior basta adicionar a ele *n* unidades. Os primeiros números triangulares são:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ 55,\ \cdots$$

Em geral, o enésimo número triangular é dado por:

$$T_n = \sum_{k=(1,2,3,\cdots,n)}^{k} = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

onde T_n é o enésimo número triangular.

Note que o primeiro número triangular é igual ao primeiro número natural, o segundo é igual a soma dos dois primeiros naturais, o terceiro é igual a soma dos 3 primeiros números naturais, e assim sucessivamente. Então, seguindo esse raciocínio temos que o enésimo número triangular é igual a soma dos *n* primeiros números naturais. Isto é,

$$\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 1+2 \\ T_3 = 1+2+3 \\ \vdots \\ T_n = 1+2+3+\cdots+n \end{cases}$$

Assim, pode-se afirmar que a fórmula para o enésimo número triangular é igual a fórmula para encontrar a soma dos *n* primeiros números naturais, que é igual a soma de Gauss, portanto, o enésimo número triangular é dado por

$$T_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

No capítulo a seguir, discorre-se sobre o modelo de sequência pensado e elaborado para o ensino de progressões aritméticas.

5. Sequência Didática e Progressões Aritméticas

É possível afirmar que a elaboração de uma sequência didática deve ser feita estabelecendo objetivos bem definidos que levem em consideração o conhecimento prévio dos alunos, o conteúdo a ser ensinado, o que o professor anseia que seus alunos consigam aprender ao final da execução da sequência, enfim, diversos fatores devem ser analisados. Entretanto não há uma receita ou fórmula pronta para elaborar uma sequência didática, cada caso específico e cada situação de aprendizagem exige uma sequência didática elaborada especificamente para si, isto é,

> *Primeiramente, muita gente fica presa à formatação, perguntando* ***como fazer uma sequência didática*** *e acaba se importando mais com a forma do que com o conteúdo. A forma é importante, mas não há um padrão estabelecido pela ABNT como existem nos trabalhos acadêmicos. Separar as atividades em uma organização lógica só tem como objetivo deixar claro ao professor, ou seja, para você que está fazendo a sequência didática, a organização das atividades para promover a aprendizagem dos alunos. (GUEDES, 2019)*

Dessa forma, é correto dizer que o modelo de sequência é importante, pois uma sequência bem organizada vai facilitar a compreensão do educador em cada etapa a ser cumprida, porém a formatação não é o mais importante, os objetivos didáticos devem ser colocados como prioridade. Assim, a sequência didática deve ser planejada de forma a suprir as dificuldades de aprendizagem dos alunos e auxiliar o trabalho do professor, por isso é necessário que o professor já conheça os alunos aos quais a sequência será direcionada, para que a sequência seja adaptada às suas necessidades para ultrapassar as barreiras e dificuldades de aprendizagem, de forma que os alunos tenham uma aprendizagem satisfatória de forma mais simples e rápida.

Como já visto a Progressão Aritmética é basicamente toda sequência onde cada termo, a partir do segundo, é dado pela soma do termo anterior acrescida de uma constante r, chamada razão da progressão. Em sala de aula é estudado como cada progressão se constrói, sua quantidade de termos e seu tipo (constante, crescente, decrescente). Porém, este conteúdo, apesar de ser muito importante, e poder ser aplicado a diversas situações do cotidiano, geralmente é visto de forma desconexa com as vivências dos alunos, fazendo com que estes percam o interesse por este conteúdo. Esse método de ensino tornou-se muito comum, boa parte dos professores prefere utilizar apenas o método tradicional do quadro e giz, onde o professor ensina e os alunos copiam como se fossem meras máquinas que servem apenas para decorar o que foi passado com o intuito apenas de ser aprovados ao final do ano escolar.

> *As progressões aritméticas e geométricas são conteúdos de fundamental importância no Ensino Médio. Contudo, percebe-se, ao longo da experiência profissional e no contato com os colegas, que é tradicional o ensino das Progressões exclusivamente por meio de manipulação de fórmulas entregues aos alunos, muitas vezes sem as devidas demonstrações destas e também sua aplicabilidade, sendo assim empregados em exercícios tradicionais de sala de aula. Na aprendizagem Matemática, os problemas permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras. (MILANI, 2011)*

Como é possível notar na fala de Milani, foi esquecido o método mais simples de aprendizagem, que trabalha com o envolvimento dos alunos, estudo de situações-problema, utilização de jogos, brincadeiras e materiais "paradidáticos", entretanto é esse método que molda o aluno e o transforma em um ser pensante, que é capaz de discutir, criar sua própria aprendizagem, e o possibilita enxergar a matemática com toda sua beleza e sua relação com a vida e a natureza.

Deste modo, as progressões aritméticas deveriam ser ensinadas levando-se em consideração o conhecimento prévio do aluno, relacionando-a com o dia a dia, trabalhando a história da matemática, que apesar de ser pouco explorada em sala de aula, é muito importante no estudo e compreensão de progressões aritméticas.

> *[...] através do estudo da História da Matemática o aluno poderá relacioná-la com seu cotidiano. Os estudos da construção histórica dos conhecimentos matemáticos levam a uma maior compreensão da evolução dos conceitos enfatizando as dificuldades epistemológicas, ou seja, sua origem, estrutura, métodos e validade do conhecimento, inerentes ao conceito que está sendo trabalhado. Ao se analisar a construção histórica do conhecimento matemático percebe-se que ele tem sido elaborado através da tentativa do homem em compreender e atuar em seu mundo. (OLIVEIRA, 2014)*

Portanto, é dessa forma que se buscará abordar progressão aritmética, apresentando uma sequência didática para trabalhar o conteúdo citado, mostrando, por meio de aplicações simples do cotidiano uma maneira menos complexa de aprender.

5.1 Exemplos de Sequência Didática

O modelo de sequência didática apresentado neste trabalho não é o único possível para o estudo de progressões aritméticas. Por exemplo, tem-se os seguintes esquemas de construção de sequência didática

Exemplo 1:

⇒ **Aplicação de diagnóstico para sondagem inicial**

⇒ **Introdução do conteúdo**

⇒ **Aplicação de diagnóstico de acompanhamento**

⇒ **Avaliação de resultados**

Neste modelo, primeiro realiza-se uma sondagem de conhecimentos prévios dos estudantes, com um levantamento de dados para avaliação e comparação de forma que o professor compreenda qual o nível de conhecimento que os alunos têm a respeito do conteúdo a ser desenvolvido, e a partir daí elaborar atividades condizentes que todos possam acompanhar e compreender.

Em seguida, é realizada a introdução do conteúdo, com suas definições, exemplos e atividades de fixação. Logo após, é realizado um segundo diagnóstico, o qual analisará a aprendizagem dos alunos em relação ao que foi exposto em sala.

Por fim, realiza-se a avaliação de resultados, comparando os dois diagnósticos para observar a evolução de aprendizagem de cada estudante.

Exemplo 2:

⇒ **Pesquisa de conteúdos por parte dos estudantes**

⇒ **Estudo dos conteúdos**

⇒ **Explanação em sala de aula**

⇒ **Análise de resultados**

Neste outro modelo, trabalhamos a técnica da sala de aula invertida, na qual os estudantes realizam em suas casas várias pesquisas sobre o tema proposto, estudam, discutem entre si, sem interferência do professor.

Após realizarem os estudos, cada aluno vai para a sala de aula para praticar o que aprendeu através de exercícios de fixação, debates, pequenas gincanas, etc. Nesta etapa o professor agirá como mediador de aprendizagem, confirmando hipóteses, esclarecendo dúvidas e realizando avaliações de verificação de aprendizagem, que podem ser escritas, ou através da observação.

Por fim, o educador realiza a análise de resultados e verifica a eficácia – ou não eficácia – da sequência aplicada.

5.2 Discussão da Sequência Elaborada

A busca por novas técnicas e práticas de ensino é algo constante nas salas de aula, é sabido que cada metodologia de ensino traz diferentes resultados de aprendizagem, por isso o educador está sempre se aperfeiçoando e buscando novas maneiras de ensinar nossos alunos, buscando facilitar a aprendizagem, incentivando o desejo de descobrir, para que eles também busquem conhecimento. No ensino de Matemática não é diferente, a utilização de práticas adequadas de ensino nos traz melhores resultados de aprendizagem, contudo deve-se sempre atentar ao conhecimento informal que o indivíduo aluno já possui, para unir teoria do conteúdo a ser estudado e realidade do aluno, resultando assim em uma facilitação da aprendizagem.

Segundo a autora Pessoa, sequência didática "corresponde a um conjunto de atividades articuladas que são planejadas com a intenção de atingir determinado objetivo didático", em seguida completa:

> *A sequência didática é uma forma de organização do trabalho pedagógico que permite antecipar o que será enfocado em um espaço de tempo que é variável em função do que os alunos precisam aprender da mediação e do constante monitoramento que o professor faz para acompanhar os alunos, por meio de atividades de avaliação durante e ao final da sequência didática. (PESSOA, ano desconhecido)*

Dessa forma, é possível dizer que sequência didática é uma prática de ensino que pode ser utilizada independentemente do conteúdo a ser ensinado/aprendido, do nível escolar, bem como da faixa etária dos alunos, podendo ser utilizada como metodologia de ensino de qualquer disciplina.

Então a sequência didática é igual ao plano de aula? Não, embora ambos tenham o objetivo de ensinar algo a alguém, o plano de aula refere-se a uma aula, já a sequência didática trata de um tema ou conteúdo completo, podendo durar semanas, bimestres, trimestres ou o ano letivo completo até alcançar os resultados de aprendizagem desejados. Segundo Meirelles, "para saber a duração de uma sequência, leve em conta o que determinou que os alunos aprendam e quanto isso vai demorar. Cada ação pode exigir mais ou menos tempo de sala de aula."

Segundo Meirelles, "escolher quais conteúdos abordar e de que maneira são questões fundamentais para o sucesso do trabalho que será realizado ao longo do ano". A elaboração e aplicação de uma sequência didática se assinala como uma importante estratégia didática para promover a aprendizagem de Matemática, uma vez que a sequência didática, desde seu planejamento e elaboração já age como facilitadora de aprendizado, já que antes mesmo de planejar a sequência didática o professor deve analisar diversos fatores como o conteúdo que será abordado, quais são as imagináveis dificuldades de aprendizagem apresentadas por seus alunos em relação a este conteúdo, que métodos utilizar para superar tais dificuldades, qual o perfil dos alunos – se são mais extrovertidos e participativos ou mais introvertidos -, qual o nível escolar desses alunos, de que forma eles serão inseridos nessa sequência didática, quais conhecimentos que eles deverão conseguir alcançar ao final da execução da sequência didática e principalmente quais os objetivos do educador ao utilizar a sequência didática como metodologia de ensino.

Portanto, a sequência didática deve ser planejada tomando como ponto de partida conceitos mais simples do conteúdo a ser abordado para, posteriormente, com a interação dos alunos, conseguir chegar a níveis mais profundos e complexos, resultando em uma verdadeira compreensão e aprendizagem por parte dos alunos, dessa forma o professor poderá perceber o alcance de seus objetivos pedagógicos resultante de planejamento, organização, elaboração e execução de uma sequência didática. Isto não significa que a sequência não poderá ser refeita ou readaptada caso surjam novas dificuldades de aprendizagem, como afirma Meirelles:

> *As sequências são planejadas com base em uma hipótese de trabalho. Quando chega a turma de verdade, é natural que alguns ajustes sejam necessários. Quem sabe precise retomar certos conteúdos que não ficaram claros no ano anterior ou mudar a estratégia de uma etapa que não combina com o perfil da classe. Tome cuidado, no entanto, para não perder de vista os objetivos iniciais. [...] Só assim consegue-se alcançar resultados concretos. (MEIRELLES, 2014)*

É relevante lembrar, como foi dito anteriormente, que o uso de sequência didática não se restringe a disciplina ou conteúdo nem mesmo a nível escolar, esta é uma metodologia de ensino adaptável a qualquer conteúdo de qualquer disciplina. O que deve ser considerado é apenas o objetivo de aprendizagem e o tempo no qual será realizada essa sequência, seja ele uma aula, um bimestre, um semestre, enfim, o educador determinará esse tempo de execução de acordo com o que deseja que seus alunos consigam aprender ou realizar após o término dessa sequência.

A elaboração de uma sequência didática deve ser realizada através de um bom planejamento e todos os passos da sequência didática devem ter objetivos pré-estabelecidos e bem definidos, para que o professor consiga, ao final de cada etapa e através de método avaliativo previamente estabelecido, averiguar se a etapa foi cumprida, ou seja, se o objetivo proposto foi alcançado, e assim, prosseguir para o próximo passo da sequência, e caso não tenha sido alcançado o objetivo desta etapa, que ele possa investigar o motivo e buscar solucionar o problema emergente e concluir a etapa pendente da sequência, conforme afirma Cerqueira:

> *Antes de elaborar a sequência didática, o professor deve fazer um diagnóstico do conhecimento prévio desses alunos e, com base nesses resultados, formular as atividades com o objetivo de ampliar as aprendizagens. Conhecimento prévio é um conjunto de concepções, representações e conhecimentos adquiridos pelo aluno em experiências anteriores, que podem ter acontecido dentro ou fora da escola. Esses conhecimentos prévios determinam em boa parte o conjunto de informações que ele selecionará para tentar resolver as atividades apresentadas na aula. (CERQUEIRA, 2013)*

Também é necessário que o professor saiba avaliar seus alunos, pois ele perceberá o que seus alunos já sabiam e o que conseguiram aprender ao utilizar a sequência didática como estratégia de ensino. Essa avaliação poderá ocorrer ao final da execução da sequência didática, ou dia após dia, durante seu desenvolvimento, e também poderá ser feita de diversas maneiras como avaliação escrita, oral, ou análise do desenvolvimento do aluno a cada aula, ou etapa da sequência didática.

> *A sequência didática é uma estratégia educacional que busca ajudar os alunos a resolverem uma ou mais dificuldades reais sobre um tema específico. Seu resultado vem a partir da construção e acumulação de conhecimento sobre o assunto em questão, obtido por meio do planejamento e execução, ao longo de um período de tempo, de várias* ***atividades*** *que conversam entre si. (AUTOR DESCONHECIDO)*

Assim, a sequência didática pode e deve ser utilizada pelo professor como instrumento de facilitação de aprendizagem, uma vez que, se bem planejada trará bons resultados de aprendizagem a um prazo pré-estabelecido que irá variar de acordo com os objetivos e com o conteúdo ou tema a ser ensinado/aprendido. Portanto, antes de elaborar uma sequência didática, o professor deve conhecer seus alunos, fazer uma análise de perfil da turma na qual irá aplicar a sequência, para que possa realizar sua elaboração pré-definindo os objetivos a serem alcançados, metodologia a ser utilizada e quais as formas de avaliação, para que a utilização da sequência gere bons resultados de aprendizagem.

> *Se você vai fazer uma sequência didática para alfabetização, bem como uma* ***sequência didática para a educação infantil****, também* ***para o ensino fundamental I ou ensino fundamental II*** *ou ainda para o* ***ensino médio****, ou até mesmo para o ensino superior, você precisa ter bem claro o objetivo e os conteúdos que serão aprendidos. (GUEDES, 2019)*

Entretanto, não há um modelo pronto de sequência didática, para cada situação de aprendizagem deve ser utilizada uma sequência didática especialmente planejada com objetivos referentes a tal situação. Contudo devemos nos ater ao princípio de que a escolha da sequência didática depende do objetivo didático ao qual desejamos alcançar, de acordo com necessidades ou dificuldades dos alunos, ou seja, cada objetivo almejado exige um tipo de sequência didática específico. Cada passo da sequência deve possuir objetivos bem definidos para que, ao final de cada etapa, o professor consiga, através de avaliação previamente descrita, verificar se os objetivos da etapa foram alcançados para poder seguir para a próxima etapa, e caso o objetivo não tenha sido alcançado, investigar os motivos e buscar soluções.

> *A elaboração de uma sequência didática prevê o diagnóstico inicial do conhecimento do aluno e a definição clara de um objetivo de aprendizagem. Além disso, o professor deve enxergar a avaliação como instrumento norteador para suas futuras ações com a turma. [...] O professor poderá observar se os alunos reconhecem os conhecimentos trabalhados que estão propostos na atividade. É importante que as tarefas sejam elaboradas de tal forma que, em algumas delas, o aluno consiga notar imediatamente o conceito necessário para resolver a questão, uma vez que ele está explícito no enunciado. Em outras, o aluno precisa analisar o enunciado e identificar o que está sendo pedido, pois não há indicação clara sobre o conteúdo necessário para resolver a questão. (CERQUEIRA, 2013)*

Esse conceito de elaboração de sequência didática engloba todos os ramos da matemática, assim a forma de elaborar uma sequência didática para o ensino de P.A. segue o mesmo padrão de elaboração citado por Cerqueira. Cabe ao professor elaborar uma sequência que envolva as dificuldades e necessidades de aprendizagem dos alunos. Por isso, aqui elaboramos uma sequência para o estudo de progressão aritmética, buscando métodos mais simples de abordar esse conteúdo, de maneira que os alunos possam compreender mais facilmente e consigam relacionar o conteúdo a coisas rotineiras. O que fica muito mais difícil de fazer quando não utilizamos sequência didática e aplicamos o conteúdo de maneira tradicional e rigorosa.

5.3 Sequência Didática para o Estudo de Progressão Aritmética

Sequência didática trata-se de um conjunto de ideias e artifícios pedagógicos relativos a um determinado conteúdo, no qual estes artifícios satisfazem uma ordem de desenvolvimento e execução. As sequências didáticas podem ser caracterizadas também como atividades produzidas e executadas com base em objetivos de aspectos educacionais, os quais devem ser embasados no conhecimento prévio de tanto do professor quanto do aluno. Assim, sequência didática é também uma maneira ou método que possibilita ao educador uma melhor organização de seu trabalho, ampliando sua percepção acerca das necessidades e/ou dificuldades do aluno, bem como uma previsão de possíveis obstáculos de aprendizagem, para assim conseguir driblá-los e junto com o aluno melhorar o nível de aprendizagem.

> *A sequência didática é uma estratégia que valoriza os* ***conhecimentos prévios*** *dos alunos. Isso auxilia os professores no trabalho com o currículo escolar, já que não terão que ensinar tudo o que o PPP propõe, mas aquilo que é mais crítico e difícil para os alunos compreenderem sobre um tema. [...] Em resumo, a sequência didática dá ao aluno um papel mais ativo no seu processo de aprendizagem, já que toda a dinâmica dessa estratégia é desenvolvida a partir da sua participação. Essa*

> *característica é essencial na construção da percepção do estudante enquanto **cidadão em formação**, pois entende desde cedo que tem responsabilidade com relação a sua educação e ao seu futuro. (AUTOR DESCONHECIDO)*

Nesta seção, será buscada a organização de um modelo de sequência didática composta por conteúdos matemáticos que facilitarão a compreensão e aprendizado do conteúdo de progressões aritméticas. Esta sequência servirá como um auxílio ao professor de Matemática, facilitando a aplicação do conteúdo de P.A., pois será iniciado apresentando aos alunos a Soma de Gauss, algumas de suas aplicações, mostrando o problema do papiro de Rhind e solucionando-o junto dos alunos, em seguida, abordaremos os conceitos utilizados. Esta sequência está descrita no esquema abaixo:

⇒ **Soma de Gauss**
⇒ **Aplicações da Soma de Gauss**
⇒ **Conceitos e Conteúdos Utilizados**

Onde cada tópico está organizado com os seguintes subtópicos:

i. **Soma de Gauss**
  - ✓ História de Gauss;
  - ✓ Soma dos 100 primeiros números naturais;
  - ✓ Dedução da fórmula para a soma dos *n* primeiros números naturais.

ii. **Aplicações da Soma de Gauss**
  - ✓ Problema do papiro de Rhind;
  - ✓ Soma dos termos de uma Progressão Aritmética de *n* termos e razão *r*;
  - ✓ Organização piramidal ou triangular de objetos diversos;
  - ✓ Construção de somas menores junto com os alunos.

iii. **Conceitos e Conteúdos Utilizados**
  - ✓ Sequências de Números Naturais;
  - ✓ Axiomas de Peano;
  - ✓ Outra definição para Sequência Numérica;
  - ✓ Números Triangulares;
  - ✓ Progressões Aritméticas.

Este tipo de metodologia coloca o aluno em local de construtor de sua própria aprendizagem, pois participará de todas as etapas da aplicação da sequência didática, participando também, de forma indireta, da elaboração da sequência, uma vez que o planejamento da mesma terá como um dos fundamentos a dificuldade que os estudantes apresentam em relação ao conteúdo.

> *Toda e qualquer sequência didática planejada deve ser desenvolvida para atingir um objetivo, mas não é qualquer objetivo. Esse objetivo deve atender as necessidades do aluno. Ora, se preciso ensinar algo para meu aluno preciso criar uma estratégia de passo a passo para que ele seja capaz de entender o conteúdo que eu, professora, estou oferecendo e por isso é bastante importe selecionar e criar as sequências e ter uma didática adequada para usar em sala. (LIMA, 2018)*

A utilização da sequência didática acima descrita no ensino de progressão aritmética é uma técnica que auxilia o trabalho do professor, pois considera os conhecimentos prévios do aluno a respeito do conteúdo em questão e também introduz o tema aos poucos, trabalhando cada etapa da história do matemático até chegar ao método usado por ele e finalizar com a aplicação do conteúdo propriamente dito, familiarizando os alunos com cada detalhe para que se possa compreender as progressões aritméticas de forma natural e gradual sem que hajam impactos negativos que poderiam ocorrer caso o conteúdo fosse introduzido sem uma “preparação” prévia dos alunos.

6. Considerações Finais

Sabe-se que as técnicas de ensino escolar vêm mudando bastante, já não é possível se prender apenas ao método tradicional, no qual o professor escreve e fala e os alunos apenas copiam e concordam cegamente. Conseguir manter os alunos interessados na aula e principalmente fazer com que eles aprendam tem se tornado cada dia mais difícil, principalmente em meio a tanta inovação tecnológica emergente. O ensino tradicional se tornou obsoleto, ultrapassado e isso causa uma diminuição da aprendizagem. Por isso tem se buscado muito novas técnicas de ensino, novas metodologias e práticas pedagógicas, as quais possam auxiliar o professor em seu trabalho, de forma a facilitar suas tarefas educacionais, e que também e, principalmente, ajudem os alunos a aprender de forma mais rápida e eficaz. Uma prática de ensino que é bastante procurada é a utilização de sequências didáticas assim como modelo usado neste trabalho, pois seu uso facilita o caminho da aprendizagem.

Neste trabalho, buscou-se entender a importância da utilização de sequência didática no ensino de Progressões Aritméticas. Tendo em vista os aspectos e argumentos desenvolvidos para a elaboração e organização deste trabalho, conclui-se que a Soma de Gauss e sua relação com o conteúdo de P.A. são extremamente importantes para uma melhor compreensão do conteúdo de progressão aritmética e, pode nos ser muito útil no cotidiano ajudando a realizar de maneira mais rápida, algumas tarefas que seriam mais difíceis de ser realizadas de forma tradicional.

O modelo de sequência elaborado neste trabalho teve justamente essa finalidade de facilitar o aprendizado do conteúdo de maneira que o estudante pudesse vivenciar a aprendizagem, tendo em vista que as necessidades de aprendizagem dos alunos sempre foram consideradas, e todo o planejamento estratégico da sequência foi elaborado com o intuito de superar essas dificuldades e obter o resultado desejado que é a efetiva aprendizagem de progressões aritméticas por parte dos alunos.

Os objetivos na realização deste trabalho foram alcançados, pois se conseguiu mostrar que as Progressões Aritméticas estão presentes em situações corriqueiras e, também, foi possível mostrar que a Soma de Gauss auxilia na resolução desse tipo de situações-problema. Para tal, foi necessário realizar o desenvolvimento de uma pequena sequência didática, a qual nos norteasse para uma melhor maneira de abordar P.A. em sala de aula, durante a elaboração desta sequência tornou-se perceptível que um simples passo, tal como abordar a relação conteúdo/cotidiano do aluno, é imprescindível para a facilitação da aprendizagem de Progressão Aritmética e de outros tantos conteúdos de matemática e, também, de outras áreas do conhecimento formal.

Referências

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 14724: **Informação e Documentação. Trabalhos Acadêmicos** – Apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, 2002;

AUTOR DESCONHECIDO – **Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.** Disponível em < http://quimsigaud.tripod.com/paegp/> Acesso em 16 mai. 2021;

AUTOR DESCONHECIDO. **Sequência Didática: Guia para a elaboração e execução.** Disponível em < https://www.edocente.com.br/blog/2019/10/01/sequencia-didatica-para-educacao-basica/ > Acesso em 24 mar. 2021;

BATISTA, Rozilene da Costa; OLIVEIRA, Júlia Emanuelly de; RODRIGUES, Sílvia de Fátima Pilegi. **Sequência Didática – Ponderações Teórico-Metodológicas.** Disponível em < https://www.ufmt.br/endipe2016/downloads/233_9937_37285.pdf > Acesso em 23 mar. 2021;

CAMPAGNER, Carlos Alberto – **Progressão aritmética (PA): Fórmula da soma e do termo geral.** Disponível em < http://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/progressao-aritmetica-pa-formula-da-soma-e-do-termo-geral.htm > Acesso em 15 mai. 2021;

CASTRO, Janaína – **Sistema de Numeração Decimal para 1, 2 e 3 anos: Planos de Aula (Sequências Didáticas).** Disponível em < http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/roteiro-didatico-sistema-de-numeracao-decimal-1-2-3-anos-634993.shtml?page=5.5 > Acesso em 05 abr. 2021;

CERQUEIRA, Demerval Santos. **Estratégias Didáticas para o Ensino de Matemática.** Disponível em < https://novaescola.org.br/conteudo/2197/estrategias-didaticas-para-o-ensino-da-matematica > Acesso em 21 mar. 2021;

GEORGE, Iozodara Telma Branco de; MACHADO, Suelen Fernanda – **Papiro de Rhind: Sequências e Progressões.** Disponível em < http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41049 > Acesso em 25 mar. 2021;

GUEDES, Ivan Claudio. **O que é Sequência Didática.** Disponível em < icguedes.pro.br/sequencia-didatica-passo-a-passo/ > Acesso em 24 Mar. 2021;

INFOESCOLA – **Sequência de Fibonacci.** Disponível em < http://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/ > Acesso em 01 fev. 2021;

KOBASHIGAWA, A. H.; ATHAYDE, B. A. C.; MATOS, K. F. de OLIVEIRA; CAMELO, M. H.; FALCONI, S. **Estação Ciência: formação de educadores para o ensino de ciências nas séries iniciais do ensino fundamental**. In: IV Seminário Nacional ABC na Educação Científica. São Paulo, 2008, p.212-217. Disponível em < http://www.cienciamao.usp.br/dados/smm-estacaocienciaformacaodeeducadoresparaoensinodecienciasnasseriesiniciaisdoensinofundamental.trabalho.pdf > Acesso em 10 abr. 2021;

LIMA, Donizete Franco. **A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de Física Moderna no ensino médio.** Disponível em < http://www.seer.uftm.edu.br/revistaeletronica > Acesso em 14, mar. 2022;

LIMA, Valéria Scomparim de; SILVA, Acácio Reis da; CARRARA, Ariane; CÔA, Alexandre; FURLAN, Carla Roberta; GRANDINO, Edi Francisco; ASSARICE, Fernando Spessotto; ALONSO, Gilson A. Saldibas; TAVARES, Márcia Cristina; NATAL, Nathália Gracia; PIMENTA, Patrícia Gomes; RIZZO, Paulo Rogério – **Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações.** Disponível em < http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/112008-08-23-19-28-11.pdf > Acesso em 29 mar. 2021;

LUCENA, Jorge – **O Sistema de Numeração Egípcio.** Disponível em < http://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/matematica/o-sistema-numeracaoegipcio.htm > Acesso em 08 fev. 2021;

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis; supervisão e orientação MILIES, professor Doutor Francisco César Polcino – **História da Matemática no Egito.** Disponível em < http://www.matematica.br/historia/egito.html > Acesso em 14 abr. 2021;

MARIA, Stefany Biorchi. **Sequência Didática no Ensino da Matemática: Uso de Animações e Jogos.** Disponível em <

https://painel.passofundo.ifsul.edu.br/uploads/arq/201807021815151850243666.pdf > Acesso em 21 mar. 2021;

MEIRELLES, Elisa. **Como Organizar Sequências Didáticas.** Disponível em < https://novaescola.org.br/conteudo/1493/como-organizar-sequencias-didaticas > Acesso em 25 mar. 2021;

MILANI, Wilton Natal. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio.** Disponível em < http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/2447 > Acesso em 23 ago. 2021;

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ,Francieli Aparecida. **A história da matemática e o processo de ensino aprendizagem**. Disponível em <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/viewer.html?pdfurl=https%3A%2F%2Feventos.unipampa.edu.br%2Feremat%2Ffiles%2F2014%2F12%2FPO_oliveira_00971876070.pdf&clen=192226> Acesso em 23, jul. 2021;

PEREIRA, Vinicius Mendes Couto – **História da Matemática: Plimpton 322.** Disponível em < http://www.professores.uff.br/profvinicius/plimpton322-1.pdf > Acesso em 30 mar. 2021;

PESSOA, Ana Cláudia Gonçalves. **Sequência Didática.** Disponível em < http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/sequencia-didatica > Acesso em 19 mar. 2021;

SANTOS, Andrios Benfica dos – **Um pouco de História – Gauss e o seu raciocínio brilhante.** Disponível em < http://professorandrios.blogspot.com.br/2012/03/um-pouco-de-historia-gauss-e-o-seu.html > Acesso em 6 mai. 2021;

TUMELERO, Naína. **Tipos de Pesquisa: Abordagem, Natureza, Objetivos e Procedimentos.** Disponível em < https://blog.mettzer.com/tipos-de-pesquisa/ > Acesso em 23 mar. 2021;

TV ESCOLA – **Matemática em Toda Parte: Matemática nas Feiras e Mercados.** Disponível em < http://tvescola.mec.gov.br/tve/video?idItem=4628 > Acesso em 25 fev. 2021;