



**INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS  
CAMPUS MACEIÓ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**RODRIGO MEDEIROS DOS SANTOS**

**EXPLORANDO ALGUNS TÓPICOS DA TEORIA DOS NÚMEROS: UMA  
ABORDAGEM OLÍMPICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Maceió – AL  
2025**

**RODRIGO MEDEIROS DOS SANTOS**

**EXPLORANDO ALGUNS TÓPICOS DA TEORIA DOS NÚMEROS: UMA  
ABORDAGEM OLÍMPICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de graduação em Licenciatura em Física no Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Me. Fernando Antonio Cavalcante Mendonça.

**Co-orientador:** Prof<sup>o</sup>. Me. José Cicero Gomes Farias.

**Maceió – AL  
2025**



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
Ministério da Educação  
Instituto Federal de Alagoas – IFAL  
Campus Maceló

### ATA DE DEFESA DO TCC

Aos 13 dias do mês de junho do ano de 2025, às 16 horas, foi realizada na sala do Auditório Jorge Batista 1 a solenidade de defesa de TCC de **RODRIGO MEDEIROS DOS SANTOS**, com o tema **EXPLORANDO ALGUNS TÓPICOS DA TEORIA DOS NÚMEROS: UMA ABORDAGEM OLÍMPICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL** como pré-requisito para a conclusão do Curso Superior em Licenciatura em Matemática. A banca examinadora do trabalho foi composta por: Prof<sup>o</sup> Me. Fernando Antonio Cavalcante Mendonça (Orientador/Presidente da Banca), Prof. Me. José Cicero Gomes Farias (Coorientador, membro externo), Prof. Me. Enaldo Vieira de Melo (Avaliador 1) e Prof. Me. Rosivaldo Pereira da Silva (Avaliador 2).

#### PARECER FINAL

Após a apresentação e as observações dos membros da banca examinadora, ficou definido que o trabalho foi considerado aprovado com média 9,00. Na oportunidade, o estudante foi notificado do prazo de 30 (trinta) dias, a partir desta data, para proceder os ajustes e entrega da versão final do TCC.

#### ALUNO

RODRIGO MEDEIROS DOS SANTOS

#### ASSINATURA DA BANCA EXAMINADORA

	Orientador/Presidente da Banca
	Coorientador
	Avaliador 1
	Avaliador 2



**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**  
**Instituto Federal de Alagoas**  
***Campus Maceió***  
**Biblioteca Benevides Monte**

---

570.72  
S237e

Santos, Rodrigo Medeiros dos.

Explorando alguns tópicos da teoria dos números [recurso eletrônico] : uma abordagem olímpica nos anos finais do ensino fundamental / Rodrigo Medeiros dos Santos. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 671 KB). – 2025.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader.

Modo de acesso: Internet.

Orientação: Prof. Me. Fernando Antonio Cavalcante Mendonça.

Coorientador: Prof. Me. José Cicero Gomes Farias.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, Maceió, 2025.

1. Matemática. 2. Teoria dos Números. 3. Olimpíadas de Matemática. 4. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). I. Título.

---

**Franciane Monick Gomes de França**  
**Bibliotecária – CRB 4/1831**

Dedico este trabalho de Conclusão de Curso à minha querida Mãe Gisleide Medeiros dos Santos.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a Deus e aos meus amigos, que têm sido, ao longo de toda a minha jornada, fontes inesgotáveis de força, sabedoria e inspiração.

A presença divina em minha vida, que tem sido essencial para que eu pudesse enfrentar os desafios com coragem e perseverança. O amor, a orientação e a proteção de Deus têm me guiado, permitindo-me superar obstáculos e alcançar meus objetivos.

Aos meus amigos, sou igualmente grato por seu apoio incondicional, por estarem ao meu lado nos momentos de dificuldades e celebrações. Sua amizade tem sido um pilar de confiança e encorajamento, tornando cada passo da minha trajetória mais significativa.

Sou eternamente grato a Deus e a cada um de vocês por tudo o que fizeram por mim, pelo impacto positivo em minha vida e por me ajudarem a alcançar este momento tão importante.

Obrigado!

“A dor é passageira, desistir dura pra sempre.”  
(Mike 01, Papamike)

## **RESUMO**

Este trabalho aborda a aplicação de tópicos da Teoria dos Números nos Anos Finais do Ensino Fundamental, com foco em utilização em competições matemáticas, como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). São explorados conceitos como divisibilidade, números primos e congruências, destacando seu papel no desenvolvimento do raciocínio lógico e criativo dos estudantes. A pesquisa combina revisão bibliográfica e análise quantitativa para demonstrar a relevância desses temas na resolução de problemas olímpicos e seu impacto pedagógico. Além disso, o estudo evidencia como a OBMEP e outras Olimpíadas de Matemática contribuem para a popularização da matemática e a identificação de talentos nas escolas públicas.

**Palavras-chave:** Teoria dos Números. Olimpíadas de Matemática. OBMEP. Educação Básica.

## **ABSTRACT**

This paper discusses the application of Number Theory topics in the Final Years of Elementary Education, focusing on their use in mathematical competitions such as the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP). Concepts such as divisibility, prime numbers, and congruences are explored, highlighting their role in developing student's logical and creative reasoning. The research combines a literature review and quantitative analysis to demonstrate the relevance of these topics in solving olympiad problems and their pedagogical impact. Furthermore, the study emphasizes how OBMEP and other Mathematics Olympiads contribute to the popularization of mathematics and the identification of talents in public schools.

**Keywords:** Number Theory. OBMEP. Mathematics Olympiads. Basic Education.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>13</b>
<b>AS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL.....</b>	<b>13</b>
1.1 A OBMEP.....	13
1.3 A TEORIA DOS NÚMEROS.....	15
1.4 OUTRAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL	17
<b>1.4.1 A OLIMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM).....</b>	<b>17</b>
<b>1.4.2 A OLIMPIADA ALAGOANA DE MATEMÁTICA (OAM).....</b>	<b>20</b>
<b>1.4.3 A OLIMPIADA CANGURU DE MATEMÁTICA (OCM).....</b>	<b>23</b>
<b>1.4.4 A OLIMPIADA INTERNACIONAL MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS (OIMSF).....</b>	<b>27</b>
1.5 A OCORRÊNCIA DE TEORIA DOS NÚMEROS E EXEMPLOS CLÁSSICOS DE PROBLEMAS NAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL.....	31
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>32</b>
<b>MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....</b>	<b>32</b>
2.1 TÉCNICAS PARA RESOLUÇÃO EFICAZ DE PROBLEMAS EM TEORIA DOS NÚMEROS NAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL .....	32
2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	34
2.3 ENUNCIÇÃO DE TÉCNICAS ESPECÍFICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE TEORIA DOS NÚMEROS.....	35
<b>2.3.1. FATORAÇÃO DE NÚMEROS.....</b>	<b>35</b>
<b>2.3.2 CONGRUÊNCIAS E ARITMÉTICA MODULAR.....</b>	<b>35</b>
<b>2.3.3 SISTEMAS DIOFANTINOS.....</b>	<b>36</b>
2.4 DISCUSSÃO SOBRE ABORDAGENS CRIATIVAS E ESTRATÉGIAS EFICAZES.	36
<b>2.4.1 GAMIFICAÇÃO.....</b>	<b>36</b>
<b>2.4.2. APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS (PBL).....</b>	<b>36</b>
<b>2.4.3. APRENDIZAGEM ATIVA.....</b>	<b>37</b>
<b>2.4.4. HISTÓRIAS E NARRATIVAS.....</b>	<b>37</b>
<b>2.4.5. APRENDIZAGEM COOPERATIVA.....</b>	<b>37</b>
<b>2.4.6. USO DE TECNOLOGIA.....</b>	<b>38</b>
<b>2.4.7. DESAFIOS E ENIGMAS.....</b>	<b>38</b>
<b>2.4.8. ENSINO POR DESCOBERTA.....</b>	<b>38</b>
<b>2.4.9. EXPLORAÇÃO DE PADRÕES E SEQUÊNCIAS.....</b>	<b>38</b>
<b>2.4.10. REFLEXÃO E DISCUSSÃO.....</b>	<b>39</b>
<b>2.4.11. ENSINO PERSONALIZADO.....</b>	<b>39</b>
<b>2.4.12. EXPLORAÇÃO DE CONEXÕES MULTIDISCIPLINARES.....</b>	<b>39</b>
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>41</b>
<b>TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS OCORRENTES NAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL.....</b>	<b>41</b>
3.1 NÚMEROS INTEIROS: CONCEITOS, PROPRIEDADES E SUAS APLICAÇÕES..	42
<b>3.1.1 CONCEITOS.....</b>	<b>42</b>
<b>3.1.2 A ADIÇÃO E A MULTIPLICAÇÃO EM <math>\mathbb{Z}</math>.....</b>	<b>42</b>

3.2 DIVISIBILIDADE .....	43
3.3 NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS .....	44
<b>3.3.1 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS PRIMOS.....</b>	<b>45</b>
<b>3.3.2 DIVISÃO E FATORAÇÃO .....</b>	<b>45</b>
3.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA.....	46
3.5 CONGRUÊNCIA MODULAR.....	46
3.6 OS TEOREMAS DE WILSON E DE FERMAT (PEQUENO TEOREMA).....	49
3.7 PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS OU PRINCÍPIO DAS GAVETAS.....	51
3.8 DESIGUALDADE DAS MÉDIAS .....	51
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>53</b>
<b>PROBLEMAS ENVOLVENDO TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS</b>	
<b>OCORRENTES NAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO</b>	
<b>BRASIL: SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO .....</b>	<b>53</b>
4.1 PROBLEMAS IDEALIZADOS UTILIZANDO-SE TÓPICOS DE TEORIA DOS	
NÚMEROS COMO SUGESTÃO AO DOCENTE PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA	
E EM AMBIENTE OLÍMPICO.....	65
<b>4.1.1. SUGESTÃO DE QUESTÃO ENVOLVENDO O TEOREMA DE WILSON....</b>	<b>65</b>
<b>4.1.2. SUGESTÃO DE QUESTÕES ENVOLVENDO O TEOREMA DE FERMAT .65</b>	<b>65</b>
<b>4.1.3. SUGESTÃO DE QUESTÕES SOBRE DESIGUALDADE DAS MÉDIAS.....</b>	<b>67</b>
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>71</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>71</b>

## INTRODUÇÃO

As olimpíadas de Matemática são competições que desempenham um papel transformador na Educação Básica no Brasil. Além de estimular o interesse dos alunos pela Matemática, essas competições promovem o desenvolvimento de habilidades essenciais, como raciocínio lógico, pensamento crítico e capacidade de resolver problemas de forma criativa. Dentre as diversas olimpíadas realizadas no país, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) se destaca por sua abrangência e impacto social. Criada em 2005, a OBMEP envolve milhões de estudantes de escolas públicas e privadas, identificando talentos e oferecendo oportunidades de crescimento acadêmico e profissional.

Este trabalho tem como objetivo central analisar como a Teoria dos Números é abordada no contexto das olimpíadas de Matemática, com ênfase na OBMEP e outras olimpíadas. A Teoria dos Números é um ramo fundamental da Matemática que estuda basicamente as propriedades e as relações entre números inteiros, abrangendo tópicos como divisibilidade, números primos, congruências e o Teorema Fundamental da Aritmética, que são frequentemente abordados nas provas da OBMEP, desafiando os alunos a aplicar conceitos matemáticos de maneira profunda e inovadora.

A inclusão da Teoria dos Números na BNCC reforça sua relevância no currículo escolar, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento lógico e analítico dos estudantes. No entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades para compreender e aplicar esses conceitos, o que evidencia a necessidade de metodologias de ensino mais eficazes e engajadoras.

A pesquisa está organizada em seções que abordam desde a contextualização histórica e educacional da OBMEP até a análise de problemas clássicos de Teoria dos Números presente nas competições. Além disso, são propostas sugestões de novos problemas e metodologias que podem ser aplicadas tanto em sala de aula quanto em preparações para olimpíadas.

Os resultados deste trabalho demonstraram que a integração de tópicos avançados de Teoria dos Números com metodologias inovadoras de ensino pode

potencializar o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos. Conclui-se que o uso de abordagens lúdicas e estratégicas não apenas torna o aprendizado mais envolvente, mas também prepara os estudantes para enfrentar desafios matemáticos complexos, tanto em competições quanto em suas futuras trajetórias acadêmicas e profissionais.

No Capítulo 1, serão abordadas as Olimpíadas de Matemática, com destaque para a OBMEP, seus níveis e fases. Em seguida, será apresentada a Teoria dos Números, juntamente com um panorama histórico de sua presença nessas competições. Por fim, serão discutidos alguns escritos sobre resolução de problemas, com ênfase nas contribuições teóricas do matemático húngaro George Pólya (1887–1985) sobre o tema.

No Capítulo 2, serão mostrados alguns caminhos, passos e métodos necessários para a resolução de problemas. Serão elucidadas algumas técnicas específicas para resolver problemas de Teoria dos Números, discutindo-se assim abordagens criativas e estratégias eficazes.

No Capítulo 3, serão vistos alguns tópicos conceituados de Teoria dos Números ocorrentes nas olimpíadas de Matemática na Educação Básica no Brasil, tais como Números inteiros: Conceitos, propriedades e suas aplicações, Divisibilidade, Números Primos, Teorema Fundamental da Aritmética, Teorema de Fermat e Congruência Modular, dentro outros que aparecerem relevantes.

No Capítulo 4, apresentar-se-ão alguns problemas envolvendo Tópicos de Teoria dos Números ocorrentes em olimpíadas de Matemática na Educação Básica no Brasil, com as devidas sugestões de resolução embasadas pelo presente trabalho.

No Capítulo 5, serão dispostos problemas desenvolvidos pelo autor, utilizando-se Tópicos de Teoria dos Números, como sugestão para aplicação em sala de aula e em ambiente olímpico.

Nas Considerações Finais, este estudo relacionará os capítulos já consolidados, no sentido de investigar o uso da Teoria dos Números nas olimpíadas e o quanto deste conteúdo pode ser apreendido pelos discentes do Ensino Fundamental, e possíveis usos de outros conteúdos dessa área, bem como a possível inserção de algumas dessas questões no ensino regular.

## **CAPÍTULO 1**

### **AS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL**

As olimpíadas de Matemática são uma ferramenta poderosa para transformar o ensino e o aprendizado da Matemática no Brasil. Essas competições não apenas despertam o interesse dos alunos pela Disciplina, mas também contribuem para a formação de habilidades essenciais, como pensamento crítico, criatividade e capacidade de resolver problemas. Este capítulo explora o papel da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com um breve histórico, sua estrutura, impacto e contribuições para o ensino da Matemática.

#### **1.1 A OBMEP**

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) tem apresentado um crescimento expressivo ao longo dos anos. Na primeira edição, contou com 10 milhões de inscritos, e hoje registra uma média anual de 17 milhões de participantes. Entre 2014 e 2024, a primeira fase teve uma média de 20 160 440 inscritos, enquanto a segunda fase contou com 8 713 061 participantes, representando uma taxa de avanço de aproximadamente 43% dos alunos da primeira para a segunda fase.

Esses números evidenciam a relevância da OBMEP no estímulo ao aprendizado da Matemática, envolvendo milhões de estudantes e promovendo um alto nível de competição escolar. Esse crescimento não é apenas quantitativo, mas também qualitativo, refletindo o sucesso da Olimpíada em promover o interesse e o engajamento dos alunos com a Matemática.

A competição é estruturada em três níveis distintos, cada um voltado para uma escolaridade específica. Esta divisão tem o objetivo de adequar o nível de dificuldade das provas ao estágio de aprendizado dos participantes, garantindo que todos os alunos possam competir em igualdade de condições e que os desafios sejam apropriados ao seu nível de desenvolvimento escolar.

Segundo a OBMEP (2025), os níveis da olimpíada são divididos conforme o ano escolar dos estudantes:

- **Nível 1:** Esse Nível é destinado aos alunos que estão no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. As provas são elaboradas para testar conhecimentos e habilidades matemáticas compatíveis com o currículo desses anos, abordando conceitos básicos e fundamentais da Matemática.
- **Nível 2:** Voltado para alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. O Nível 2 apresenta desafios um pouco mais complexos, refletindo a progressão natural dos conteúdos matemáticos estudados nesta etapa da Educação Básica. As questões são formuladas para avaliar a compreensão de conceitos matemáticos mais avançados e a capacidade de resolver problemas de maior dificuldade.
- **Nível 3:** Este Nível é destinado aos alunos do Ensino Médio, abrangendo os alunos do 1º ao 3º ano. As provas de Nível 3 são as mais desafiadoras e exigem um entendimento mais aprofundado da Matemática, incluindo conceitos mais avançados e habilidades analíticas. Este nível visa preparar os alunos para futuros desafios acadêmicos e promover o desenvolvimento de competências matemáticas superiores.

A estrutura acima apresentada permite que a OBMEP abranja uma ampla variedade de competências e conhecimentos, proporcionando um espaço para que os alunos possam demonstrar seu potencial e interesse pela Matemática. Entre essas competências, destaca-se pensamento científico, criativo e crítico, promovido pela resolução de problemas que estimulam o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e boa dose de criatividade, que pode (e deve) ser orientada em preparações olímpicas. Ao propor desafios além do cotidiano escolar, a OBMEP incentiva a curiosidade científica e a autonomia intelectual dos alunos.

A OBMEP desempenha um papel crucial na Educação Matemática no Brasil, não apenas em sua capacidade de engajar milhões de alunos e professores, mas também pelo impacto que tem na qualidade do ensino e na identificação de novos talentos.

### 1.3 A TEORIA DOS NÚMEROS

A Teoria dos Números pode ser sintetizada como o ramo da Matemática que estuda as propriedades e relações dos números inteiros, preocupando-se principalmente com números especiais, números primos, divisibilidade, e os problemas importantes originados destes números e temas, e suas características aritméticas. Esta área é extremamente necessária não apenas para entender as relações e operações entre números inteiros, mas também para o desenvolvimento da abstração e do estudo de padrões que são tão importantes no desenvolvimento da Matemática desde o seu cerne como ciência até a sua atual abordagem na educação básica.

Conforme aponta Martinez et al. (2018, p. 2), “diferentemente de muitas outras áreas da Matemática, a Teoria dos Números se distingue muito menos por seus métodos mais sim por seus problemas, cujo tema subjacente é o de número inteiro.” Seus problemas são de fato o que a torna tão linda, pois ao estudá-la vemos que eles abordam com a mesma beleza e elegância problemas que vão desde o conceito mais elementar de divisibilidade até os tópicos que estão na linha de frente do desenvolvimento científico e tecnológico.

Por isso, esta área é tão fundamental, intrigante e desafiadora, e aparece frequentemente nas questões das olimpíadas de Matemática, em desafios que abordam as características aritméticas especiais e seus aprofundamentos, que transitam desde o Ensino Fundamental I até as competições olímpicas de nível superior. Considerando seu grande potencial de colaboração na formação discente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece a importância da Teoria dos Números ao incluí-la como um dos tópicos essenciais no currículo de Matemática para a Educação Básica.

As habilidades que abordam esses objetivos de conhecimento nessa etapa da Educação Básica incluem (EF06MA05) e (EF06MA06) conforme (Brasil, 2018, p. 301). A habilidade da BNCC denotada por EF06MA05 possui os seguintes objetivos:

- Estabelecer relações entre números, como "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de";
- Estabelecer critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000;

- Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor;
- Identificar que números inteiros podem ser decompostos em fatores primos;
- Identificar que a fatoração em fatores primos é única.

Os Conteúdos relacionados com esta habilidade, portanto, são MDC (máximo divisor comum), MMC (mínimo múltiplo comum), Números primos, Números compostos, Múltiplos, Divisibilidade e Fatores.

Já a habilidade da BNCC denotada por EF06MA06 envolve resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e divisor, e possui os seguintes objetivos:

- Reconhecer números primos, múltiplos e divisores;
- Identificar frações equivalentes;
- Compreender, comparar e ordenar frações;
- Reconhecer e compreender o Mínimo Múltiplo Comum entre pelo menos dois números naturais;
- Reconhecer e compreender o Máximo Divisor Comum entre pelo menos dois números naturais;
- Estabelecer estratégias para determinar o Máximo Divisor Comum entre pelo menos dois números naturais.

Assim, essas competências visam a compreensão e aplicação prática de conceitos matemáticos fundamentais, fortalecendo o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas.

A BNCC estabelece diretrizes que orientam o ensino da Matemática, garantindo que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida dos conceitos mais elementares da Matemática já nos primeiros anos de escolarização e o devido aprofundamento ao longo de sua trajetória escolar. Assim, integrar a Teoria dos Números em olimpíadas de Matemática é crucial, pois promove o pensamento lógico e analítico dos alunos, habilidades essenciais para a resolução de problemas complexos. Ao participar dessas competições, os alunos têm a oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos em sala de aula em contextos desafiadores e práticos.

Nas diversas olimpíadas de Matemática, a Teoria dos Números é frequentemente explorada através de problemas que envolvem divisibilidade, números primos, congruências e outros conceitos fundamentais. Esses tópicos são selecionados por sua capacidade de testar a profundidade do entendimento matemático dos alunos e de incentivar o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas.

Os problemas de Teoria dos Números nas competições são projetados para serem desafiadores, incentivando os alunos a pensar de forma crítica e criativa. A resolução desses problemas requer uma compreensão profunda dos conceitos teóricos e a capacidade de aplicar técnicas matemáticas em situações novas e complexas.

#### **1.4 OUTRAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL**

Serão apresentadas outras olimpíadas de Matemática na Educação Básica no Brasil, e até mesmo em âmbito mais regional no país, desde que contemple o Ensino Fundamental, que está no escopo dessa pesquisa.

##### **1.4.1 A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (OBM)**

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é uma competição nacional destinada a alunos do Ensino Fundamental e Médio, com o objetivo de promover o estudo da Matemática e estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico e da resolução de problemas. Criada em 1979, a OBM é uma das principais iniciativas no Brasil para identificar e incentivar talentos na área de Matemática, além de contribuir para a formação de novos estudantes que possam participar de competições internacionais (OBM, 2025).

Os principais objetivos da OBM são:

- **Desenvolver o raciocínio lógico:** A OBM visa proporcionar aos estudantes a oportunidade de aprimorar suas habilidades matemáticas, estimulando o pensamento lógico e analítico através de problemas desafiadores.

- **Estimular o interesse pela Matemática:** A competição busca despertar o interesse dos jovens pela Matemática de uma forma prática e envolvente, afastando a visão de que a disciplina é difícil ou monótona.
- **Identificar talentos:** A OBM tem como um de seus principais objetivos a identificação de estudantes talentosos em Matemática, os quais, futuramente, podem ser encaminhados para competições internacionais, como as Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO).
- **Promover a integração entre escolas e universidades:** A OBM é uma importante ferramenta para aproximar as escolas de ensino básico e superior, permitindo que os alunos interajam com a comunidade acadêmica de Matemática e se familiarizem com o ambiente universitário.

Acerca da estrutura da OBM, ela é dividida em diferentes fases e categorias, com provas distintas para o Ensino Fundamental (dividido entre 6º ao 9º ano) e Ensino Médio. A estrutura geral é a seguinte:

**Fase 1 (Primeira Fase):**

- Consiste em uma prova de múltiplas escolhas (geralmente composta por questões de menor dificuldade), onde os alunos precisam resolver problemas envolvendo conhecimentos matemáticos básicos e intermediários.
- Nesta fase, a classificação é feita com base no número de acertos, e os melhores classificados passam para a fase seguinte.

**Fase 2 (Segunda Fase):**

- A prova é mais desafiadora e envolve questões dissertativas. Nela, os alunos precisam demonstrar o raciocínio e os métodos utilizados para resolver os problemas, indo além de simples cálculos.
- Esta fase é mais voltada para o desenvolvimento de habilidades mais avançadas, que exigem maior capacidade de abstração, lógica e criatividade.

### **Fase 3 (Terceira Fase):**

- Algumas edições da OBM incluem uma fase final com maior grau de dificuldade, destinada a selecionar os alunos que representarão o Brasil nas competições internacionais de Matemática.

Em relação aos critérios de Classificação e Premiação, mais especificamente sobre a distribuição das medalhas, a OBM segue o padrão comum para as olimpíadas de Matemática no geral, a saber:

- **Medalhas e Menções Honrosas:** Os estudantes mais bem classificados recebem medalhas de ouro, prata ou bronze, dependendo de sua performance nas provas. Além disso, há menções honrosas para os alunos que se destacam, mas não alcançam medalhas.
- **Certificados:** Participantes que se destacam em todas as fases da competição também podem receber certificados de participação e mérito, o que é altamente valorizado no currículo escolar dos alunos.

Sobre os impactos da OBM, podemos listar os seguintes, principalmente:

- **Desenvolvimento da Matemática no Brasil:**
  - A OBM desempenha um papel importante no desenvolvimento da Matemática no Brasil, promovendo o interesse pela disciplina e incentivando a criação de novos talentos. Muitos estudantes que se destacam na OBM acabam ingressando em cursos superiores de Matemática, Engenharia e áreas correlatas, contribuindo para o avanço científico e tecnológico do país.
- **Incentivo à pesquisa e à educação matemática:**
  - A OBM também é uma fonte de inspiração para professores e educadores, que podem usar os problemas da competição para enriquecer suas aulas e incentivar seus alunos a pensar de forma crítica e criativa. Além disso, as

Olimpíadas incentivam a formação de grupos de estudo e pesquisa em Matemática nas escolas e universidades.

- **Representação Internacional:**
  - A OBM serve como uma plataforma para a seleção de estudantes para competições internacionais, como a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e outras competições de destaque. A participação de estudantes brasileiros nessas competições tem mostrado crescimento, com cada vez mais medalhas conquistadas ao longo dos anos, o que demonstra o alto nível dos talentos matemáticos do país.

Assim, a OBM é mais do que uma competição: é uma ferramenta poderosa para despertar o interesse pela Matemática, desenvolver habilidades cognitivas essenciais e formar uma rede de talentos que contribuem para a construção de uma sociedade mais lógica e inovadora. Através da OBM, muitos alunos têm a oportunidade de mostrar seu potencial, se aprofundar em áreas da Matemática que talvez não fossem exploradas em sala de aula e se preparar para desafios acadêmicos de alto nível. Com sua longevidade e impacto, a OBM continua a ser um pilar fundamental na educação matemática brasileira.

#### **1.4.2 A OLIMPÍADA ALAGOANA DE MATEMÁTICA (OAM)**

A Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM) é uma competição estadual destinada a estudantes do Ensino Fundamental e Médio das escolas de Alagoas. Seu principal objetivo é estimular o interesse pela Matemática, promover o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático, e identificar novos talentos na área (UFAL, 2025). A OAM busca, assim, incentivar a educação matemática de qualidade, além de proporcionar aos alunos desafios que os preparem para competições de maior nível, como a OBM e a OBMEP. É uma competição anual promovida pelo Instituto de Matemática (IM) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL).

A OAM visa alcançar diversos objetivos educacionais e sociais, entre os quais se destacam:

- **Desenvolver o raciocínio lógico e matemático:** A competição propõe questões que estimulam a capacidade de análise, abstração e resolução de problemas, importantes habilidades matemáticas que podem ser aplicadas em diversos campos do conhecimento.
- **Estimular o interesse pela Matemática:** A Olimpíada busca desmistificar a Matemática e torná-la mais atraente para os alunos, mostrando sua aplicabilidade no dia a dia e sua relação com outras áreas do conhecimento.
- **Identificar talentos matemáticos:** Um dos maiores objetivos da OAM é identificar estudantes com grande potencial na Matemática, que possam representar o estado em competições de nível nacional e até internacional.
- **Fomentar a integração e o trabalho em equipe:** A competição também busca aproximar estudantes de diferentes escolas e fomentar um ambiente de colaboração, onde os alunos podem aprender uns com os outros e compartilhar experiências.

A Olimpíada Alagoana de Matemática é organizada em etapas, com diferentes fases e níveis de dificuldade:

**Primeira Fase:**

- A primeira fase é composta por questões de múltipla escolha, abordando conceitos básicos e intermediários de Matemática. Essa etapa é voltada para avaliar o raciocínio lógico e a capacidade dos alunos em resolver problemas de forma rápida e precisa.
- Todos os alunos inscritos participam dessa fase, e os mais bem classificados têm a chance de avançar para a fase seguinte.

**Segunda Fase:**

- Na segunda fase, as questões são mais desafiadoras e exigem que os alunos apresentem as soluções de forma detalhada e justificada, com um raciocínio claro e preciso. Essas questões normalmente envolvem problemas mais profundos de álgebra, geometria, aritmética e raciocínio lógico.
- Apenas os alunos que se destacam na primeira fase são convocados para a segunda fase, o que garante uma competição mais acirrada entre os participantes.

A OAM é voltada para alunos do Ensino Fundamental (a partir do 6º ano) e do Ensino Médio das escolas públicas e privadas do estado de Alagoas. A competição é uma oportunidade para que estudantes de diversas localidades do estado possam mostrar suas habilidades matemáticas e se engajar em um ambiente de aprendizado que vai além das aulas convencionais.

Ao final da Olimpíada, os estudantes que se destacam recebem medalhas de ouro, prata e bronze. Além disso, aqueles que não conquistam medalhas, mas demonstram um bom desempenho, podem ser agraciados com menções honrosas.

As premiações são um incentivo importante para os alunos, não apenas pelo reconhecimento do seu esforço e dedicação, mas também pela possibilidade de se destacarem em competições maiores. A premiação também promove a entrega de certificados de participação para todos os envolvidos, o que agrega valor ao currículo dos estudantes.

A Olimpíada Alagoana de Matemática tem um grande impacto na educação matemática do Estado de Alagoas, principalmente pelos seguintes motivos:

- **Promoção do interesse pela Matemática:** A competição motiva os alunos a estudar Matemática de maneira mais profunda e investigativa, mostrando que a disciplina pode ser divertida e desafiadora.

- **Identificação e desenvolvimento de talentos:** Muitos dos estudantes que se destacam na OAM acabam participando de competições de maior nível, como a OBM, contribuindo para o crescimento da Matemática no estado e no Brasil.
- **Integração entre escolas:** A OAM proporciona um espaço para que estudantes de diferentes escolas de Alagoas se encontrem, compartilhem conhecimentos e se inspirem mutuamente, criando uma rede de aprendizado e cooperação.
- **Incentivo à formação de professores:** A competição também estimula o desenvolvimento de novas metodologias de ensino da Matemática nas escolas, pois professores frequentemente buscam formas criativas de preparar seus alunos para os desafios da Olimpíada.

A Olimpíada Alagoana de Matemática é uma excelente iniciativa para promover a educação matemática no estado de Alagoas, ajudando a identificar talentos, estimular o pensamento lógico e despertar o interesse pela Matemática de forma interativa e desafiadora. Mais do que uma simples competição, a OAM é uma ferramenta educativa poderosa que contribui para o desenvolvimento acadêmico dos estudantes e para a melhoria do ensino da Matemática nas escolas de Alagoas, criando uma cultura de valorização da Matemática entre os jovens.

### **1.4.3 A OLIMPÍADA CANGURU DE MATEMÁTICA (OCM)**

A Olimpíada Canguru de Matemática (OCM) é uma das mais importantes competições de Matemática do Brasil e de outros países ao redor do mundo, conhecida pela sua proposta inclusiva e desafiadora. Criada em 1991 na França, a competição tem como principal objetivo estimular o interesse e a prática da Matemática entre estudantes de diversas idades, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. A OCM é realizada em diversos países e, no Brasil, tem se consolidado como um evento de grande relevância para o desenvolvimento da educação matemática (Canguru, 2025).

A OCM tem uma série de objetivos fundamentais, sendo os principais:

- **Estímulo ao raciocínio lógico e matemático:** A Olimpíada Canguru busca fomentar nas escolas a prática da Matemática de maneira lúdica e desafiadora, estimulando os alunos a desenvolverem suas habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.
- **Promoção do interesse pela Matemática:** A competição tem como meta atrair os jovens para o universo da Matemática, mostrando que ela pode ser divertida, interessante e aplicável em diversas situações do cotidiano.
- **Desenvolvimento de habilidades cognitivas:** A OCM ajuda os alunos a desenvolverem habilidades de resolução de problemas, concentração, criatividade e perseverança, além de ampliar seu repertório matemático.
- **Integração entre escolas e países:** Ao ser realizada em vários países, a Olimpíada Canguru proporciona um ambiente de competição saudável e de intercâmbio cultural entre jovens de diferentes regiões do mundo, criando uma rede global de estudantes com interesse em Matemática.

A OCM é organizada em diferentes categorias, de acordo com a faixa etária dos participantes. Cada categoria apresenta provas com níveis variados de dificuldade, adaptados à série escolar dos competidores. A competição ocorre em uma única fase, com uma prova composta por questões de múltipla escolha.

As categorias da Olimpíada Canguru são as seguintes:

1. **Benjamim:** Para alunos do Ensino Fundamental (6º e 7º ano).
2. **Júnior:** Para alunos do Ensino Fundamental (8º e 9º ano).
3. **Sênior:** Para alunos do Ensino Médio (1º, 2º e 3º ano).
4. **Master:** Para alunos do Ensino Médio com um nível mais avançado de conhecimento.

As provas da OCM são compostas por questões de múltipla escolha, com um número variável de alternativas. As questões envolvem uma ampla gama de temas matemáticos, como:

- **Geometria:** Figuras geométricas, áreas, volumes e relações geométricas.
- **Aritmética:** Operações matemáticas, frações, porcentagens, razão e proporção.
- **Álgebra:** Expressões algébricas, equações e inequações.
- **Raciocínio lógico:** Problemas de lógica matemática, padrões e sequências numéricas.
- **Combinatória e Probabilidade:** Questões que envolvem a contagem de possibilidades e a análise de eventos probabilísticos.

A OCM é conhecida por sua abordagem criativa e acessível, oferecendo questões que desafiam os alunos a pensarem fora da caixa e a usarem diferentes estratégias para chegar a soluções. As questões são cuidadosamente formuladas para estimular a curiosidade e o interesse pela Matemática.

A inscrição na Olimpíada Canguru de Matemática é aberta a todas as escolas e alunos interessados em participar. As escolas realizam a inscrição em nome de seus alunos, mas também há possibilidade de inscrição individual para estudantes que não estejam vinculados a uma escola participante. A prova é realizada anualmente, geralmente em março, e a participação é aberta a alunos de todo o país.

A Olimpíada Canguru de Matemática oferece uma premiação para os melhores classificados de cada categoria. As premiações incluem:

- **Medalhas:** Os alunos que se destacam recebem medalhas de ouro, prata e bronze, de acordo com o desempenho na competição.
- **Certificados:** Todos os participantes recebem um certificado de participação, e aqueles que se destacam ganham certificados de menção honrosa.
- **Prêmios:** Alguns alunos podem ganhar prêmios adicionais, como livros de Matemática ou outros materiais educativos.

Além disso, a premiação é uma forma de reconhecimento para os estudantes, incentivando-os a continuar seus estudos e a se aprofundar no campo da Matemática.

A OCM tem um impacto significativo tanto no desenvolvimento dos alunos quanto no fortalecimento do ensino de Matemática no Brasil e em outros países. Entre os principais benefícios da competição, destacam-se:

- **Desenvolvimento do raciocínio lógico e estratégico:** As questões da OCM desafiam os alunos a pensarem de maneira lógica e estratégica, habilidades que são fundamentais tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento.
- **Incentivo à busca pelo conhecimento:** Ao oferecer uma competição que vai além da sala de aula tradicional, a Olimpíada Canguru motiva os estudantes a se aprofundarem na Matemática e a buscar novas formas de aprendizagem.
- **Preparação para outras competições:** Muitos alunos que se destacam na OCM acabam sendo encaminhados para outras competições mais avançadas, como a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), e até para competições internacionais, como a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).
- **Integração de estudantes de diferentes culturas:** Por ser realizada em vários países, a OCM proporciona um intercâmbio cultural entre estudantes de diferentes partes do mundo, criando uma rede global de jovens matemáticos.

Portanto, a Olimpíada Canguru de Matemática é uma excelente oportunidade para estudantes de todas as idades testarem seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem suas habilidades e se prepararem para novos desafios acadêmicos. Com sua proposta inclusiva, criativa e estimulante, a competição tem contribuído significativamente para o fortalecimento da educação matemática no Brasil e no mundo.

Além de promover a Matemática de maneira acessível, a OCM inspira alunos a se tornarem mais curiosos, criativos e dedicados ao aprendizado, abrindo portas para novas oportunidades acadêmicas e profissionais.

#### 1.4.4 A OLIMPÍADA INTERNACIONAL MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS (OIMSF)

A Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras (OIMSF) é uma competição internacional de Matemática que visa promover a troca de conhecimentos e experiências entre estudantes de diferentes países, com foco no desenvolvimento do raciocínio lógico e na aplicação de conceitos matemáticos de forma colaborativa e interdisciplinar. Diferente de outras olimpíadas de Matemática, que são predominantemente individuais, a OIMSF é baseada em equipes, o que reforça a importância da cooperação, do trabalho em grupo e da comunicação entre os participantes (Rede POC, 2025).

A Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras foi criada em 2004, com o objetivo de promover a Matemática de maneira criativa e interativa, permitindo que estudantes de diferentes culturas e países possam trabalhar juntos para resolver problemas desafiadores. Organizada por uma rede de escolas e instituições educacionais, a OIMSF tem como foco principal a integração internacional por meio da educação matemática.

Seus principais objetivos são:

- **Desenvolver o raciocínio lógico e matemático:** A competição busca estimular o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade dos participantes, aspectos essenciais para a formação acadêmica e para o desenvolvimento pessoal dos alunos.
- **Fomentar o trabalho em equipe:** Ao contrário de muitas outras competições matemáticas, a OIMSF é uma competição **em equipe**, o que incentiva os alunos a colaborarem, discutirem soluções e trocarem ideias para resolver os problemas propostos.

- **Promover a interculturalidade:** Como a competição envolve equipes de diferentes países, a OIMSF busca criar um ambiente de intercâmbio cultural, onde os alunos aprendem sobre outras culturas enquanto compartilham um objetivo comum.
- **Estimular o interesse pela Matemática:** A competição tem o intuito de mostrar aos estudantes que a Matemática pode ser divertida, desafiadora e altamente envolvente, além de sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana.

A Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras ocorre anualmente e envolve equipes de estudantes de escolas ao redor do mundo. Atualmente, no Regulamento da Edição de 2025, é vedada a participação individual, devendo a competição ser realizada em equipe com, no mínimo, 5 estudantes. A competição é baseada em uma série de questões matemáticas que exigem trabalho colaborativo e pensamento interdisciplinar. As provas da OIMSF são enviadas por correspondência ou por meios digitais, com prazos fixos para que as equipes respondam e entreguem suas soluções. As provas são dissertativas e deverão ser resolvidas em equipe sem o auxílio do professor.

As provas serão divididas em três níveis:

- **Básico** – para os estudantes do 4º ao 6º. ano do Ensino Fundamental
- **Júnior** – para os estudantes do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental
- **Sênior** – para todas as séries do Ensino Médio

Quanto ao número de questões, há a seguinte divisão atual:

- **Básico** – 8 questões para todas as séries.
- **Júnior** – 7º e 8º anos: 9 questões; 9º Ano: 10 questões.
- **Sênior** – 1º Ano do Ensino Médio: 11 questões; 2º Ano do Ensino Médio: 12 questões; 3º Ano do Ensino Médio e (se houver) 4º Ano do Ensino Médio/Técnico: 13 questões.

Acerca das características das provas, tem-se que:

- **Questões interdisciplinares:** Os problemas apresentados na IMSF não se restringem apenas à Matemática pura, mas muitas vezes envolvem conexões com outras áreas do conhecimento, como física, ciências e até mesmo arte. Isso estimula os alunos a pensar de maneira mais ampla e a integrar diferentes áreas do saber.
- **Formato colaborativo:** As questões são pensadas de forma que exijam a colaboração entre os membros da equipe. Isso promove o trabalho em grupo, o compartilhamento de ideias e a construção coletiva de soluções.
- **Desafio e criatividade:** A competição exige que os participantes não apenas conheçam os conceitos matemáticos, mas também que sejam criativos e encontrem soluções inovadoras para problemas complexos.

A participação na Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras está aberta a escolas de diferentes países. Para se inscrever, as escolas devem formar equipes compostas por quatro estudantes, geralmente do Ensino Médio, e um professor responsável. A competição não exige um alto nível de preparação prévia, mas os alunos precisam ter uma boa base de Matemática e ser capazes de trabalhar juntos para resolver problemas desafiadores.

Cada escola pode inscrever quantas equipes desejar, o que permite uma grande diversidade de participantes a cada edição. Além disso, as provas podem ser feitas em diferentes idiomas, dependendo da organização local, o que facilita a participação de escolas de diferentes partes do mundo.

A Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras premia as equipes que se destacam em cada edição com medalhas, certificados de participação e diplomas de honra. Além disso, há uma premiação especial para as equipes que conseguem alcançar

as melhores colocações, incentivando ainda mais o trabalho em equipe e a dedicação ao estudo da Matemática.

A premiação não é o único reconhecimento: a OIMSF é uma oportunidade para que os alunos adquiram uma experiência internacional, que pode ser valiosa tanto no contexto acadêmico quanto profissional. Participar de uma competição internacional como essa é um grande diferencial para os estudantes, já que mostra sua capacidade de trabalhar em equipe e sua habilidade de resolver problemas complexos, duas competências altamente valorizadas em diversas áreas.

A Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras tem um impacto positivo tanto nos estudantes quanto nas escolas que participam. Alguns dos benefícios mais notáveis incluem:

- **Desenvolvimento de habilidades colaborativas:** Ao trabalhar em equipe, os alunos aprendem a colaborar, comunicar-se eficazmente e a resolver problemas de maneira conjunta, habilidades que são essenciais no mundo atual.
- **Integração de conhecimentos:** A OIMSF desafia os estudantes a integrarem conhecimentos de diferentes áreas do saber, ampliando sua visão sobre a Matemática e suas aplicações.
- **Envolvimento em uma experiência internacional:** A competição oferece aos alunos a oportunidade de interagir com colegas de outros países, enriquecendo suas perspectivas culturais e educacionais.
- **Estímulo à continuidade nos estudos de Matemática:** A participação em uma competição desafiadora como a OIMSF pode ser um grande motivador para os alunos continuarem seus estudos em áreas como Matemática, Física, Engenharia e outras ciências exatas.

Deste modo, a Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras é mais do que uma simples competição de Matemática: é uma plataforma internacional que promove a troca de conhecimento, o desenvolvimento de habilidades colaborativas e o

intercâmbio cultural entre estudantes de todo o mundo. Ao trabalhar em equipe para resolver problemas matemáticos desafiadores, os alunos não só aprimoram suas habilidades acadêmicas, mas também aprendem lições valiosas sobre como se comunicar, pensar de forma criativa e integrar diferentes áreas do conhecimento.

Essa competição oferece uma oportunidade única para os jovens talentos de Matemática se destacarem no cenário internacional, ao mesmo tempo em que contribui para a construção de uma rede global de aprendizagem.

### **1.5 A OCORRÊNCIA DE TEORIA DOS NÚMEROS E EXEMPLOS CLÁSSICOS DE PROBLEMAS NAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL**

Nas olimpíadas de Matemática, a Teoria dos Números é frequentemente explorada por meio de problemas que envolvem divisibilidade, números inteiros, números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, Sequências Números, Testes de primariedade e números compostos, Teorema de Fermat e Congruência Modular. Esses tópicos são selecionados por sua capacidade de testar a profundidade do entendimento matemático dos alunos e de incentivar o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas.

Problemas clássicos incluem questões sobre divisibilidade, propriedades de números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética e congruência. Por exemplo, um problema pode envolver a prova de que a soma de dois números primos é sempre par, exceto em um caso específico.

Esses problemas não apenas reforçam os conceitos aprendidos, mas também ajudam a desenvolver a habilidade dos alunos de raciocinar logicamente e de formular e testar hipóteses matemáticas. Através da análise de exemplos clássicos e da resolução de problemas desafiadores, os alunos aprofundam seu entendimento da Teoria dos Números e se preparam melhor para enfrentar competições futuras e aplicar esses conhecimentos em contextos acadêmicos e profissionais.

## CAPÍTULO 2

### MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, apresentamos algumas regras essenciais para a resolução eficaz de problemas matemáticos envolvendo a Teoria dos Números. Essas regras devem ser consideradas como orientações importantes para garantir que o processo de resolução seja bem-sucedido. Vamos detalhá-la a seguir, explicando seu propósito e como podem ser aplicadas.

#### 2.1 TÉCNICAS PARA RESOLUÇÃO EFICAZ DE PROBLEMAS EM TEORIA DOS NÚMEROS NAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL

A seguir, listam-se regras para uma resolução eficaz de problemas em Teoria dos Números nas olimpíadas de Matemática na Educação Básica no Brasil (Oliveira & Corcho Fernandez, 2012):

**Regra 1** – Ler bem o enunciado do problema e utilizar todas as informações disponíveis.

Antes de iniciar a resolução de um problema, é fundamental que o enunciado seja lido com atenção. Muitas vezes, detalhes importantes estão presentes e podem fazer toda a diferença na solução. Ignorar alguma informação relevante ou mal interpretá-la pode levar a resultados incorretos ou soluções incompletas.

Um exemplo de aplicação desta regra é o seguinte: suponha que o enunciado de um problema mencione um valor que, embora não pareça essencial à primeira vista, mostra-se crucial para a solução.

Por isso, é necessário verificar e utilizar todos os dados fornecidos.

**Regra 2** – Fazer casos particulares ou casos mais simples de problemas similares para adquirir familiaridade com o problema.

Em muitos casos, resolver um problema mais simples ou criar uma versão particular do problema original pode ajudar a entender melhor o que está sendo pedido. Compreender casos mais simples permite visualizar padrões e insights que facilitam a resolução do problema principal.

A aplicação desta regra pode ser vista no seguinte exemplo: se o problema envolver uma sequência de números, começar resolvendo a sequência para valores menores pode fornecer uma intuição para resolver o caso geral. Isso também ajuda a identificar possíveis padrões que serão úteis para a solução completa.

**Regra 3** – Mudar a representação do problema, transformando-o em um problema equivalente.

Às vezes, a forma como o problema é apresentado pode dificultar a resolução. Uma boa estratégia é mudar a representação do problema para torná-lo mais acessível ou mais fácil de entender. Isso pode incluir reescrever o problema de maneira diferente, criar um gráfico, ou até mesmo usar variáveis e notações que facilitem a manipulação matemática.

Esta regra pode ser enxergada por meio do seguinte exemplo: um problema envolvendo uma equação pode ser mais fácil de resolver se for representado graficamente. Transformar uma situação de palavras em uma equação ou vice-versa também pode tornar a resolução mais direta.

**Regra 4** – Usar a imaginação pesquisando caminhos alternativos. Extrapolar os limites.

Em muitos problemas, a solução mais óbvia nem sempre é a mais eficiente ou a mais fácil de encontrar. Pensar de maneira criativa e procurar diferentes abordagens pode revelar caminhos mais rápidos ou soluções inesperadas. Extrapolar os limites significa pensar além dos parâmetros convencionais e explorar novas formas de olhar o problema.

Estas técnicas podem ser aplicadas por intermédio do seguinte exemplo: em um problema de geometria, pode-se imaginar como seria a solução se o problema fosse modificado em alguma parte, como mudar as dimensões ou as condições iniciais.

Em resumo, essas técnicas são fundamentais para guiar o raciocínio lógico e a abordagem metodológica na resolução de problemas matemáticos, sendo especialmente úteis para os desafios propostos pela OBMEP.

Elas ajudam a organizar o pensamento, explorar diferentes perspectivas e identificar soluções criativas e eficientes. Ao praticar essas estratégias, o processo de resolução se torna mais organizado, e as dificuldades enfrentadas durante o caminho podem ser superadas com mais facilidade.

Com o tempo, essas regras se tornam ferramentas naturais para qualquer estudante de Matemática que as pratique sistematicamente, tornando o desafio da resolução de problemas mais acessível e gratificante, tanto para os problemas do cotidiano quanto para as questões da OBMEP.

## 2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Uma das metodologias eficazes para o ensino de Matemática é a resolução de problemas, proposta por George Pólya (2006), em sua famosa obra **A Arte de Resolver Problemas**, cuja ano da primeira publicação foi 1945. Segundo Pólya, o ensino da Matemática deve ser voltado para o desenvolvimento do pensamento crítico, em que o professor atua como mediador e não apenas como transmissor de conteúdo.

A resolução de problemas ajuda os alunos a desenvolverem estratégias diversas para encontrar soluções, estimulando o raciocínio lógico e a criatividade. E ao criar um ambiente competitivo, as olimpíadas de Matemática contribuem para o desenvolvimento da Matemática como disciplina essencial na educação básica.

Como Pólya (2006, p.10) afirma:

A Matemática não é um esporte para espectadores; não se pode desfrutar dela nem aprendê-la sem a participação ativa; por isso o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, professores de Matemática, especialmente se considerarmos como nosso principal objetivo, o primeiro de nossos objetivos, o de ensinar o estudante a pensar.

Portanto, a combinação da OBMEP com a metodologia de resolução de problemas não apenas prepara os alunos para as competições, mas também contribui significativamente para o aprimoramento do ensino de Matemática, especialmente em escolas públicas, em que a motivação dos alunos muitas vezes é um desafio.

## 2.3 ENUNCIÇÃO DE TÉCNICAS ESPECÍFICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE TEORIA DOS NÚMEROS

A Teoria dos Números é uma vasta subárea da Matemática, e lida com as propriedades (e as suas relações) dos números inteiros.

Neste ínterim, há várias técnicas específicas para resolver problemas dessa área, tais como (dentre outras; algumas das quais vistas nos próximos capítulos):

### 2.3.1. FATORAÇÃO DE NÚMEROS

- Teorema Fundamental da Aritmética: Todo número inteiro maior que 1 pode ser decomposto de forma única como um produto de primos.
- Algoritmo de Euclides: Usado para calcular o maior divisor comum (MDC) de dois números inteiros.
- Testes de primalidade: Métodos para determinar se um número é primo, como o teste de divisibilidade por números pequenos.

### 2.3.2 CONGRUÊNCIAS E ARITMÉTICA MODULAR

- Teorema Chinês do Resto: Permite resolver sistemas de congruências lineares com modulares coprimos.
- Teorema de Fermat: Para um número primo  $p$ , se  $a$  é um número inteiro e  $p$  não divide  $a$  (escrevemos  $p \nmid a$ ), então  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .
- Teorema de Euler: Generaliza o Teorema de Fermat para números não necessariamente primos.

- Reduções modulares: Técnicas de simplificação de grandes números em problemas de congruências.

### 2.3.3 SISTEMAS DIOFANTINOS

- Equações Diofantinas Lineares: São resolvidas através do Algoritmo de Euclides estendido.

## 2.4 DISCUSSÃO SOBRE ABORDAGENS CRIATIVAS E ESTRATÉGIAS EFICAZES

Resolver problemas de Matemática na Educação Básica de forma criativa e eficaz exige uma combinação de abordagens pedagógicas, estratégias envolventes e uma mentalidade flexível tanto para os professores quanto para os alunos. Aqui estão algumas abordagens criativas e estratégias eficazes para enfrentar desafios matemáticos nesse nível de ensino (Pinto, 2019):

### 2.4.1 GAMIFICAÇÃO

- **Transformar problemas em jogos:** Criar atividades matemáticas em formato de jogos, como quiz, bingo matemático ou desafios de tempo, torna o aprendizado mais divertido e engajador. Usar plataformas como Kahoot! ou aplicativos educativos também pode tornar as lições interativas.
- **Desafios em grupo:** Organizar competições matemáticas em sala de aula, onde os alunos se dividem em equipes e resolvem problemas colaborativamente, cria um ambiente de colaboração e competição saudável.

### 2.4.2. APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS (PBL)

- **Problemas contextualizados:** Apresentar problemas matemáticos baseados em situações do cotidiano dos alunos, como calcular o custo de uma festa, planejar um orçamento ou analisar dados sobre esportes ou filmes. Isso ajuda a conectar o conteúdo abstrato com o mundo real.
- **Exploração de problemas complexos:** Introduzir problemas mais amplos que exijam pesquisa, discussão e tentativas de solução, incentivando os alunos a explorar múltiplas soluções e abordagens.

### 2.4.3. APRENDIZAGEM ATIVA

- **Exploração com material manipulativo:** Utilizar blocos de base dez, régua de fracionamento, tangram ou outros materiais manipuláveis para que os alunos possam visualizar e experimentar conceitos matemáticos de maneira concreta.
- **Ensino de “pensamento visual”:** Incentivar os alunos a desenharem diagramas, gráficos e outras representações visuais de problemas. Isso pode ser especialmente útil para resolver problemas de geometria, álgebra e até aritmética.

### 2.4.4. HISTÓRIAS E NARRATIVAS

- **Resolver problemas com histórias:** Contar uma história ou criar um cenário fictício que envolva uma situação matemática. Por exemplo, construir uma narrativa onde os alunos precisam resolver um enigma ou missão usando suas habilidades matemáticas.
- **Matemática em contextos culturais:** Explorar como diferentes culturas e civilizações abordaram conceitos matemáticos ao longo da história, ajudando a contextualizar os conceitos e a tornar o aprendizado mais interessante.

### 2.4.5. APRENDIZAGEM COOPERATIVA

- **Trabalho em duplas ou pequenos grupos:** Permitir que os alunos resolvam problemas em grupos pequenos. Isso fomenta a colaboração, a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento.
- **Método "Think-Pair-Share":** Em uma primeira etapa, os alunos refletem individualmente sobre o problema (Think), depois discutem suas ideias com um parceiro (Pair) e, finalmente, compartilham suas soluções ou raciocínios com a classe inteira (Share).

#### 2.4.6. USO DE TECNOLOGIA

- **Aplicativos e plataformas educativas:** Utilizar softwares e aplicativos interativos, como GeoGebra, Desmos ou outros recursos online, para ilustrar conceitos matemáticos e promover experimentações digitais.
- **Simulações e animações:** Aplicar vídeos ou animações que mostrem o funcionamento de conceitos matemáticos complexos de uma maneira visualmente atraente e intuitiva.

#### 2.4.7. DESAFIOS E ENIGMAS

- **Problemas desafiadores:** Propor problemas de raciocínio lógico, enigmas e quebra-cabeças que envolvam a aplicação de conceitos matemáticos de maneira criativa. Esses problemas ajudam a desenvolver o pensamento crítico e a perseverança dos alunos.
- **Sequências de problemas:** Criar uma sequência de problemas interligados que ajudem os alunos a aprender progressivamente sobre um conceito específico, dando-lhes uma sensação de conquista e fluidez.

#### 2.4.8. ENSINO POR DESCOBERTA

- **Guiar o aluno para a descoberta:** Em vez de apenas apresentar o conceito, guiar os alunos em uma jornada de descoberta. Por exemplo, ao ensinar frações, permita que os alunos descubram por si mesmos como dividir uma pizza ou um objeto e, gradualmente, deduzam as regras.
- **Indução e dedução:** Fomentar a capacidade dos alunos de chegar a conclusões por meio da indução (de exemplos) e dedução (de axiomas e teoremas).

#### 2.4.9. EXPLORAÇÃO DE PADRÕES E SEQUÊNCIAS

- **Identificação de padrões:** Estimular os alunos a identificar padrões numéricos ou geométricos. Trabalhar com sequências como progressões

aritméticas ou geométricas pode ser um excelente ponto de partida para explorar conceitos de forma intuitiva.

- **Uso de tabelas e gráficos:** Ao estudar padrões, fazer os alunos registrar dados em tabelas e representá-los graficamente pode ajudá-los a ver a Matemática de uma maneira visual e dinâmica.

#### 2.4.10. REFLEXÃO E DISCUSSÃO

- **Espaço para reflexões:** Após resolver um problema, promover discussões em sala de aula sobre as estratégias usadas. Isso ajuda os alunos a refletirem sobre suas soluções, compreendendo o raciocínio por trás das respostas.
- **Encorajar questionamentos:** Incentivar os alunos a fazer perguntas sobre o problema e a investigar diferentes métodos de resolução, mostrando que há mais de uma maneira de abordar um desafio.

#### 2.4.11. ENSINO PERSONALIZADO

- **Diferenciação do ensino:** Adaptar os problemas de acordo com os níveis de habilidade dos alunos. Para alguns, pode ser necessário um apoio maior, enquanto outros podem ser desafiados com problemas mais complexos.
- **Apoio adicional:** Criar grupos de apoio para alunos com dificuldades, oferecendo materiais de reforço ou desafios adicionais para alunos avançados.

#### 2.4.12. EXPLORAÇÃO DE CONEXÕES MULTIDISCIPLINARES

- **Conexão com outras áreas do conhecimento:** Relacionar a Matemática com outras disciplinas, como Ciências, História, Arte e Geografia. Por exemplo, estudar simetrias em arte ou geometria em arquitetura pode ajudar a contextualizar o aprendizado matemático.

Essas estratégias não só tornam as aulas de Matemática mais interessantes e dinâmicas, como também ajudam a desenvolver habilidades de pensamento crítico,

resolução de problemas e colaboração, essenciais para o sucesso acadêmico e na vida cotidiana dos alunos. A chave é manter o ensino envolvente, relevante e desafiador, permitindo que os alunos se sintam motivados a explorar e aprender mais sobre a Matemática.

## CAPÍTULO 3

### TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS OCORRENTES NAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL.

Neste capítulo, abordaremos os principais temas da Teoria dos Números que vem ganhando destaque nas olimpíadas de Matemática voltadas para a Educação Básica no Brasil. A Teoria dos Números, área da matemática dedicada ao estudo das propriedades e relações dos números inteiros, será explorada com foco especial nos tópicos frequentemente presentes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Atualmente, a OBMEP é a principal iniciativa que promove disseminação da Matemática em grande escala entre os estudantes brasileiros, além de ser uma ferramenta essencial para identificar e incentivar novos talentos na área.

Este capítulo será focado em apresentar, de forma simplificada e objetiva, os principais resultados necessários para a resolução de problemas nível olímpico, especialmente aqueles que podem ser trabalhados no Ensino Fundamental II. Para isso, desenvolveremos a explicação dos conteúdos essenciais, acompanhada de exemplos e exercícios com grau de dificuldade moderado.

O intuito é garantir que o material seja claro e acessível tanto para professores que desejam utilizá-lo em sala de aula quanto para estudantes que pretendem estudar por conta própria, desde que já tenham tido um primeiro contato com os temas abordados.

Como principal referência, utilizaremos o livro: Aritmética – COLEÇÃO PROFMAT (Hefez et al., 2022), buscando oferecer ao docente uma base sólida e direcionada para o Ensino Fundamental, com foco na compreensão dos conceitos e dos resultados mais relevantes para o desenvolvimento das habilidades matemática exigidas em competições.

## 3.1 NÚMEROS INTEIROS: CONCEITOS, PROPRIEDADES E SUAS APLICAÇÕES

### 3.1.1 CONCEITOS

Os números inteiros surgiram da necessidade de resolver situações em que os números naturais não eram suficientes, como por exemplo em contexto de perdas, dívidas e temperaturas abaixo de zero. Assim, o conjunto dos números inteiros abrange os números positivos, negativos e o zero, permitindo realizar operações de subtração e outras mais complexas *sem sair do conjunto*.

As operações de adição, subtração e multiplicação estão bem definidas em  $\mathbb{Z}$ , ou seja, o resultado da operação entre quaisquer dois números inteiros continua no sendo um número inteiro. O conjunto dos *números inteiros*, denotado por  $\mathbb{Z}$ , é formado pelos números naturais, seus opostos e o zero, ou seja:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \},$$

juntamente com as operações de adição  $(a, b) \rightarrow a + b$  e da multiplicação  $(a, b) \rightarrow a * b$  (denotaremos  $a * b$  também por  $a \times b$ , ou ainda por  $ab$ ).

Em  $\mathbb{Z}$  há também um subconjunto que se destaca: o conjunto dos *números naturais*:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}.$$

A nossa abordagem será essencialmente axiomática, ou seja, a partir de uma lista razoavelmente pequena de propriedades usando a adição e a multiplicação.

### 3.1.2 A ADIÇÃO E A MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{Z}$

As propriedades de adição e de multiplicação em  $\mathbb{Z}$  possuem são as seguintes:

**I. A adição e a multiplicação são bem definidas:**

Para todos  $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ :

se  $a = a'$  e  $b = b'$ , então:  $a + b = a' + b'$  e  $a * b = a' * b'$ .

**II. A adição e a multiplicação são comutativas:**

Para todos  $a, b \in \mathbb{Z}$ , então  $a + b = b + a$ , e  $a * b = b * a$ .

**III. A adição e a multiplicação são associativas:**

Para todos  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , temos que:  $(a + b) + c = a + (b + c)$  e  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .

**IV. A adição e a multiplicação possuem elementos neutros:**

Para todos  $a \in \mathbb{Z}$ , existem 0 e 1 (elementos neutros) tais que  $a + 0 = a$  e  $a * 1 = a$ .

**V. A adição possui elementos simétricos:**

Para todos  $a \in \mathbb{Z}$ , existe  $b = (-a)$  tal que  $a + b = 0$ .

**VI. A multiplicação é distributiva com relação à adição:**

Para todos  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , tem-se  $a * (b + c) = a * b + a * c$ .

Essas propriedades garantem o funcionamento adequado das operações em  $\mathbb{Z}$  e servem como base para a resolução de diversos problemas.

**3.2 DIVISIBILIDADE**

Dados dois números inteiros quaisquer,  $m$  e  $n$ , afirmamos que  $n$  é um divisor de  $m$  quando a divisão de  $m$  por  $n$  resulta em um número inteiro. Nesse caso, também podemos dizer que  $m$  é um múltiplo de  $n$  ou que  $n$  divide  $m$ , o que representamos simbolicamente como  $n|m$ , se existir um  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $m = kn$ . Caso não exista tal inteiro, escrevemos  $n \nmid m$  para indicar que  $n$  não divide  $m$ .

A partir da definição de divisibilidade, enunciamos propriedades importantes:

**Proposição 1:** Sejam  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ . Então valem as seguintes propriedades:

- I) Se  $q | m$  e  $q | n$ , então  $q | (mx + ny)$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
- II) Se  $q | m$ , então  $m = 0$  ou  $|q| \leq |m|$ .
- III) Se  $m | n$  e  $n | p$ , então  $m | p$ .

**Demonstração:**

I) Se  $q | m$  e  $q | n$ , então existem inteiros  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $m = k_1q$  e  $n = k_2q$ . Portanto, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{Z}$ , temos:

$mx + ny = (k_1q)x + (k_2q)y = q(k_2x + k_2y) = qk_3$ , onde  $k_3 = k_1x + k_2y$  é um número inteiro. Assim, concluímos que  $q \mid (mx + ny)$ .

II) Vamos considerar dois casos:

**Caso 1:**  $m = 0$ .

Neste caso, basta  $k = 0$ , e teremos  $m = kq$ , o que implica que  $q \mid m$ .

**Caso 2:**  $m \neq 0$ .

Se  $m \neq 0$ , então  $m = kq$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Com  $|k| \geq 1$ , temos que  $|m| = |kq| = |k||q| \geq 1 \cdot |q| = |q|$ . Portanto,  $|q| \leq |m|$ .

III) Se  $m \mid n$  e  $n \mid p$ , então existem inteiros  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $n = k_1m$  e  $p = k_2n$ . Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:  $p = k_2n = k_2(k_1m) = (k_2k_1)m = k_3m$ , onde  $k_3 = k_2k_1$  é um número inteiro. Portanto, concluímos que  $m \mid p$ .

Essas propriedades são fundamentais para resolver problemas envolvendo a divisibilidade, especialmente em contextos educacionais. Dominar esses conceitos é essencial para que os estudantes possam avançar em tópicos mais complexos.

### 3.3 NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS

Os números primos são números naturais maiores que 1 que possuem apenas dois divisores positivos: o 1 e o próprio número. Por exemplo, os números 2, 3, 5, 7 são primos, pois só podem ser divididos, com resto nulo, por 1 e por eles mesmos.

Por outro lado, se um número não for primo, ele é chamado de número composto, ou seja, ele pode ser dividido por um número diferente de 1 e dele mesmo. Por exemplo, o número 4 é composto, pois ele pode ser dividido por 1, e ele mesmo (4), e, além disto, por 2.

### 3.3.1 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS PRIMOS

A partir da definição de números primos e compostos, enunciamos propriedades importantes:

#### I. Sejam dois números primos $m$ e $n$ . Se $n$ divide $m$ , então $n = m$ .

Se temos dois números primos  $n$  e  $m$ , e sabemos que  $n$  divide  $m$  (ou seja,  $n|m$ ), então  $n$  tem que ser igual a  $m$ . Isso acontece porque um número primo só pode ser divisível por ele mesmo ou pelo número 1. Assim, se  $n$  divide  $m$  e  $n$  e  $m$  são primos, então  $n$  deve ser igual a  $m$ .

No caso de  $m$  ser primo e  $n$  ser um inteiro a princípio indeterminado, então se  $n|m$ , implica que  $m$  é um múltiplo de  $n$ , o que ocorre somente se  $n = m$ , como já vimos, ou se  $n = 1$ , pois 1 divide todo inteiro.

#### II. Se o máximo divisor comum (mdc) entre $n$ e $m$ é 1, então $n$ não divide $m$ .

Se  $\text{mdc}\{n, m\} = 1$ , isso significa que  $n$  e  $m$  não tem nenhum divisor comum além do número 1. Ou seja,  $n$  e  $m$  são coprimos. Então, nem  $n$  divide  $m$ , e nem  $m$  divide  $n$ . Neste caso, não existe inteiros  $k_1, k_2$  e  $q$  tais que  $m = k_1q$  e  $n = k_2q$ , pois, se existissem, diríamos que  $m$  e  $n$  são múltiplos de  $q$ , e, conseqüentemente,  $\text{mdc}\{n, m\} \neq 1$ .

Observe-se que a recíproca dessa propriedade não é verdadeira, pois existem inúmeros  $m$  e  $n$  inteiros que não se dividem *um pelo outro*, mas cujo mdc não é 1, como ocorre com 4 e 10: vê-se que  $4 \nmid 10$ , e  $10 \nmid 4$ , mas  $\text{mdc}\{4, 10\} = 2 \neq 1$ , pois eles, 4 e 10, possuem divisor comum não-unitário.

### 3.3.2 DIVISÃO E FATORAÇÃO

Quando falamos sobre números compostos, estamos dizendo que eles podem ser divididos em dois ou mais fatores que são naturais menores que o próprio número. Por exemplo:

- i) 4 pode ser fatorado como  $2 * 2$ .
- ii) 6 pode ser fatorado como  $2 * 3$ .
- iii) 8 pode ser fatorado como  $2 * 2 * 2$ .
- iv) 10 pode ser fatorado como  $2 * 5$ .

Esses fatores podem ser números primos ou compostos, porém, a fatoração de números compostos, sempre que quisermos, pode ser feita apenas através de potências de expoentes naturais de números primos, o que é garantido pelo Teorema Fundamental da Aritmética.

### 3.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Todo número inteiro  $n > 1$  pode ser expresso de maneira única como um produto de potências de expoentes naturais de fatores primos, não importando a ordem dos fatores. Em outras palavras, qualquer número natural composto pode ser decomposto em um produto de potências de expoentes naturais de números primos, e essa decomposição é única, a menos da ordem dos fatores.

Em outras palavras: sejam os primos  $p_1, p_2, \dots, p_m$  e os números naturais ou nulo, mas nem todos nulos,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . O número inteiro  $n > 1$  é univocamente escrito como, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, como:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Observe-se que, se todos os expoentes fossem ambos nulos, *geraríamos* o número inteiro 1. Mas como definimos nem todos nulos, se m-1 expoentes forem nulos e o outro expoente for 1, geraremos todos os números inteiros primos.

### 3.5 CONGRUÊNCIA MODULAR

Um tópico extremamente importante no estudo de problemas olímpicos de teoria dos números é com certeza o de congruência modular. Sua relevância se dá pelo fato de podermos introduzir ferramentas mais sofisticadas para a resolução e demonstrações dos problemas olímpicos com os teoremas de Euler, Fermat e Wilson que veremos mais

adiante bem como estudar de forma mais objetiva problemas que envolvem fenômenos periódicos onde o que de fato nos interessa são os restos.

Veremos dois exemplos que trazem situações que nos dão uma ideia de um problema motivador.

**Exemplo 01:** Um casal comprou um apartamento financiado pela caixa econômica federal em 215 prestações mensais. Se a compra foi realizada em fevereiro em que mês o casal deverá concluir o pagamento do imóvel?

**Solução:** Considerando que numeramos, por conveniência, os meses do ano do 1° ao 12° mês e que fevereiro é o mês 2. Podemos perceber que para encontrar o mês que terminam as 215 prestações do financiamento devemos obter o resto da divisão de  $2 + 215 = 217$  por 12 (total de meses do ano)?

$$217 = 18 * 12 + 1.$$

Vemos assim que o casal terminará de pagar o imóvel no mês 1, que corresponde ao mês de janeiro.

**Exemplo 02:** Um caminhoneiro assumiu um frete entre duas cidades cujo percurso dura em média 127 horas. Determine que horas o caminhoneiro deve chegar ao seu destino sabendo que ele partiu às 05 da manhã.

**Solução:** Para encontrar o horário de chegada do caminhoneiro devemos obter o resto da divisão de  $5 + 127 = 132$ , pois o dia tem 24 horas:

$$132 = 5 * 24 + 12.$$

Logo, considerando que a viagem ocorreu no tempo previsto, o caminhoneiro chegou ao seu destino ao meio dia, 12 horas.

Nos exemplos acima queremos estudar números que deixam o mesmo resto quando divididos por um certo número natural (se estamos em abril, daqui a 12 meses estaremos em abril novamente e se agora são 18 horas, daqui a 24, 48, 72 horas será 18 horas novamente). É muito comum aparecerem situações, semelhantes ou não aos exemplos, onde o que nos interessa de fato é o resto que números inteiros deixam ao serem divididos por um outro inteiro  $m$ .

**Definição 3.5.1:** Se  $a$  e  $b$  são números inteiros dizemos que  $a$  é congruente a  $b$  módulo  $m$  ( $m > 0$ ) se  $m|(a - b)$ . Denotamos isto por  $a \equiv b \pmod{m}$ . Se  $m \nmid (a - b)$ , dizemos que  $a$  é incongruente a  $b$  módulo  $m$  e denotamos por  $a \not\equiv b \pmod{m}$ .

**Exemplo 03:** Observe que  $123 \equiv 3 \pmod{5}$  pois como vemos facilmente  $5|(123 - 3)$ . Por outro vemos que  $5 \nmid 99$  e como  $99 = 100 - 1$  temos que  $100 \not\equiv 1 \pmod{5}$ . Se observarmos bem vemos que todo inteiro é da forma:  $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ . Ou Seja:

$$\begin{aligned} 5k &\equiv 0 \pmod{5}, & 5k + 1 &\equiv 1 \pmod{5}, & 5k + 2 &\equiv 2 \pmod{5} \\ 5k + 3 &\equiv 3 \pmod{5}, & 5k + 4 &\equiv 4 \pmod{5} \end{aligned}$$

Assim, todo número inteiro é congruente, módulo 5, ao seu resto na divisão por 5. Podemos estender esse raciocínio para módulo  $m$  e uma consequência dessa propriedade são as classes de equivalência.

**Propriedades Importantes:** Seja  $m \in \mathbb{N}^*$ . Para todos inteiros  $a, b, c, d$  valem as seguintes propriedades:

- I. (Reflexividade):  $a \equiv a \pmod{m}$ .
- II. (Simetria): se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $b \equiv a \pmod{m}$ .
- III. (Transitividade): se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $b \equiv c \pmod{m}$ , então  $a \equiv c \pmod{m}$ .
- IV. (Adição e Subtração): Em uma congruência podemos sempre adicionar ou subtrair membro a membro:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{m} \\ a - c \equiv b - d \pmod{m} \end{cases}$$

De forma bem particular temos que se  $a \equiv b \pmod{m}$  então  $ka \equiv kb \pmod{m}$

- V. (Multiplicação): Em uma congruência podemos sempre multiplicar membro a membro:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}.$$

- VI. (Potenciação): Decorre como consequência da propriedade anterior quando temos  $a = c$  e  $b = d$  ao fazer  $k$  multiplicações verificamos que:

$$\text{se } a \equiv b \pmod{m}, \text{ então } a^k \equiv b^k \pmod{m}.$$

- VII. (Cancelamento): Se  $(c, m) = 1$ , então:

$$ac \equiv bc \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

Essas propriedades são fundamentais para trabalhar com problemas que envolvem congruências modulares, mas não são as únicas ferramentas que nos permitem trabalhar com esse tipo de problema.

### 3.6 OS TEOREMAS DE WILSON E DE FERMAT (PEQUENO TEOREMA).

Neste tópico iremos apresentar de forma objetiva dois teoremas que são muito úteis para o estudo olímpico de teoria dos números que são o Teorema de Wilson e o Teorema de Fermat também conhecido como Pequeno Teorema de Fermat.

O primeiro teorema a estudarmos é o Teorema de Wilson, que afirma que  $p$  primo  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ , vamos verificar a aplicabilidade para  $p = 11$ , pois a partir desse exemplo temos contato com o raciocínio que pode ser utilizado em uma das formas de demonstrar este teorema.

Ao listarmos os números 1, 2, 3, ..., 10 percebemos que somente os números 1 e 10 são inversos módulo 11, pois  $1 \equiv 1 \pmod{11}$  e  $10 \equiv -1 \pmod{11}$ , enquanto isso vemos que nenhum dos outros números é congruente a 1 ou -1 módulo 11. Porém como temos  $(2,11) = (3,11) = (4,11) = (5,11) = (6,11) = (7,11) = (8,11) = (9,11) = 1$  cada um deles tem apenas um único inverso módulo 11. Podemos, portanto, agrupá-los em quatro pares da seguinte forma:

$$2 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$3 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$5 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$7 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{11}$$

Multiplicando uma congruência pela outra, pela propriedade V, depois multiplicando por 10 obtemos:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \pmod{11}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \equiv 10 \pmod{11}$$

$$10! \equiv -1 \pmod{11}.$$

Vemos assim que  $(11 - 1)! \equiv -1 \pmod{11}$ .

**Teorema 3.6.1 (Teorema de Wilson):** Se  $p$  primo, então  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

Não é o nosso foco aqui fazer a demonstração do teorema, mas o leitor que desejar demonstrá-lo pode generalizar a ideia apresentada no exemplo resolvido acima. Por outro lado, um resultado bem interessante decorre do teorema acima, pois se  $n$  é um número inteiro tal que  $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$  então  $n$  é primo e este resultado pode ser bem útil.

**Teorema 3.6.2 (Pequeno Teorema de Fermat):** Seja  $p$  um número primo e  $a \in \mathbb{Z}$ . Se  $p \nmid a$  então  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

O Pequeno Teorema de Fermat pode nos ajudar a encontrar respostas para problemas que seriam bem complexos de resolver sem a ferramenta matemática correta. Aqui vamos ver dois exemplos resolvidos que introduzem o uso desse teorema em problemas olímpicos.

**Exemplo 04:** Encontre o algarismo das unidades de  $2^{2025}$  quando escrito na base 17.

**Solução:** Esse problema se reduz a encontrar o resto da divisão de  $2^{2025}$  por 17 ou em outras palavras achar o menor resíduo de  $2^{2025}$  módulo 17. Como 17 é primo e  $17 \nmid 2$ , temos  $2^4 \equiv -1 \pmod{17}$ . Sendo  $2025 = 4 \cdot 506 + 1$ , temos:

$$(2^4)^{506} \equiv (-1)^{506} \pmod{17}$$

$$2^{2024} \equiv 1 \pmod{17}$$

$$2 \cdot 2^{2024} \equiv 2 \cdot 1 \pmod{17}$$

$$2^{2025} \equiv 2 \pmod{17}.$$

Concluimos que o algarismo das unidades de  $2^{2025}$  quando escrito na base 17 é o número 2.

**Exemplo 05:** Mostre que  $7 \mid 2^{101} + 3^{103}$ .

**Solução:** Como  $2^6 \equiv -1 \pmod{7}$ , temos que  $2^{96} \equiv 1 \pmod{7}$ . Mas  $2^5 \equiv -3 \pmod{7}$ . Logo  $2^{96} \cdot 2^5 \equiv 1 \cdot (-3) \pmod{7}$  e, portanto,  $2^{101} \equiv (-3) \pmod{7}$ .

Sabemos também que  $3^3 \equiv -1 \pmod{7}$ , como  $102 = 3 \cdot 34$  obtemos a congruência  $3^{102} \equiv 1 \pmod{7}$ . Assim multiplicando a congruência por 3 obtemos  $3 \cdot 3^{102} \equiv 3 \cdot 1 \pmod{7}$  e, portanto,  $3^{103} \equiv 3 \pmod{7}$ .

Juntando os dois resultados temos que:

$$2^{101} + 3^{103} \equiv (-3) + 3 \pmod{7}$$

$$2^{101} + 3^{103} \equiv 0 \pmod{7}$$

Que era o que queríamos provar.

### 3.7 PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS OU PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Este é um tópico muito recorrente em diversas áreas da matemática, como combinatória, álgebra e até mesmo análise. A reincidência se dá pela sua funcionalidade e organização do pensamento lógico matemático pois, assim como em outras áreas da matemática, o Princípio da Casa dos Pombos é parte muito importante da Teoria dos Números, pois mesmo parecendo ser algo tão simples, a ideia por trás auxilia na demonstração de muitos resultados não-triviais.

O Princípio da Casa dos Pombos, também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio da Boa Ordem, nos diz que se desejarmos colocar  $n+1$  pombos em  $n$  gaiolas, podemos concluir que uma das  $n$  gaiolas terá no mínimo dois pombos.

Esse princípio permite que consigamos afirmar com total certeza que em um grupo de 13 pessoas ao menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês. Afirma-se também por ele que, ao sortear-se 11 números ímpares, ter-se-á no mínimo 3 números com o mesmo algarismo da unidade.

### 3.8 DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Neste tópico, estudaremos uma desigualdade clássica e fundamental da matemática: a Desigualdade entre a Média Aritmética (MA) e a Média Geométrica (MG), frequentemente abordada em olimpíadas e competições matemáticas, além de ser útil em diversas áreas da Álgebra e da Análise.

**Teorema 3.8.1:** *A média aritmética de  $n$  números positivos é maior que ou igual a sua média geométrica e só igual se os números forem todos iguais. Isto é, se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são números positivos, então:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Além disso,

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

## **CAPÍTULO 4**

### **PROBLEMAS ENVOLVENDO TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS OCORRENTES NAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL: SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO**

Neste capítulo, serão apresentados diversos problemas com níveis variados de dificuldade. O objetivo é fornecer soluções detalhadas, de forma a facilitar tanto o desenvolvimento quanto a compreensão dos problemas propostos.

Considerando que os problemas selecionados envolvem conceitos da matemática no âmbito da OBMEP, alguns problemas demandam um nível mais elevado de compreensão e abstração para sua resolução.

No entanto, o uso das propriedades matemáticas pode tornar essas questões não apenas mais interessantes, mas também mais acessíveis e motivadoras para os leitores, proporcionando uma experiência de aprendizado envolvente e desafiadora e pode enriquecer a abordagem da temática em sala de aula.

Ressalte-se que não foi encontrado nenhum problema nas Olimpíadas de Matemática brasileiras envolvendo os seguintes conteúdos: Teorema de Wilson, Teorema de Fermat, e desigualdade das médias, esses tópicos são frequentemente abordados de forma indireta em paralelo a outros tópicos ou aparecem apenas em olimpíadas internacionais como a IMO, a Olimpíada Cone-Sul de Matemática e outras do Gênero.

Então, em relação aos mesmos, estarão no Capítulo 5, como problemas sugeridos para a preparação olímpica, ou mesmo para inserção, nos mesmos moldes, nas provas olímpicas de Matemática no Brasil.

Abaixo, seguem dois problemas a respeito dos Números inteiros (Conceitos, propriedades e suas aplicações), e sugestões de solução, que, destes e dos demais problemas, voltam-se ao nível de compreensão do docente de Matemática.

**Problema 1.** (OBMEP 2016 - Nível 3 - 1ª fase - Questão 17) Quantos são os números naturais  $n$  tais que  $\frac{5n-12}{n-8}$  é também um número natural?

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 7
- E) 8

**Sugestão de Solução:**

Simplificando-se a expressão ( $E$ ) dada, tem-se:

$$E = \frac{5n-12}{n-8} = \frac{5n-40+28}{n-8} = \frac{5 \cdot (n-8) + 28}{n-8} = \frac{5 \cdot (n-8)}{n-8} + \frac{28}{n-8} = 5 + \frac{28}{n-8}.$$

Para que o número acima seja natural, é necessário que  $n-8$ , sendo  $n$  um número natural, seja divisor inteiro de 28. Os divisores inteiros de 28 são: -28, -14, -7, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 7, 14 e 28, para os quais  $n$  valerá, respectivamente, -20, -6, +1, +4, +6, +7, +9, +10, +12, +15, +22 e +36.

Como  $n$  é natural, então, dos números acima listados, somente podem ser utilizados em  $E$  os números +1, +4, +6, +7, +9, +10, +12, +15, +22 e +36. Substituindo-os em  $E$ , temos os seguintes valores para  $E$ , respectivamente: +1, -2, -9, -23, +33, +19, +12, +9, +7, e +6, dos quais sete valores são naturais para  $E$  (1, 6, 7, 9, 12, 19, 33), sendo a Letra D a resposta correta.

**Problema 2.** (OBMEP 2007 - Nível 2 - 1ª fase - Questão 6) O número  $n$  é um inteiro negativo. Qual dos números abaixo é o maior?

- A)  $-3n$
- B)  $3n$
- C)  $n-3$
- D)  $9n-3$
- E)  $n-9$

**Sugestão de Solução:**

Observe-se, inicialmente, que  $-3n$  é um inteiro positivo. Então, dentre as demais alternativas, em que todas resultam num inteiro negativo, vamos supor que  $9n-3$  é o maior deles, querendo chegar numa contradição. Então:

$$\begin{aligned} 9n - 3 \geq 3n &\Rightarrow 9n - 3n \geq 3 \\ &\Rightarrow 6n \geq 3 \\ &\Rightarrow n \geq \frac{3}{6} > 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois  $n < 0$ . Logo,  $9n - 3$  é menor do que  $3n$ .

Do mesmo modo:

$$\begin{aligned} 9n - 3 \geq n - 3 &\Rightarrow 9n - n \geq -3 + 3 \\ &\Rightarrow 8n \geq 0 \\ &\Rightarrow n \geq 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois  $n < 0$ . Logo,  $9n - 3$  é menor do que  $n - 3$ .

Também:

$$\begin{aligned} 9n - 3 \geq n - 9 &\Rightarrow 9n - n \geq -9 + 3 \\ &\Rightarrow 8n \geq -6 \\ &\Rightarrow n \geq \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} < 0. \end{aligned}$$

Então,  $9n - 3$ , que é menor do que  $-3n$  (positivo), que  $3n$  e que  $n - 3$ , ainda não está (tão) claro que seja menor que  $n - 9$ . Então, invertamos a desigualdade: supondo que  $n - 9$  é maior que, ou igual a  $9n - 3$ , temos que:

$$\begin{aligned} n - 9 \geq 9n - 3 &\Rightarrow n - 9n \geq -3 + 9 \\ &\Rightarrow -8n \geq 6 \\ &\Rightarrow 8n \leq -6 \\ &\Rightarrow n \leq -\frac{6}{8} < -1 \\ &\Rightarrow n \leq -1, \end{aligned}$$

o que é verdade, pois, como  $n$  é negativo, seu maior valor ocorre para  $n = -1$ .

Portanto,  $9n - 3$  é menor também do que  $n - 9$ , sendo o menor dos números, sendo a Letra D a resposta correta.

A seguir, são apresentados dois problemas a respeito de Divisibilidade, e sugestões de solução.

**Problema 3.** (OBMEP 2017 - Nível 2 - 2ª fase - Questão 3) Júlia faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número. Veja que o resultado do cálculo de Júlia com o número 2 é igual a 6.

- A) Qual é o resultado do cálculo de Júlia com o número 3?
- B) Qual é o número que deve ser escolhido por Júlia para que o resultado do cálculo seja 1320?
- C) Explique por que, para qualquer número que Júlia escolher, o resultado final do cálculo será sempre um múltiplo de 6.

**Sugestão de Solução:**

Seja  $n$  o número inteiro positivo escolhido por Júlia. Ela fará a expressão  $E = n^3 - n$ . Assim, verifica-se que, para  $n = 2$ , obtém-se:  $E = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ .

Na Letra A, pede-se o valor da expressão para  $n = 3$ , que será:

$$E = 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24.$$

Na Letra B, pede-se o valor de  $n$  para o qual a expressão valerá 1320. Assim:

$$E = n^3 - n = 1320 \Rightarrow n \cdot (n^2 - 1) = 1320 \Rightarrow (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 1320.$$

Da última igualdade, conclui-se que  $n$  é um número inteiro positivo tal que o produto de três números inteiros positivos consecutivos resulta em 1320. Testando-se as ternas de números inteiros positivos consecutivos (à exceção do primeiro teste, em que  $n = 1$  resulta em um fator nulo, que não é um inteiro positivo), dos menores para os maiores valores de  $n$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}
0 \times 1 \times 2 &= 6; \\
1 \times 2 \times 3 &= 6; \\
2 \times 3 \times 4 &= 24; \\
3 \times 4 \times 5 &= 60; \\
4 \times 5 \times 6 &= 120; \\
5 \times 6 \times 7 &= 210; \\
6 \times 7 \times 8 &= 336; \\
7 \times 8 \times 9 &= 504; \\
8 \times 9 \times 10 &= 720; \\
9 \times 10 \times 11 &= 990; \\
10 \times 11 \times 12 &= 1320.
\end{aligned}$$

Encontrou-se a terna como sendo 10, 11 e 12, correspondendo aos números  $n-1$ ,  $n$  e  $n+1$ . Logo,  $n = 11$ , para o qual a expressão  $E$  resulta em 1320.

Na Letra C, pede-se que se explique o porquê de  $E$  ser sempre múltiplo de 6. Ora, como  $E = n^3 - n = (n - 1).n.(n + 1)$ , conforme já verificado na Letra B, então vê-se que  $E$  é o produto de três números inteiros positivos (ou nulo apenas para o caso  $n = 1$ ).

Como a paridade dos números ocorrem alternadamente, então tem-se certeza de que, dentre três números consecutivos, pelo menos um deles é par, pois há somente duas possibilidades: PIP e IPI, em que P representa número par e I representa número ímpar. Logo, um deles é múltiplo de 2.

Por outro lado, como existem três números consecutivos e três restos possíveis na divisão de  $E$  por 3, então tem-se certeza de que um dos números terá resto 0, outro resto 1, e o outro, resto 2.

Portanto, o que tem resto 0 é um múltiplo de 3, e, conseqüentemente,  $E$  também será múltiplo de 3.

Sendo  $E$  múltiplo simultaneamente de 2 e de 3, e como  $\text{mdc}(2, 3) = 1$ , então  $E$  é múltiplo de  $3.2 = 6$ , conforme queríamos demonstrar.

**Problema 4.** (OBMEP 2013 - Nível 2 - 1ª fase - Questão 3) Uma piscina com fundo e paredes retangulares está totalmente revestida com azulejos quadrados iguais, todos inteiros. O fundo da piscina tem 231 azulejos e as quatro paredes tem um total de 1024 azulejos. Qual é, em número de azulejos, a profundidade da piscina?

- A) 15
- B) 16
- C) 18
- D) 20
- E) 21

**Sugestão de Solução:**

O fundo da piscina possui  $m$  azulejos no comprimento e  $n$  azulejos na largura, e, como é um retângulo, então  $m * n = 231$ .

Já a profundidade da piscina tem  $p$  azulejos, e as quatro paredes (quatro retângulos, dois a dois iguais) tem um total de 1024 azulejos, o que resulta em:  $2mn + 2np = 1024$ , o que implica em  $p(m + n) = 512$ .

Agora, precisamos encontrar um par de valores para  $m$  e  $n$  que, multiplicados, resultam em 231 e que, adicionados, dividem 512.

Os fatores de 231 são 1, 3, 7, 11, 21, 33, 77, 231. Notamos que  $21 * 11 = 231$  e  $21 + 11 = 32$ , que divide 512.

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
 p \cdot (m + n) = 512 &\Rightarrow p \cdot 32 = 512 \\
 &\Rightarrow p = \frac{512}{32} \\
 &\Rightarrow p = 16 \text{ azulejos.}
 \end{aligned}$$

Logo, a profundidade da piscina é, portanto, 16 azulejos (Letra B).

A seguir, são apresentados dois problemas a respeito de Números Primos e Compostos, e sugestões de solução.

**Problema 5.** (OBMEP 2011 - Nível 2 - 1ª fase - Questão 17) Mariana escreveu as decomposições em fatores primos dos números naturais de 2 a 100:

$$2, 3, 2 * 2, 5, 2 * 3, \dots, 3 * 3 * 11, 2 * 2 * 5 * 5.$$

Quantas vezes ela escreveu o algarismo 2?

- A) 99
- B) 104
- C) 152
- D) 188
- E) 191

**Sugestão de Solução:**

Primeiro, podemos analisar os números múltiplos de 2: 2, 4, 6, ..., 100. Existem 50 múltiplos de 2 entre 2 e 100.

Em seguida, podemos analisar os números múltiplos de 4: 4, 8, 12, ..., 100. Existem 25 múltiplos de 4 entre 2 e 100.

Continuamos analisando os múltiplos de 8: 8, 16, 24, ..., 96. Existem 12 múltiplos de 8 entre 2 e 100.

E assim por diante:

- **Múltiplos de 16:** 16, 32, 48, 64, 80, 96. São 6 múltiplos.
- **Múltiplos de 32:** 32, 64, 96. São 3 múltiplos.
- **Múltiplos de 64:** 64. É 1 múltiplo.

Somando o número de vezes em que o 2 aparece em cada *nível*:

$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

Porém, além do próprio número 2, há outros dois números primos entre 2 e 100 que contém o algarismo 2: o número 23 e o número 29. Entre 2 e 100, há quatro múltiplos de 23 (que são  $23, 2 * 23 = 46, 3 * 23 = 69, e 4 * 23 = 92$ ) em que, independentemente da paridade, aparecerão quatro vezes o número 23, ou seja, mais quatro vezes o algarismo 2.

No mesmo raciocínio, entre 2 e 100, há três múltiplos de 29 (que são  $29, 2 * 29 = 58, 3 * 29 = 87$ ) em que, independentemente da paridade, aparecerão três vezes o número 23, ou seja, mais três vezes o algarismo 2.

Então, o total de algarismos 2 que Mariana escreveu foi:  $97 + 21 = 104$  (Letra B).

**Problema 6.** (OBMEP 2015 - Nível 2 - 1ª fase - Questão 15) Os números naturais  $x$  e  $y$  são tais que  $x^2 - xy = 23$ . Qual é o valor de  $x + y$ ?

- A) 24
- B) 30
- C) 34
- D) 35
- E) 45

**Sugestão de Solução:**

Da igualdade dada, tem-se:

$$x^2 - xy = 23 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x - y) = 23.$$

Como  $x$  e  $y$  são números naturais, e 23 é primo, então ou  $x = 23$  e  $x - y = 1$ , ou  $x - y = 23$  e  $x = 1$ . No primeiro caso,  $x = 23$  e  $y = 22$ . No segundo caso,  $x = 1$  e  $y = -22 \notin \mathbb{N}$ . Logo,  $x = 23, y = 22$ , e  $x + y = 23 + 22 = 45$  (Letra E).

Em seguida, são apresentados dois problemas a respeito do Teorema Fundamental da Aritmética, e sugestões de solução.

**Problema 7.** (OBMEP 2015 - Nível 1 - 1ª fase - Questão 15) As contas  $AB * C = 195$  e  $CDE \div F = 88$  estão corretas, sendo  $A, B, C, D, E$  e  $F$  algarismos diferentes. O número  $AB$  é formado pelos algarismos  $A$  e  $B$ , e o número  $CDE$  é formado pelos algarismos  $C, D$  e  $E$ . Qual é o algarismo representado pela letra  $F$ ?

- A) 1
- B) 2
- C) 4
- D) 6
- E) 8

**Sugestão de Solução:**

Lembrando-se dos valores posicionais no sistema decimal de numeração, sendo  $A, B, C, D, E$  e  $F$  algarismos, tem-se que  $AB \times C = 195 = 5 \times 39$ . Sendo  $C$  um divisor de 195, e  $C$  vale de 0 a 9, então as duas possibilidades para  $C$  são 1 ou 5. Porém, para  $C = 1$ , temos que  $AB \times C = AB \times 1 = AB \neq 195$ , pois o número  $AB$  não tem algarismo das centenas. Logo,  $C = 5$ , e, desta forma,  $AB = 39$ , o que resulta em  $A = 3$  e  $B = 9$ .

Por outro lado, sendo  $CDE \div F = 88$ , que equivale a  $CDE = 88 \times F$ , e como  $C = 5$ , então o número  $CDE$  vale quinhentos e *alguma coisa*, e é múltiplo de 88. Assim, sabendo-se que  $5 \times 88 = 440$ ,  $6 \times 88 = 528$  e  $7 \times 88 = 616$ , então conclui-se que  $CDE$  corresponde ao número 528, e  $F$  corresponde ao número 6 (Letra  $D$ ), pois  $CDE \div F = 528 \div 6 = 88$ .

**Problema 8.** (OBMEP 2015 - Nível 3 - 1ª fase - Questão 11) Uma sequência de números é definida por  $a_1 = 3$  e

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2,$$

para todo número natural  $n \geq 1$ . Por exemplo:  $a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 3^2 = 12$ . Qual é o algarismo das unidades de  $a_{2015}$  ?

- A) 2
- B) 6
- C) 7
- D) 8
- E) 9

**Sugestão de Solução:**

Inicialmente, calculam-se os primeiros termos da sequência com o objetivo de identificar um padrão nos algarismos das unidades:

- $a_1 = 3$ ;
- $a_2 = 12$ ;
- $a_3 = a_2 + a_2^2 = 12 + 12^2 = 12 + 144 = 156$ ;
- $a_4 = a_3 + a_3^2 = 156 + 156^2 = 156 + 24336 = 24492$ .

Observa-se que os algarismos das unidades dos primeiros termos são: 3, 2, 6, 2, ..., sugerindo a existência de um ciclo periódico de comprimento 4.

Para verificar a recorrência do padrão com período 4, procede-se à análise dos algarismos das unidades de  $a_n$  e  $a_n^2$ :

- Se o algarismo das unidades de  $a_n$  for 2, então o algarismo das unidades de  $a_n^2$  será 4. Logo, o algarismo das unidades de  $a_{n+1} = a_n + a_n^2$  será 6.
- Se o algarismo das unidades de  $a_n$  for 6, então o algarismo das unidades de  $a_n^2$  será 6. Logo, o algarismo das unidades de  $a_{n+1} = a_n + a_n^2$  será 2.

Então, a partir do segundo termo, observa-se que os termos de índice par apresentam algarismo das unidades igual a 2, enquanto os de índice ímpar apresentam algarismo das unidades igual a 6. Como 2015 é ímpar, conclui-se que o algarismo das unidades de  $a_{2015}$  é 6.

Seguem dois problemas a respeito de Congruência modular, e sugestões de solução.

**Problema 9.** (OBMEP 2008 - Nível 3 - 1ª fase - Questão 7) Em certo ano bissexto (isto é, um ano que tem 366 dias) o número de sábados foi maior que o número de domingos. Em que dia da semana caiu dia 20 de janeiro desse ano?

- A) segunda-feira
- B) terça-feira
- C) quarta-feira
- D) quinta-feira
- E) sexta-feira

**Sugestão de Solução:**

Inicie-se com o raciocínio de que dia 20 de janeiro cai no mesmo dia que  $20 - 7 = 14$  de janeiro, que cai no mesmo dia que o dia  $14 - 7 = 7$  de janeiro.

O ano tem pouco mais de 52 semanas, que totalizam  $52 \times 7 = 364$  dias. No ano em questão, há dois dias a mais (em dias da semana vizinhos), sendo um deles num sábado, e o outro não pode ser no domingo, porque há mais sábados do que domingos. Então, o outro dia a mais é sexta-feira (o outro dia vizinho do sábado). Daí, tem-se uma das duas seguintes possibilidades:

**1ª) O par sexta-sábado a mais está no começo do ano.** Neste acaso, o ano começa numa sexta-feira. Neste caso, 1º de janeiro é numa sexta-feira, 2 de janeiro é um sábado, e a partir daí tem-se 52 ciclos de 7 semanas (começando no domingo, 3 de janeiro). Neste caso, o dia 20 de janeiro, que cai no mesmo dia que 7 de janeiro, será numa quinta-feira (quatro dias depois do domingo; ou, um dia antes do dia 8 de janeiro, segunda sexta-feira do mês).

**2ª) O par sexta-sábado a mais está no final do ano.** Neste acaso, o ano termina num sábado. Neste caso, 31 de dezembro é num sábado, 30 de dezembro é numa sexta, e, a partir daí, tem-se 52 ciclos decrescentes de 7 semana, *começando* na quinta-feira, 29 de dezembro, e *terminando* numa sexta-feira, 1º de janeiro. Ora, este é o mesmo caso anterior, em que o ano começa numa sexta-feira: aqui, também, o ano começa no par sexta-sábado (e termina nesse par).

Portanto, necessariamente, para haver mais sábados do que domingos, o dia 1º de janeiro é numa sexta-feira, o dia 31 de dezembro é num sábado, e o dia 20 de janeiro cai numa quinta-feira (Letra D).

**Problema 10.** (OBMEP 2017 - Nível 3 - 1ª fase - Questão 6) Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

- A) 0
- B) 1
- C) 8
- D) 10
- E) 80

**Sugestão de Solução:**

Seja  $n$  o número natural considerado. Obedecendo-se aos comandos da questão, tem-se:

$$\begin{cases} n + 1 = 11k \\ n - 1 = 8q \end{cases}$$

para  $k$  e  $q$  naturais.

Multiplicando-se ambas as equações do sistema de equações anterior, tem-se:

$$(n + 1).(n - 1) = 11k.8k \Rightarrow n^2 - 1 = 88.k.q = 88m,$$

em que m corresponde ao natural que é o produto de k por q. Prosseguindo-se:

$$n^2 - 1 = 88m \Rightarrow n^2 = 88m + 1.$$

Logo, a divisão de  $n^2$  por 88 deixa resto 1 (Letra B).

**Problema 12.** (OBMEP 2009 - Nível 3 - 2ª fase - Questão 1) Em uma caixa foram colocados um cartão no qual está escrito o número 1, dois cartões nos quais está escrito o número 2, três cartões com número 3 e assim por diante, até dez cartões com o número 10. Então, qual é o menor número de cartões que pode ser retirado da caixa, ao acaso, para que se tenha certeza que cinco deles têm o mesmo número? Justifique sua resposta.

**Sugestão de Solução:**

Primeiro, note-se que, escolhendo o cartão de número 1, os dois de número 2, os três de número 3 e depois quatro de cada um dos números de 4 a 10, teremos um total de  $1 + 2 + 3 + 4 \times 7 = 34$  cartões sem a possibilidade de ocorrência de que cinco cartões quaisquer tenham o mesmo número. Logo, para que tenhamos certeza de que cinco cartões tenham o mesmo número, é necessário escolher pelo menos 35 cartões, pois o 35º cartão será um número, necessariamente, de 4 a 10, que já ocorreram quatro vezes na colocação dos 34 cartões do modo acima exposto.

Por outro lado, se forem escolhidos 35 cartões, pode-se afirmar que pelo menos cinco deles terão o mesmo número. De fato, se isto não fosse verdadeiro, haveria, no máximo, 4 cartões de cada número. Como há apenas um cartão como número 1, dois com o 2 e três com o 3, e quatro cartões com os números de 4 a 10, retirar-se-iam, no máximo,  $1 + 2 + 3 + 4 \times 7 = 34$  cartões, o que é uma contradição. Conclui-se que, entre 35 cartões, há, necessariamente, pelo menos cinco com o mesmo número.

## 4.1 PROBLEMAS IDEALIZADOS UTILIZANDO-SE TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS COMO SUGESTÃO AO DOCENTE PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA E EM AMBIENTE OLÍMPICO

Nesta seção, serão apresentadas sugestões de questões que envolvem os seguintes conteúdos: o Teorema de Wilson, o Teorema de Fermat e a desigualdade das médias. Cada um desses tópicos será explorado por meio de problemas cuidadosamente pensados, com o objetivo de ilustrar suas aplicações, destacar suas propriedades e contribuir para o aprofundamento teórico e prático por parte do docente de Matemática.

### 4.1.1. SUGESTÃO DE QUESTÃO ENVOLVENDO O TEOREMA DE WILSON

**Problema 13.** Qual é o resto da divisão de  $6!$  por  $7!$ ?

**Sugestão de Solução:**

O Teorema de Wilson afirma que, se  $p$  primo, então  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ . Para  $p = 7$ , que é primo, tem-se que:

$$(7 - 1)! \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 6! \equiv -1 \pmod{7}.$$

Portanto, o resto da divisão de  $6!$  por  $7$  é  $6$ .

### 4.1.2. SUGESTÃO DE QUESTÕES ENVOLVENDO O TEOREMA DE FERMAT

**Problema 14.** Qual é o resto da divisão de  $7^{100}$  por  $13$ ?

**Sugestão de Solução:**

O Pequeno Teorema de Fermat afirma que, para  $p$  primo e  $a$  inteiro tais que  $p \nmid a$ , então  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Sendo  $a = 7$  e  $p = 13$ , como  $p = 13 \nmid 7 = a$ , então, utilizando-se o Pequeno Teorema de Fermat, tem-se que:

$$7^{13-1} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 7^{12} \equiv 1 \pmod{13}. (*)$$

Agora, efetuando-se a divisão euclidiana de 100 por 12, tem-se 8 e 4 como quociente e resto, respectivamente, pois  $100 = 12 \times 8 + 4$ .

Então, elevando-se (\*) a 8, vem:

$$7^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow (7^{12})^8 \equiv 1^8 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 7^{96} \equiv 1 \pmod{13}. (**)$$

O resto da divisão de  $7^2 = 49$  por 13 é -3, pois o número  $52 = 4 \times 13$  é múltiplo de 13, deixando resto 0 na divisão por 13, e, conseqüentemente, os restos na divisão por 13 dos números 51, 50 e 49 são, respectivamente, -1, -2 e -3.

Deste modo, multiplicando-se (\*\*) por  $7^2 \times 7^2$ , tem-se que:

$$7^{96} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 7^{96} \times 7^2 \times 7^2 \equiv 1 \times 7^2 \times 7^2 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 7^{100} \equiv 1 \times (-3) \times (-3) \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 7^{100} \equiv 9 \pmod{13}.$$

Portanto, o resto da divisão de  $7^{100}$  por 13 é 9.

**Problema 15.** Qual é o resto da divisão de  $4^{2025}$  por 11?

**Sugestão de Solução:**

O Pequeno Teorema de Fermat afirma que, para  $p$  primo e  $a$  inteiro tais que  $p \nmid a$ , então  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Sendo  $a = 3$  e  $p = 11$ , como  $p = 11 \nmid a = 4$ , então, utilizando-se o Pequeno Teorema de Fermat, tem-se que:

$$4^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 4^{10} \equiv 1 \pmod{11}. (*)$$

Agora, efetuando-se a divisão euclidiana de 2025 por 10, tem-se 202 e 5 como quociente e resto, respectivamente, pois  $2025 = 10 \times 202 + 5$ .

Então, elevando-se (\*) a 202, vem:

$$\begin{aligned} 4^{10} &\equiv 1 \pmod{11} \\ \Rightarrow (4^{10})^{202} &\equiv 1^{202} \pmod{11} \\ \Rightarrow 4^{2020} &\equiv 1 \pmod{11}. \quad (**) \end{aligned}$$

O resto da divisão de  $4^2 = 16$  por 11 é 5, e o resto da divisão de  $4^3 = 64$  por 11 é -2, pois o número  $66 = 6 \times 11$  é múltiplo de 11, deixando resto 0 na divisão por 11, e, conseqüentemente, os restos na divisão por 11 dos números 65 e 64 são, respectivamente, -1 e -2.

Deste modo, multiplicando-se (\*\*) por  $4^2 \times 4^3$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} 4^{2020} &\equiv 1 \pmod{11} \\ \Rightarrow 4^{2020} \times 4^2 \times 4^3 &\equiv 1 \times 4^2 \times 4^3 \pmod{11} \\ \Rightarrow 4^{2025} &\equiv 1 \times 5 \times (-2) \pmod{11} \\ \Rightarrow 4^{2025} &\equiv -10 \pmod{11} \\ \Rightarrow 4^{2025} &\equiv -10 + 11 \pmod{11} \\ \Rightarrow 4^{2025} &\equiv 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Portanto, o resto da divisão de  $4^{2025}$  por 11 é 1.

#### 4.1.3. SUGESTÃO DE QUESTÕES SOBRE DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

**Problema 16.** Os números  $x$ ,  $y$  e  $z$  são positivos e têm produto igual a 1. Então, qual é o menor valor possível da soma  $x + y + z$ ?

**Sugestão de Solução:**

A desigualdade das médias afirma que:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Como  $xyz = 1$ , temos:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3$$

Portanto, o menor valor de  $x + y + z$  ocorre quando  $x = y = z = 1$ , e nesse caso a soma (mínima) é 3.

**Problema 17.** Qual o valor mínimo da soma  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ , com  $x$  diferente de 0?

**Sugestão de Solução:**

A desigualdade das médias afirma que:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} &\geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} \\ \Rightarrow \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} &\geq \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} \\ \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} &\geq \sqrt{1} \\ \Rightarrow \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} &\geq 1 \\ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} &\geq 2. \end{aligned}$$

Logo, o valor mínimo da soma  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ , com  $x$  diferente de 0, é igual a 2.

**Problema 18.** Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais positivos tais que  $x + y = 1$ . Qual é o menor valor da expressão  $x^4 + y^4$ ?

**Sugestão de Solução:**

Do quadrado da soma de dois números, tem-se que:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ \Rightarrow 1^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 &= 2xy \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 1 - 2xy.\end{aligned}$$

Elevando-se a última equação ao quadrado, tem-se que:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 &= (1 - 2xy)^2 \\ \Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &= 1 - 4xy + 4x^2y^2 \\ \Rightarrow x^4 + y^4 &= 1 - 4xy + 4x^2y^2 - 2x^2y^2 \\ \Rightarrow x^4 + y^4 &= 1 - 4xy + 2x^2y^2.\end{aligned}$$

Fazendo-se  $xy = z > 0$  na última equação, vem:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 &= 2z^2 - 4z + 1 \\ \Rightarrow x^4 + y^4 &= 2 \cdot (z^2 - 2z + 1) - 1 \\ \Rightarrow x^4 + y^4 &= 2 \cdot (z - 1)^2 - 1. \quad (*)\end{aligned}$$

Pela desigualdade das médias, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{x + y}{2} &\geq \sqrt{xy} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &\geq \sqrt{xy} \\ \Rightarrow \sqrt{xy} &\leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow (\sqrt{xy})^2 &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow |xy| &\leq \frac{1}{4} \\ \stackrel{x,y>0}{\Leftrightarrow} 0 &< xy \leq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow 0 &< z \leq \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Então:

$$0 < z \leq \frac{1}{4}$$

$$\stackrel{-1}{\Rightarrow} 0 - 1 < z - 1 \leq \frac{1}{4} - 1$$

$$\Rightarrow -1 < z - 1 \leq -\frac{3}{4}$$

$$\stackrel{\wedge 2}{\Rightarrow} \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \leq (z - 1)^2 < (-1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} \leq (z - 1)^2 < 1$$

$$\stackrel{\times 2}{\Rightarrow} 2 \times \frac{9}{16} \leq 2 \times (z - 1)^2 < 2 \times 1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8} \leq 2 \cdot (z - 1)^2 < 2$$

$$\stackrel{-1}{\Rightarrow} \frac{9}{8} - 1 \leq 2 \cdot (z - 1)^2 - 1 < 2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \leq 2 \cdot (z - 1)^2 - 1 < 1.$$

Substituindo-se esta desigualdade em (\*):

$$\frac{1}{8} \leq 2 \cdot (z - 1)^2 - 1 = x^4 + y^4 < 1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \leq x^4 + y^4 < 1.$$

Portanto, o menor valor possível para  $x^4 + y^4$  é  $1/8$ .

## **CAPÍTULO 5**

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Este trabalho teve como propósito investigar o potencial didático da Teoria dos Números quando explorada em contextos olímpicos, especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental. Através da análise de competições como a OBMEP e outras olimpíadas matemáticas, ficou evidente que os tópicos da Teoria dos Números – como divisibilidade, números primos, congruências, entre outros – não apenas aparecem com frequência nessas olimpíadas, mas também representam um campo fértil para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade e da capacidade de resolução de problemas por parte discente.

Ao longo do trabalho, foi possível observar que os conteúdos de Teoria dos Números, quando tratados com abordagens criativas e contextualizadas, têm grande potencial para tornar o aprendizado da Matemática mais significativo. A aplicação de metodologias inspiradas na resolução de problemas, especialmente à luz das ideias de George Pólya, revelou-se uma estratégia eficaz tanto para preparar os alunos para desafios olímpicos quanto para promover um ensino mais investigativo e ativo.

A proposta de idealizar problemas contextualizados para o uso em sala de aula e ambientes de olimpíada busca contribuir com o trabalho docente, oferecendo recursos que podem ser utilizados de forma prática e alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A abordagem adotada neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) reforça a importância de práticas pedagógicas que valorizem a autonomia dos estudantes, incentivem o pensamento crítico e promovam o protagonismo no processo de aprendizagem.

Portanto, conclui-se que integrar tópicos básicos e avançados de Teoria dos Números no cotidiano escolar, por meio de atividades desafiadoras e competições matemáticas, representa uma estratégia eficiente para elevar o nível de ensino da Matemática e identificar e aprimorar talentos na área. Ademais, este trabalho abre caminhos para novas investigações que ampliem a inserção da Matemática Olímpica na escola pública, valorizando o conhecimento formal aliado ao prazer de aprender.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Ensino Fundamental.** Brasília-DF: MEC, 2017. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 19 nov. 2024.

MARTINEZ, Fábio Brochero; et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.** Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 4<sup>o</sup> edição, 2018.

**Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Apresentação.** Rio de Janeiro-RJ: OBMEP, 2005. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 29 set. 2024.

**Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.** Em números. Rio de Janeiro-RJ: OBMEP, 2005. Disponível em: <http://obmep.org.br/em-numeros.htm>. Acesso em: 18 nov. 2024.

OLIVEIRA, Krerley; CORCHO, Adán J. **Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções.** 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. ISBN 978-85-8337-114-4.

PEREIRA, Brenda Vaz. **Harmonia entre a OBMEP e a resolução de problemas nos anos finais do ensino fundamental.** 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos-SP: UFSCar, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/17320>. Acesso em: 17 nov. 2024.

PINTO, Fabricio de Sousa. **EduGamification: uma metodologia de gamificação para apoiar o processo ensino-aprendizagem.** Workshop sobre Educação em Computação (WEI), 27, 2019. Porto Alegre-RS: Sociedade Brasileira de Computação, 2019. p. 414-428. ISSN 2595-6175. DOI: <https://doi.org/10.5753/wei.2019.6647>. Acesso em: 03 abr. 2025.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 2006.