

**INSTITUTO  
FEDERAL**

Alagoas

INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS

*CAMPUS MACEIÓ*

CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FLÁVIO JOSÉ DA SILVA

CRITÉRIO DE SYLVESTER: DEDUÇÃO, INTERPRETAÇÃO E  
APLICAÇÕES

MACEIÓ, AL

2025

FLÁVIO JOSÉ DA SILVA

CRITÉRIO DE SYLVESTER: DEDUÇÃO, INTERPRETAÇÃO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Vanessa Lúcia da Silva

MACEIÓ, AL  
2025



**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**  
**Instituto Federal de Alagoas**  
***Campus Maceió***  
**Biblioteca Benevides Monte**

---

512.943

S237c

Silva, Flávio José da.

Crítério de Sylvester [recurso eletrônico] : dedução, interpretação e aplicações / Flávio José da Silva. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 678 KB). – 2025.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader.

Modo de acesso: Internet.

Orientação: Prof. Dra. Vanessa Lúcia da Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, Maceió, 2025.

1. Matemática. 2. Crítério de Sylvester. 3. Formas quadráticas. 4. Matrizes simétricas. I. Título.

---

**Franciane Monick Gomes de França**  
**Bibliotecária – CRB 4/1831**

FLÁVIO JOSÉ DA SILVA

CRITÉRIO DE SYLVESTER: DEDUÇÃO, INTERPRETAÇÃO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 22/12/2025

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Dra. Vanessa Lúcia da Silva**  
IFAL  
(Orientador)

---

**Prof. Ana Paula Dantas de Souza**  
IFAL  
(Coorientador)

---

**Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento**  
IFAL

---

**Prof. Me. Alane da Rocha Alves**  
IFAL

A Deus.

A todos meus familiares e amigos.

E para todos que fazem a matemática cada dia melhor.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me dá forças e coragem para enfrentar os desafios da vida. A minha mãe Maria Maciel, que com todo o esforço e dificuldades da vida, sempre me incentivou a estudar. Recordo-me com carinho das madrugadas em que ela ia para a fila da escola em busca de uma vaga. Muito obrigado, Mãe! Sei o quanto foi difícil! Agradeço também aos meus irmãos Roseano, Fabiano e Fábio por toda a contribuição e ensinamentos e por sempre me dizer para não desistir.

Agradeço a minha esposa Tanísia, companheira de todas as horas por todo o empenho em sempre me ajudar mesmo quando discordamos e sempre me mostrar o caminho. Agradeço A Johnny Matheus pela contribuição nessa jornada.

Agradeço a Gilberta Romeiro e Aldo Gomes por todo o apoio, por me conduzirem ao caminho da leitura, apresentarem a boa música e, sobretudo, por sempre me incentivarem a seguir a carreira docente.

O meu apreço pela matemática começa praticamente desde a sexta série, como era chamada naquela época. Foi quando comecei a gostar da matemática, através do modo que minha professora Ruth ensinava. Ela parecia ter uma facilidade em ensinar e tinha total domínio na turma. Então meus agradecimentos vai para ela também.

A minha querida orientadora Vanessa Silva, por todos os ensinamentos e a bela maneira de ensinar e de me ter encorajado nessa luta, mesmo quando eu já estava pensando em desistir. Muitíssimo obrigado, sei que já foi no final, mas me deu coragem para enfrentar o fim dessa jornada e começo para quem sabe uma nova. Agradeço a minha coorientadora Ana Paula pelo grande empenho e dedicação nesse fim de curso.

Quero agradecer aos professores do campus por contribuir para a minha formação, aos funcionários, especialmente a Rita de Cássia, por toda a paciência, a CAPES, na qual fui bolsista do PIBID e Residência Pedagógica e que contribuiu para a minha formação acadêmica. E agradeço a todos que de toda forma me ajudaram a realizar essa jornada.

*“É na experiência da vida que o homem evolui.”* (Harvey Spencer Lewis)

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma dedução formal do critério de Sylvester, teorema fundamental na análise da definitude de formas quadráticas associadas a matrizes simétricas reais. O estudo se estrutura em torno da formalização do critério, de sua interpretação geométrica e de aplicações clássicas. A abordagem valoriza a articulação entre teoria e prática, com sugestões de como explorar o conteúdo em sala de aula com recursos concretos e tecnológicos.

**Palavras-chave:** Critério de Sylvester; formas quadráticas; matrizes simétricas.

## ABSTRACT

This work aims to present a formal deduction of Sylvester's criterion, a fundamental theorem in the analysis of the definiteness of quadratic forms associated with real symmetric matrices. The study is structured around the formal development of the criterion, its geometric interpretation, and classical applications. The approach emphasizes the connection between theory and practice, offering suggestions for exploring the content in the classroom through concrete and technological resources.

**Keywords:** Sylvester's Criterion; quadratic forms; symmetric matrices.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
OBJETIVOS . . . . .	11
OBJETIVO GERAL . . . . .	11
OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .	12
ESTRUTURA DO TRABALHO . . . . .	12
<b>1 – CONCEITOS PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1 MATRIZES SIMÉTRICAS E MENORES PRINCIPAIS LÍDERES . . . . .	13
1.2 FORMAS QUADRÁTICAS E DEFINITUDE . . . . .	18
1.3 CÔNICAS E QUÁDRICAS ASSOCIADAS A FORMAS QUADRÁTICAS . . . . .	23
1.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DEFINITUDE . . . . .	28
1.4.1 FORMAS QUADRÁTICAS EM DUAS VARIÁVEIS . . . . .	29
1.4.2 INTERPRETAÇÃO EM DIMENSÕES SUPERIORES . . . . .	30
<b>2 – O CRITÉRIO DE SYLVESTER</b> . . . . .	<b>33</b>
2.1 DEMONSTRAÇÃO DO CRITÉRIO DE SYLVESTER . . . . .	35
<b>3 – APLICAÇÕES</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1 APLICAÇÕES E INTERPRETAÇÕES MATEMÁTICAS . . . . .	37
3.1.1 APLICAÇÕES NA ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANA- LÍTICA . . . . .	37
<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	

## INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear ocupa um papel central na formação matemática, sendo amplamente aplicada em diversas áreas do conhecimento, como Física, Engenharia, Computação, Estatística e Economia. No entanto, a forma como os conteúdos dessa disciplina são apresentados, especialmente no contexto da Licenciatura em Matemática, costuma ser excessivamente abstrata e distante da realidade dos futuros professores da educação básica. Um dos temas que exemplifica essa situação é o estudo das formas quadráticas e da classificação de matrizes simétricas quanto à definitude — conteúdo frequentemente tratado de modo técnico, sem ênfase no significado conceitual ou nas possibilidades pedagógicas.

Nesse contexto, destaca-se o critério de Sylvester, um teorema elegante e fundamental que estabelece uma condição algébrica simples — baseada nos menores principais líderes de uma matriz — para determinar a definitude de uma matriz simétrica real, que tem grande importância teórica e aplicações em cálculo multivariado, geometria analítica e otimização.

Diante disso, este trabalho tem como proposta central investigar o critério de Sylvester de forma aprofundada, com ênfase em sua dedução formal, interpretação conceitual e geométrica, e suas aplicações em diferentes áreas da matemática.

Este trabalho será desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica e teórico-exploratória, com base em livros clássicos e contemporâneos de Álgebra Linear, artigos acadêmicos e documentos sobre o ensino de Matemática na Licenciatura. A dedução formal do critério será apresentada de forma acessível, com exemplos numéricos e ilustrações geométricas.

A relevância deste trabalho reside, portanto, na articulação entre rigor teórico, significado conceitual e exploração didática, em consonância com os princípios da Educação Matemática que defendem uma aprendizagem significativa e contextualizada dos conteúdos. A escolha do critério de Sylvester como objeto de estudo permite ainda discutir importantes temas transversais da Álgebra Linear, como a diagonalização de matrizes, a noção de positividade e o uso de métodos formais na resolução de problemas.

## Objetivos

### Objetivo Geral

Apresentar uma dedução formal do critério de Sylvester, analisando suas interpretações geométricas e aplicações matemáticas.

## Objetivos Específicos

- (i) Compreender o conceito de forma quadrática e sua relação com matrizes simétricas;
- (ii) Deduzir formalmente o critério de Sylvester;
- (iii) Apresentar aplicações do critério em contextos como cálculo e geometria analítica.

## Estrutura do Trabalho

O trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro está voltado para os conceitos preliminares, onde aborda a contextualização central para o desenvolvimento do Critério de Sylvester, como as matrizes simétricas, os determinantes principais, as formas quadráticas e a noção de definitude. Essa contextualização é fundamental para compreender toda a matemática envolvida na dedução do critério. Esses conceitos iniciais são de suma importância para garantir clareza ao longo de todo o trabalho.

O segundo capítulo concentra a atenção para o critério de Sylvester. Inicialmente é mostrada uma breve contextualização histórica sobre James Joseph Sylvester, um matemático que dá origem ao critério e destaca a sua importância especialmente para a álgebra linear. Posteriormente é mostrado o critério e como ele é essencial para definir a natureza de matrizes simétricas, determinando assim se é definida positiva, definida negativa ou indefinida, por meio da análise de seus menores principais líderes. Dessa forma, esse feito nos mostra o avanço e o grande marco que esse feito nos deixou até os dias atuais no estudo em formas quadráticas.

Já no terceiro e último capítulo, mostra as aplicações e interpretações matemáticas do Critério de Sylvester. É destacado como o critério tem uma ampla utilização em diversas áreas do conhecimento, tais como a matemática, a engenharia, a física, entre outros, especialmente aqueles que envolvem problemas em análise de formas quadráticas. Além disso, o capítulo enfatiza a importância do método no estudo de cônicas e quádras, evidenciando assim sua grande relevância na compreensão geométrica e reforçando seu papel como uma ferramenta fundamental no ponto de vista teórico e também do aplicado.

## 1 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, são apresentados os conceitos centrais que sustentam o desenvolvimento do Critério de Sylvester: matrizes simétricas, formas quadráticas e a noção de definitude. Esses tópicos são fundamentais para compreender tanto a estrutura matemática envolvida na dedução do critério quanto suas aplicações em diversos contextos da Matemática.

### 1.1 Matrizes Simétricas e Menores Principais Líderes

As *matrizes simétricas* ocupam um papel central no estudo de formas quadráticas reais, sendo essenciais para a formulação e aplicação do Critério de Sylvester. Nesta seção, apresentamos as definições e propriedades fundamentais relacionadas a esse tipo de matriz, bem como os chamados *menores principais líderes*, elementos-chave no critério que será desenvolvido nos capítulos seguintes.

**Definição 1.1 (Matriz Simétrica)** Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é chamada de simétrica se

$$A = A^T,$$

isto é,  $a_{ij} = a_{ji}$  para todos os  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

A simetria implica que os elementos dispostos em posições simetricamente opostas em relação à diagonal principal são iguais. Como consequência, o estudo de matrizes simétricas pode se concentrar em metade da matriz (acima ou abaixo da diagonal), reduzindo a complexidade em análises práticas.

Segundo Anton e Rorres (2012), as matrizes simétricas surgem naturalmente em problemas de otimização, estatística e geometria analítica.

#### Exemplo 1.1

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois  $A = A^T$ .

Matrizes simétricas possuem propriedades importantes, conforme listaremos a seguir.

**Proposição 1.1** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes simétricas do mesmo tamanho e  $k$  um escalar qualquer, então:*

- (a)  $A^T$  é simétrica;
- (b)  $A + B$  e  $A - B$  são simétricas;
- (c)  $kA$  é simétrica.

**Demonstração da Proposição 1.1** vide **Boldrini (1980, p. 08-09):**

- (a) Como  $A$  é simétrica, temos que  $A^T = A$ . Logo,  $(A^T)^T = A^T$ ;
- (b) Temos que,  $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ .  
Analogamente,  $(A - B)^T = A^T - B^T = A - B$ .
- (c) Para o escalar  $k$ , temos,  $(kA)^T = kA^T = kA$ .

Sendo assim, as propriedades (a), (b) e (c) são válidas.

**Exemplo 1.2** *Considerando as matrizes simétricas*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Temos também as matrizes simétricas*

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observa-se com esse exemplo que as operações de soma, subtração e multiplicação por um escalar de matrizes simétricas continuam resultando em matrizes simétricas. Ao longo do trabalho, veremos que essa propriedade é fundamental no estudo de formas quadráticas.

**Proposição 1.2** *O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e somente se, as matrizes se comutam, ou seja,  $AB = BA$ .*

Essas propriedades garantem que as matrizes simétricas sejam ideais para a análise da definitude de formas quadráticas, pois essa análise está intimamente ligada ao sinal dos autovalores de  $A$ .

**Definição 1.2 (Matriz Ortogonal)** *Uma matriz quadrada  $A$  é dita ortogonal se sua transposta  $A^T$  for igual à sua inversa  $A^{-1}$ . Isso implica que  $AA^T = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade.*

**Definição 1.3 (Matriz Diagonalizável)** *Uma matriz diagonalizável é uma matriz quadrada  $A$  que pode ser transformada em uma matriz diagonal  $D$  através de uma matriz invertível  $P$  tal que*

$$P^{-1}AP = D.$$

*Em outros termos, isto significa que existe uma matriz  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  que, quando multiplicadas, resultam em uma matriz diagonal.*

**Definição 1.4 (Autovalores e Autovetores)** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um número  $\lambda \in \mathbb{R}$  é chamado de autovalor de  $A$  se existir um vetor não nulo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

*O vetor  $\mathbf{v}$  é chamado de autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ .*

Para encontrar os autovalores de  $A$ , resolvemos a equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

cujas soluções em  $\lambda$  fornece os autovalores da matriz, onde veremos no exemplo 1.3.

**Proposição 1.3** *Toda matriz simétrica possui apenas autovalores reais.*

**Teorema 1.1** *Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica, então:*

- (a) *Todos os autovalores de  $A$  são reais.*
- (b) *Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

**Teorema 1.2 (Teorema Espectral)** *Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é simétrica, então existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que*

$$P^TAP = D,$$

*onde  $D$  é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores reais de  $A$ .*

Em diversos livros de álgebra linear, a sua demonstração diz que:

Se  $A = A^T$ , todo autovalor de  $A$  é real. Ademais, os autovetores que são associados a autovalores distintos são ortogonais.

Uma base do autoespaço pode ser ortonormalizada pelo processo de Gram-Schmidt, admitindo uma base ortonormal. Como  $A$  é simétrica, a soma de dimensões dos autoespaços é  $n$ , então existe uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  que é formada pelos autovetores de  $A$ .

seja  $P$  a matriz cujas colunas são esses autovetores ortonormais. Então  $P$  é uma matriz ortogonal e  $P^T A P = D$ , onde  $D$  é a matriz diagonal formada pelos autovalores de  $A$ . Logo,  $A$  é diagonalizável por uma transformação ortogonal.

A matriz  $P$  cujas colunas são os autovetores ortonormais de  $A$  proporciona uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  em que  $A$  atua de forma diagonal.

Vale salientar também que, as duas últimas proposições garantem que as matrizes simétricas são diagonalizáveis por matrizes ortogonais e, por isso, são fundamentais na análise da definitude de formas quadráticas.

### Exemplo 1.3

Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculamos o polinômio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Resolvendo

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

temos as raízes

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Para  $\lambda_1 = 3$ , resolvemos

$$(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isso gera a equação  $-v_1 + v_2 = 0$ , ou seja,  $v_2 = v_1$ . Um autovetor associado é

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para  $\lambda_2 = 1$ , resolvemos

$$(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isso gera  $v_1 + v_2 = 0$ , ou seja,  $v_2 = -v_1$ . Um autovetor associado é

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos as normas:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Normalizamos:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tomamos como colunas da matriz  $P$  os autovetores normalizados:

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

E, de fato, verificamos que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D,$$

onde  $D$  é diagonal contendo os autovalores.

A seguir veremos a definição de menores principais líderes, que surge da necessidade de verificar a positividade de uma forma quadrática, sem precisar calcular os autovalores, pois estes nem sempre são fáceis de calcular, principalmente em dimensão alta.

**Definição 1.5 (Menor Principal Líder)** *Seja  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o menor principal líder de ordem  $k$ , escreve-se  $M_k$  como o determinante da submatriz  $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ , obtida ao se considerar as  $k$  primeiras linhas e colunas de  $A$ . Isto é,*

$$M_k = \det(A_k).$$

#### Exemplo 1.4

Considerando  $n=3$ , com  $A$  simétrica, temos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então os menores principais líderes são:

- $M_1 = \det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ ,

- $M_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,
- $M_3 = \det(A)$ .

Os menores principais líderes são fundamentais na formulação do Critério de Sylvester, pois seu sinal determina a definitude de formas quadráticas associadas a matrizes simétricas.

## 1.2 Formas Quadráticas e Definitude

As formas quadráticas são expressões algébricas que surgem naturalmente em contextos diversos da matemática, como geometria analítica, álgebra linear e cálculo multivariado. Esta seção apresenta a definição formal, propriedades e interpretação geométrica das formas quadráticas reais.

**Definição 1.6 (Forma Quadrática)** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica. A aplicação*

$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

*é chamada de forma quadrática associada a matriz  $A$ .*

### Exemplo 1.5

Seja  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , então a forma quadrática associada a matriz  $A$  é a aplicação  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 2xy + 3y^2.$$

O estudo das formas quadráticas está intimamente relacionado à análise do sinal que  $Q(x)$  assume. Nesse contexto, introduz-se o conceito de definitude, que consiste em classificar a forma quadrática de acordo com os valores que ela assume para vetores não nulos.

**Definição 1.7** *Seja  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  uma forma quadrática com  $A$  simétrica. Dizemos que:*

- (a)  $Q$  é positiva definida se  $Q(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq 0$ ;
- (b)  $Q$  é negativa definida se  $Q(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq 0$ ;
- (c)  $Q$  é semidefinida positiva se  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{x}$ ;

(d)  $Q$  é semidefinida negativa se  $Q(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x}$ ;

(e)  $Q$  é indefinida se assume valores positivos e negativos.

A noção de definitude fornece uma primeira descrição global do comportamento da forma quadrática, sendo particularmente relevante em diversas aplicações, como em problemas de otimização e no estudo de pontos críticos de funções reais.

**Proposição 1.4** *A definitude de uma forma quadrática  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , com  $A$  simétrica, é determinada pelos sinais dos autovalores de  $A$ :*

(a)  $Q$  é positiva definida se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  são positivos;

(b)  $Q$  é negativa definida se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  são negativos;

(c)  $Q$  é semidefinida positiva se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  são não negativos e pelo menos um deles é nulo;

(d)  $Q$  é semidefinida negativa se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  são não positivos e pelo menos um deles é nulo;

(e)  $Q$  é indefinida se  $A$  possui autovalores positivos e negativos.

*Demonstração:* Como  $A$  é simétrica, pelo Teorema Espectral existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que

$$P^T A P = D,$$

onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  é a matriz diagonal cujas entradas  $\lambda_i$  são os autovalores reais de  $A$ . Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , ponha  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$ . Então

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

□

**(a) Definitude positiva.**

⇒ Suponha que  $Q$  é positiva definida, ou seja,  $Q(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq 0$ . Seja  $v$  um autovetor de  $A$  associado a um autovalor  $\lambda$  (portanto  $Av = \lambda v$ ). Como  $v \neq 0$ ,

$$Q(v) = v^T A v = v^T (\lambda v) = \lambda \|v\|^2.$$

Pela hipótese  $Q(v) > 0$  e  $\|v\|^2 > 0$ , segue  $\lambda > 0$ . Como isso vale para qualquer autovalor, todos os autovalores são positivos.

$\Leftarrow$  Suponha agora que  $\lambda_i > 0$  para todo  $i$ . Para qualquer  $\mathbf{x} \neq 0$ , na escrita  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$  temos  $\mathbf{y} \neq 0$  e

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Cada termo  $\lambda_i y_i^2 \geq 0$  e pelo menos um é estritamente positivo (pois  $\mathbf{y} \neq 0$ ), logo  $Q(\mathbf{x}) > 0$ . Assim  $Q$  é positiva definida.

**(b) Definitude negativa.**

O argumento é análogo ao caso (a). Se todos os autovalores  $\lambda_i < 0$ , então

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 < 0$$

para todo  $\mathbf{x} \neq 0$ , logo  $Q$  é negativa definida. Reciprocamente, se  $Q$  é negativa definida, tomando um autovetor  $v$  associado a um autovalor  $\lambda$  obtemos  $Q(v) = \lambda \|v\|^2 < 0$ , e assim  $\lambda < 0$ . Portanto todos os autovalores são negativos.

**(c) Indefinidade.**

Se  $A$  possui autovalores de sinais diferentes, existe pelo menos um autovalor  $\lambda_+ > 0$  com autovetor  $u$  e um autovalor  $\lambda_- < 0$  com autovetor  $w$ . Então

$$Q(u) = \lambda_+ \|u\|^2 > 0 \quad \text{e} \quad Q(w) = \lambda_- \|w\|^2 < 0,$$

logo  $Q$  assume valores positivos e negativos e, portanto, é indefinida.

Reciprocamente, se  $Q$  é indefinida, existem  $\mathbf{x}, \mathbf{z}$  tais que  $Q(\mathbf{x}) > 0$  e  $Q(\mathbf{z}) < 0$ . Na base ortonormal que diagonaliza  $A$  (obtida pelo Teorema espectral), escrevemos  $Q$  como  $\sum_i \lambda_i y_i^2$ . A existência de vetores que produzem soma positiva e soma negativa implica que nem todos os  $\lambda_i$  têm o mesmo sinal — isto é, há autovalores positivos e negativos.

Assim, as afirmativas (a), (b) e (c) ficam demonstradas. □

A análise dos autovalores fornece um critério teórico importante, mas nem sempre é conveniente computá-los diretamente. O Critério de Sylvester, estudado no próximo capítulo, fornece uma alternativa baseada nos determinantes principais da matriz  $A$ .

**Teorema 1.3 (Mudança de Base)** *Se  $A$  é simétrica, então existe uma base ortonormal de autovetores tal que, sob essa base, a forma quadrática se escreve como*

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A$ . Essa forma é chamada de forma canônica de  $Q$ .

*Demonstração:* Como  $A$  é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma matriz ortogonal  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$P^T A P = D$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Consideramos a mudança de variáveis

$$x = P y.$$

Substituindo a mudança na forma quadrática, temos:

$$Q = x^T A x = (P y)^T A (P y) = y^T P^T A P y.$$

Usando a diagonalização ortogonal de  $A$ , logo:

$$Q(x) = y^T D y.$$

Como  $D$  é diagonal, temos

$$y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

□

**Exemplo 1.6** Considere a forma quadrática

$$Q(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2,$$

associada à matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde o termo  $4xy$  corresponde aos elementos simétricos  $a_{12} = a_{21} = 2$ . Calculamos o polinômio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0.$$

Expandindo:

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 0 = \lambda^2 - 5\lambda.$$

Assim, o polinômio é

$$\lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) = 0.$$

Logo, as raízes (autovalores) são:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5.$$

Para  $\lambda_1 = 0$ , resolvemos

$$(A - 0 \cdot I)\mathbf{v} = A\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As equações são:

$$4v_1 + 2v_2 = 0, \quad 2v_1 + v_2 = 0.$$

A segunda dá  $v_2 = -2v_1$ . Substituindo na primeira:

$$4v_1 + 2(-2v_1) = 4v_1 - 4v_1 = 0,$$

confirmando a consistência. Portanto, um autovetor associado é

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Para  $\lambda_2 = 5$ , temos

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 - 5 & 2 \\ 2 & 1 - 5 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Isso gera o sistema:

$$-v_1 + 2v_2 = 0, \quad 2v_1 - 4v_2 = 0.$$

A primeira equação dá  $v_1 = 2v_2$ . Substituindo na segunda:

$$2(2v_2) - 4v_2 = 4v_2 - 4v_2 = 0,$$

confirmando a consistência. Um autovetor associado é

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos as normas:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Assim, os autovetores normalizados são:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definimos

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = D,$$

confirmando que  $P$  diagonaliza  $A$  com autovalores 0 e 5. Como os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 5$ , ambos não-negativos, a forma quadrática  $Q$  é *semidefinida positiva*. Isso significa que  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , porém  $Q(\mathbf{x}) = 0$  para algum  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (por exemplo, para  $\mathbf{x}$  paralelo a  $\mathbf{u}_1$ ).

### 1.3 Cônicas e Quádricas Associadas a Formas Quadráticas

O estudo das formas quadráticas possui uma rica interpretação geométrica, especialmente quando associadas às chamadas *cônicas* e *quádricas*. Essas figuras são as representações geométricas das equações de segundo grau em duas e três variáveis, respectivamente, e constituem um elo natural entre a álgebra linear e a geometria analítica. As Figuras 1, 2, 3 e 4 ilustra a geometria dessas superfícies.

Podemos fazer a representação da forma geral de uma equação quadrática em  $x$  e  $y$  em:  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ , onde pelo menos um dos coeficientes  $a, b$  e  $c$ , não é zero. Os gráficos dessas equações são chamadas **secções cônicas** ou simplesmente **cônicas**. Dá-se esse nome porque esses gráficos são obtidos a partir de secções transversais de um cone (duplo), cortando-o com um plano. alguns dos exemplos de secções cônicas são elipses, hipérbolas e parábolas. Estas são chamadas de cônicas **não degeneradas**. Há também as cônicas **degeneradas** que é quando uma secção transversal de um cone resulta em um único ponto, uma reta ou um par de retas.

Figura 1 – Cônica não degenerada-Elipse



Figura: Flávio Silva (2025).

Figura 2 – Cônica não degenerada-Hipérbole

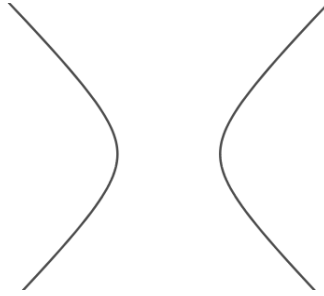


Figura: Flávio Silva (2025)

Figura 3 – Cônica Degenerada-Duas Retas Concorrentes

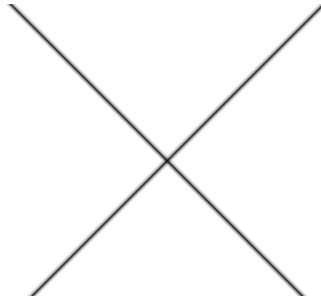


Figura: Flávio Silva (2025)

Figura 4 – Cônica Degenerada-Um Ponto



Figura: Flávio Silva (2025)

**Definição 1.8** *Uma cônica é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfaz uma equação geral do segundo grau:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

*com pelo menos um dos coeficientes  $A, B, C$  diferente de zero.*

A parte quadrática da equação,  $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ , é uma forma qua-

drática em duas variáveis e determina a *natureza geométrica* da cônica.

A matriz simétrica associada a essa forma é:

$$A_Q = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

Por meio de uma mudança ortogonal de coordenadas, é possível eliminar o termo misto  $xy$ , obtendo a *forma reduzida*:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + F' = 0,$$

Ou seja, Como essa matriz  $A_Q$  é simétrica e pelo Teorema Espectral existe uma matriz ortogonal  $P$ , onde,  $P^T A_Q P$  é diagonal. A mudança ortogonal de coordenadas  $(x, y) = P(x', y')$  elimina o termo misto  $xy$  da equação, reduzindo a forma quadrática a  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $A_Q$ .

**Proposição 1.5** *A natureza da cônica centrada na origem depende dos sinais dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :*

*"A demonstração está baseada no Teorema Espectral e na diagonalização ortogonal de matrizes simétricas, conforme Boldrini (1980, cap. 7), onde é permitido classificar a cônica pelos sinais dos autovalores."*

- (a) *Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm o mesmo sinal, a cônica é uma **elipse** (ou círculo, se  $\lambda_1 = \lambda_2$ );*
- (b) *Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm sinais opostos, a cônica é uma **hipérbole**;*
- (c) *Se um dos autovalores é nulo e o outro é não nulo, a cônica é uma **parábola** (ou uma degeneração dela);*
- (d) *Se ambos são nulos, a equação representa um **ponto** ou o **plano todo**.*

**Exemplo 1.7** *Considere  $Q(x, y) = 9x^2 - 4y^2$ . A matriz associada é*

$$A_Q = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

*cujos autovalores são  $\lambda_1 = 9$  e  $\lambda_2 = -4$ . Como os sinais são opostos, as curvas  $Q(x, y) = c$ , quando  $c \neq 0$ , representam **hipérbolas**. Em particular, para  $c = 36$ , obtém-se a hipérbole ilustrada na Figura 5.*

Figura 5 – Hipérbole

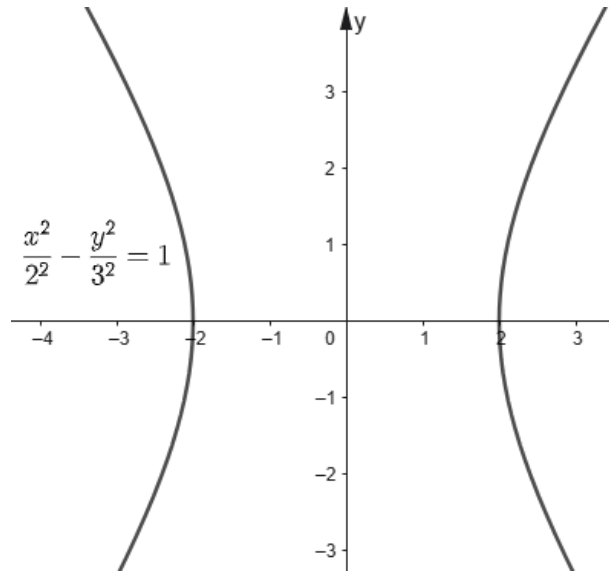


Figura: Flávio Silva (2025)

**Definição 1.9** Uma *superfície quádrlica* é o conjunto de pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  que satisfaz uma equação geral de segundo grau:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

com pelo menos um dos coeficientes  $A, B, C, D, E, F$  diferente de zero.

A forma quadrática associada é

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx,$$

cujas matriz simétrica é:

$$A_Q = \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{F}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{E}{2} \\ \frac{F}{2} & \frac{E}{2} & C \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Teorema Espectral, existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que

$$P^T A_Q P = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A_Q$ .

No novo sistema de coordenadas  $(x', y', z') = P^T(x, y, z)$ , a equação reduz-se a:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + J' = 0.$$

**Proposição 1.6** A natureza da superfície quádrlica centrada na origem depende dos sinais dos autovalores de  $A_Q$ :

(a) Todos os autovalores positivos: **elipsoide**, ilustrada na figura 6.

Figura 6 - Elipsoide

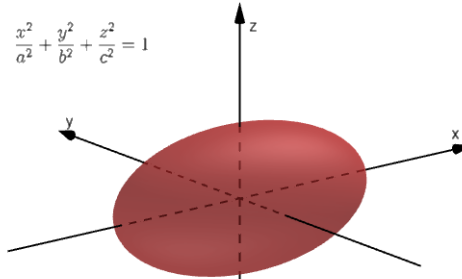


Figura: Flávio Silva (2025)

- (b) Dois positivos e um negativo (ou vice-versa): **hiperboloide** (de uma ou duas folhas), este primeiro sendo mostrado no Exemplo 1.9.
- (c) Pelo menos um autovalor nulo: **superfície degenerada**; em particular, pode ocorrer um **paraboloide cilíndrico**; mostrada no Exemplo 1.11.
- (d) Autovalores com sinais opostos e pelo menos um autovetor nulo: superfícies degeneradas, em particular cones degenerados (como pares de planos, por exemplo), como mostrado na Figura 7.

Figura 7 - Superfícies Degeneradas

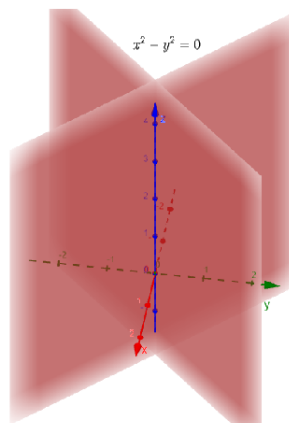


Figura: Flávio Silva (2025)

**Exemplo 1.8** Considere a forma quadrática

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

A matriz associada é diagonal:

$$A_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$ . Como há dois positivos e um negativo, o gráfico de  $Q(x, y, z) = c$ , com  $c \neq 0$ ,. Em particular, para  $c = 1$ , obtém-se um **hiperboloide de uma folha**, cuja superfície é ilustrada na Figura 8.

Figura 8 – Hiperbolóide de uma Folha

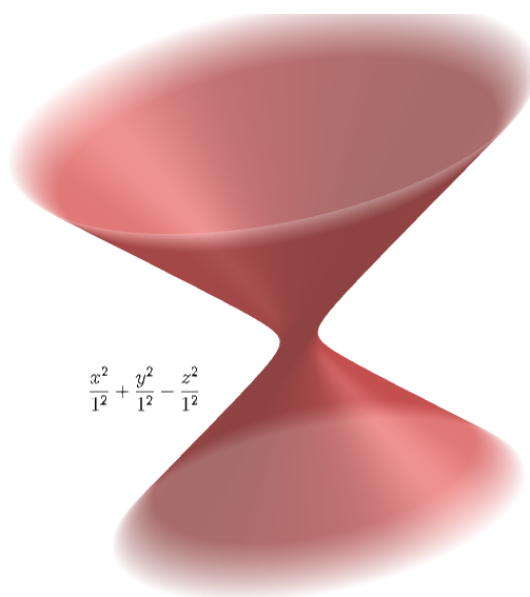


Figura: Flávio Silva (2025)

Assim como no caso bidimensional, a diagonalização de  $A_Q$  simplifica o estudo das quádricas, revelando sua orientação e natureza geométrica em função dos autovalores. Essas relações também estão na base da análise de definitude de formas quadráticas, discutida na seção seguinte.

## 1.4 Interpretação Geométrica da Definitude

O estudo da definitude de uma forma quadrática não se restringe a propriedades algébricas; há também uma importante interpretação geométrica. Essa interpretação está

associada às superfícies (ou curvas, no caso bidimensional) de nível definidas pela equação

$$Q(\mathbf{x}) = c,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante  $A$ . Esta equação representa uma *cônica* centrada na origem, cuja natureza depende da definitude de  $Q$ . Analogamente, em três variáveis  $Q(x, y, z) = c$  representa uma *superfície quádrlica* centrada na origem.

### 1.4.1 Formas Quadráticas em Duas Variáveis

Considere uma forma quadrática em duas variáveis reais:

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

A matriz simétrica associada é

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

e a equação  $Q(x, y) = c_0$  representa, geometricamente, uma cônica centrada na origem.

A classificação da cônica pode ser obtida analisando a definitude de  $A$ :

**Proposição 1.7** *Seja  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  uma forma quadrática associada à matriz simétrica  $A$ . Então:*

- (a) *Se  $A$  é positiva definida, as curvas de nível  $Q(\mathbf{x}) = c > 0$  são elipses;*
- (b) *Se  $A$  é negativa definida, as curvas de nível  $Q(\mathbf{x}) = c < 0$  também são elipses, porém com o eixo invertido;*
- (c) *Se  $A$  é indefinida, as curvas de nível  $Q(\mathbf{x}) = c$  são hipérbolas (ou hiperboloides);*
- (d) *Se  $A$  é semidefinida positiva ou negativa, as curvas de nível degeneram em pares de retas.*

*Demonstração:* Pelo Teorema Espectral,  $A = PDP^T$ , com  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Definindo  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$ , temos:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Assim, a equação  $Q(\mathbf{x}) = c$  torna-se

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = c.$$

O sinal dos autovalores determina se os termos  $y_i^2$  aparecem com coeficiente positivo ou negativo, o que define se a superfície é elipsoidal, hiperbólica ou degenerada.  $\square$

Esses resultados são análogos, em dimensões maiores, à classificação de superfícies quádricas.

**Exemplo 1.9** *Considere a forma*

$$Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2.$$

A matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O determinante é  $\det(A) = 3 \cdot 1 - (-2)^2 = -1 < 0$ , logo  $A$  é indefinida. Portanto,  $Q(x, y) = c$ , quando  $c \neq 0$ , representa uma **hipérbole**, que é ilustrada na Figura 9.

Figura 9 – Hipérbole

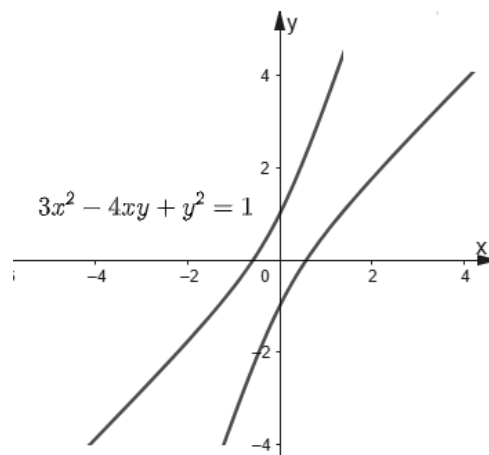


Figura: Flávio Silva (2025)

Nesse exemplo é analisado e ilustrado a relação entre as propriedades algébricas das matrizes simétricas e a sua geometria das curvas associadas às formas quadráticas, mostrando também a importância da visualização gráfica, através da ferramenta de apoio como o geogebra, evidenciando assim uma melhor compreensão teórica.

#### 1.4.2 Interpretação em Dimensões Superiores

Para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica, a equação  $Q(\mathbf{x}) = c$  define uma superfície quádrica no espaço  $\mathbb{R}^n$ . A diagonalização ortogonal de  $A$  permite reescrever a forma como

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

onde as coordenadas  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$  correspondem a um sistema de eixos ortogonais principal.

Os sinais dos autovalores determinam a **curvatura local** e a natureza geométrica da superfície:

- Todos os  $\lambda_i > 0$ : superfície **elipsoidal** (mínimo local).
- Todos os  $\lambda_i < 0$ : superfície **elipsoidal invertida** (máximo local).
- Autovalores de sinais opostos: superfície **hiperbólica**.
- Alguns  $\lambda_i = 0$ : **cilindros parabólicos** ou superfícies degeneradas.

**Exemplo 1.10** *Considere novamente a forma quadrática*

$$Q(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2,$$

associada à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Já vimos que seus autovalores são  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = 0$ , e que os autovetores correspondentes são:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalizando esses vetores, obtemos uma base ortonormal:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz ortogonal  $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$  diagonaliza  $A$ :

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No novo sistema de coordenadas  $(y_1, y_2) = P^T(x, y)$ , a forma quadrática torna-se

$$Q(x, y) = 5y_1^2.$$

As curvas de nível são dadas por  $5y_1^2 = c$ , ou seja:

$$y_1 = \pm \sqrt{\frac{c}{5}}.$$

Essas são duas retas paralelas no plano  $(y_1, y_2)$ , o que confirma que  $Q$  é **semidefinida positiva**. Geometricamente, o gráfico de  $z = Q(x, y)$  é um parabolóide cilíndrico que se estende no eixo associado a  $y_2$ , conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 – Paraboloide Cilíndrico

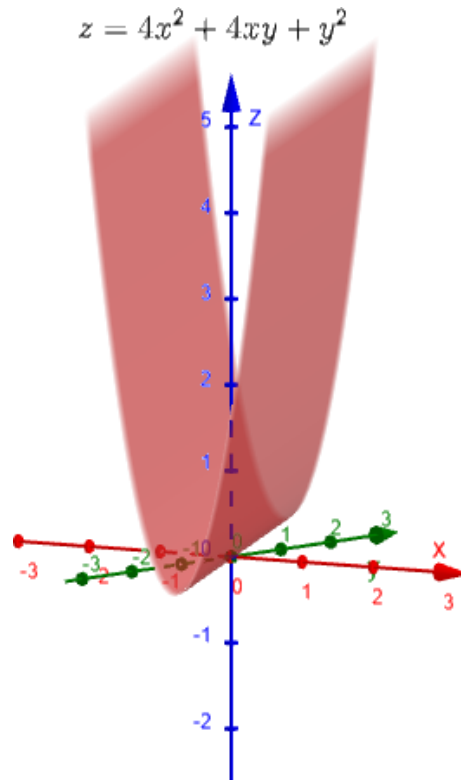


Figura: Flávio Silva (2025)

A interpretação geométrica reforça a importância da definitude no estudo da concavidade de funções multivariadas. Em particular, na análise de pontos críticos, a matriz Hessiana — que é simétrica — desempenha o mesmo papel de  $A$ , e o sinal de seus autovalores indica se o ponto é um mínimo, máximo ou sela.

Concluimos, portanto, que a definitude de uma matriz simétrica, além de possuir um significado algébrico claro, está intimamente ligada à geometria das superfícies geradas pela forma quadrática correspondente. Essa conexão será essencial na próxima seção, onde discutiremos o **Critério de Sylvester**, que fornece uma caracterização prática e puramente algébrica para determinar a definitude de uma matriz.

## 2 O CRITÉRIO DE SYLVESTER

O Critério de Sylvester foi formulado por James Joseph Sylvester(1814-1897), um matemático inglês, que teve grande importância para o desenvolvimento da Álgebra Linear, da Teoria dos Invariantes e da Teoria das Matrizes no século XIX. Por volta dos anos de 1950, juntamente com seu colega e amigo Arthur Cayley, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Teoria das Matrizes, a qual conhecemos atualmente. Sylvester foi um dos primeiros a utilizar o termo matriz, embora estudos relacionados já existissem anteriormente.

Vários matemáticos já haviam investigado formas quadráticas do tipo  $Q(a) = x^T A$ , entre eles Carl Friedrich Gauss. No entanto, a principal questão da época consistia em determinar se a forma quadrática era sempre positiva, se era sempre negativa ou se mudava de sinal, apenas por meio da análise da matriz  $A$ .

Nesse contexto, o método foi um grande marco na época, pois possibilitou a verificação da positividade (ou negatividade) de formas quadráticas sem que fosse preciso calcular seus autovalores. Diante disso, ficou até mais acessível o estudo da curvatura de funções e superfícies em cálculo diferencial, entre outras aplicações. Algumas de suas obras mais importantes são a Lei da Inércia de Sylvester e o Critério de Sylvester, sendo fundamentais para a classificação de formas quadráticas e de matrizes simétricas.

Foi a partir dessas ideias que Sylvester formulou o seu método algébrico, o qual permite determinar se uma matriz simétrica real é definida positiva (ou negativa), com base nos menores principais líderes da matriz. Assim, o critério de Sylvester surgiu como uma ferramenta prática e fundamental para a análise da natureza de matrizes, possibilitando assim verificar se uma matriz hermitiana ou simétrica é **negativa-definida**, **positiva-definida** ou **indefinida**.

**Definição 2.1** *Uma matriz simétrica  $A$  é **negativa definida** se, e somente se, os determinantes de seus menores principais líderes de ordem  $k$  satisfazer:  $\det(A_k)$  tem sinal  $(-1)^k$ .*

Ou seja, para a matriz  $A$  ser **negativa-definida**, os determinantes dos menores principais líderes devem ficar mudando o sinal, ou seja, começa com negativo para o menor de 1x1, positivo para o de 2x2 e assim sucessivamente.

**Exemplo 2.1** *Considerando a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verificando seus menores principais líderes, temos:

$$\det(A_1) = -2 < 0$$

$$\det(A_2) = (-2)(-1) - 1 = 1 > 0.$$

Logo, os sinais do resultado dos menores principais líderes são alternados, começando com negativo, o que nos mostra que a matriz  $A$  é negativa definida.

**Definição 2.2** Uma matriz simétrica  $A$  é **positiva definida** se, e somente se, todos os determinantes de seus menores principais líderes forem positivos.

Ou seja, todos os determinantes de seus menores principais líderes será sempre positivo. Logo:

$$\det(A_1) > 0, \det(A_2) > 0, \dots, \det(A_n) > 0$$

**Exemplo 2.2** Considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificando seus menores principais líderes, temos:

$$\det(A_1) = 2 > 0$$

$$\det(A_2) = (2)(1) - 1 = 1 > 0.$$

Logo, os sinais do resultado dos menores principais líderes são positivos, o que nos mostra que a matriz  $A$  é positiva definida.

**Definição 2.3** Uma matriz simétrica  $A$  é **indefinida** quando não satisfaz o padrão de sinais exigidos das definições anteriores.

Ou seja, todos os determinantes de seus menores principais líderes não precisa seguir um padrão estabelecido, nesse caso, o resultado dos determinantes têm sinais mistos.

**Exemplo 2.3** Considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verificando seus menores principais líderes, temos:

$$\det(A_1) = 0$$

$$\det(A_2) = (0)(0) - (2)(2) = -4.$$

Logo, os sinais do resultado dos menores principais líderes têm sinais mistos, o que nos mostra que a matriz  $A$  é indefinida.

O critério de Sylvester nos mostra que basta apenas calcular os determinantes das submatrizes principais sem a necessidade de calcular os autovalores, sendo uma forma bem prática de avaliar a definitude de uma matriz.

Diante disso, o critério nos mostra que essa estrutura dos determinantes principais contém informações completas sobre o comportamento da forma quadrática associada a matriz. Devido a isso, o método é amplamente utilizado em: Cálculo multivariável, onde nos mostra a classificação de pontos críticos; no estudo de cônicas e quádras, onde nos mostra a análise da curvatura, entre outros.

## 2.1 Demonstração do Critério de Sylvester

A demonstração do Critério de Sylvester geralmente utiliza a indução sobre uma matriz de ordem  $n$ . Vamos seguir uma direção para essa demonstração: Se os menores principais líderes são positivos, então a matriz é definida positiva.

Por indução, para  $n = 1$ , se  $\Delta_1 = a_{11} > 0$ , logo a matriz é definida positiva, pois  $x^T Ax = a_{11}x^2 > 0$  para  $x \neq 0$ .

Vamos supor que o método seja válido para matrizes de ordem  $n - 1$ . Então, seja  $A$  uma matriz de ordem  $n \times n$  com todos  $\Delta_k > 0$ .

Fazendo a decomposição da matriz, temos:

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Onde  $A_{n-1}$  é uma submatriz de ordem  $n - 1$ .

Pela hipótese de indução, como todos os menores principais líderes de  $A_{n-1}$  são positivos,  $A_{n-1}$  é definida positiva.

Como  $A_{n-1}$  é invertível, pois o seu determinante é maior que 0, podemos aplicar o complemento de Schur ou uma mudança de base para zerar o vetor  $v$ , de modo que exista uma matriz triangular inferior  $L$  tal que:

$$A = L \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0^T & \alpha \end{pmatrix} L^T$$

Nesse caso,  $\alpha$  é o complemento de Schur:  $\alpha = a_{nn} - v^T A_{n-1}^{-1} v$

Calculando o determinante de ambos os lados, temos:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0^T & \alpha \end{pmatrix} \cdot \det(L)^T$$

Como  $L$  é unitriangular,  $\det(L) = 1$ . Logo:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \alpha$$

Sabemos então que  $\Delta_n > 0$  e  $\Delta_{n-1} > 0$ . Obrigatoriamente  $\alpha > 0$ . Como  $A$  é congruente a uma matriz em bloco com  $A_{n-1}$  que é definida positiva e  $\alpha$  que é positivo, todos os seus autovalores são positivos. Provando assim que  $A$  é definida positiva.

### 3 APLICAÇÕES

#### 3.1 Aplicações e Interpretações Matemáticas

O Critério de Sylvester possui uma ampla utilização em diversas áreas da matemática, da engenharia, da física devido a sua aplicabilidade na análise de formas quadráticas e nos mostra como é utilizado no comportamento de funções multivariadas. Nesta seção, serão mostrados algumas de suas aplicações mais relevantes.

O método pode ser explorado através de ferramentas computacionais com softwares tais como o Geogebra ou WolframAlpha, no qual é permitido visualizar como a variação dos coeficientes de uma matriz altera sua definidade através de sua natureza geométrica e como consequência, o formato geométrico das superfícies associadas.

##### 3.1.1 Aplicações na Álgebra Linear e Geometria Analítica

O Critério de Sylvester é importantíssimo no estudo de cônicas e quádricas, sendo um método utilizado para classificar a natureza das formas quadráticas nelas associadas. Diante disso, é verificado se elas representam elipses, hipérbolas, parábolas, etc, baseando-se apenas pela análise dos menores principais líderes da matriz simétrica da forma quadrática.

Nesse método o processo é simplificado e não é necessário calcular seus autovalores. Diante disso, é preciso determinar a natureza da curvatura da superfície ou da curva, determinando assim, se ela é **definida positiva, definida negativa ou indefinida**.

A equação geral de uma cônica é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}.$$

Strang(2006), reforça que a classificação da cônica depende das propriedades da forma quadrática associada a:

$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ , podendo ser escrita também na forma matricial:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz simétrica associada a essa forma quadrática é:

$$A_Q = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

(Segundo Lay; Lay; McDonalds, 2016), a classificação da cônica depende da definitude da matriz  $A_Q$ .

Então, esse método de Sylvester permite classificar a cônica em:

- **Elipse(ou círculo):** Se a matriz  $A_Q$  é definida positiva ou definida negativa. Para esse caso, se  $\det(A_1) = A > 0$  e  $\det(A_2) = \det(A_Q) > 0$  para o caso da matriz  $A_Q$  definida positiva, ou se  $\det(A_1) = A < 0$  e  $\det(A_2) = \det(A_Q) > 0$  para o caso da matriz  $A_Q$  definida negativa. A elipse devido a sua definição geométrica é uma curva fechada. A equação da elipse é mostrada na Figura 11.

Figura 11 – Equação da Elipse

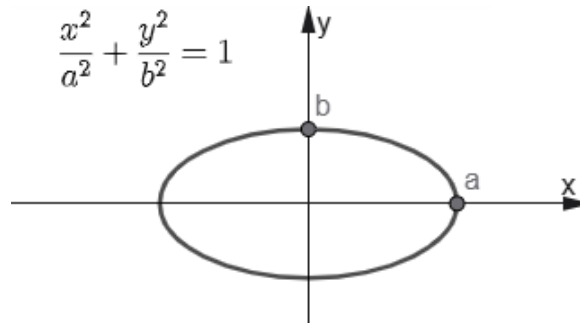


Figura: Flávio Silva (2025)

No Exemplo 2.1 vimos a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, sua forma quadrática associada é:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2x^2 + 2xy - y^2.$$

Baseando-se em seus menores principais líderes vimos também que a referida matriz é negativa definida, o que representa uma elipse, como é mostrada na Figura 12.

Figura 12 - Elipse

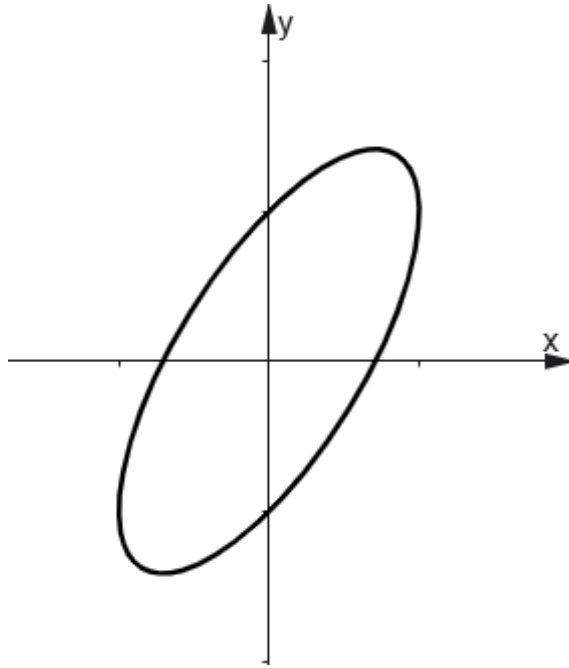


Figura: Flávio Silva (2025)

No caso da matriz associada ser negativa definida, a forma quadrática assume apenas valores não positivos. Logo, a equação  $Q(x, y) = 1$  não tem solução real. Nesse caso, para representar graficamente a cônica, usamos a equação equivalente  $Q(x, y) = -1$ , resultando assim em uma elipse real.

No Exemplo 2.2 vimos também a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Que corresponde a forma quadrática associada:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 2xy + y^2.$$

Como a referida matriz é positiva definida e baseando em seus menores principais líderes, temos também uma elipse, conforme ilustra a Figura 13.

Figura 13 - Elipse

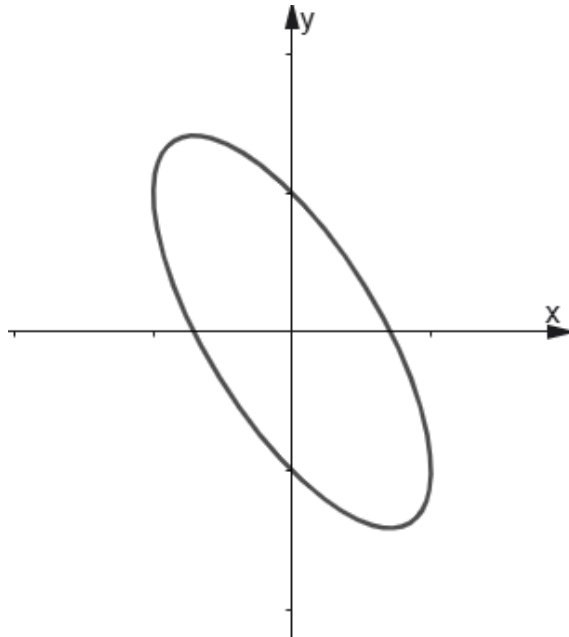


Figura: Flávio Silva (2025)

- **Hipérbole:** Se a matriz  $A_Q$  é indefinida. Para esse caso, o resultado dos determinantes de seus menores principais líderes tem sinais opostos, ou seja, tem um sinal positivo e um negativo ou um sinal negativo e outro positivo. A hipérbole é uma curva fechada. A hipérbole consiste em duas curvas separadas que se afastam uma da outra, como é mostrado na Figura 14.

Figura 14 - Equação da Hipérbole

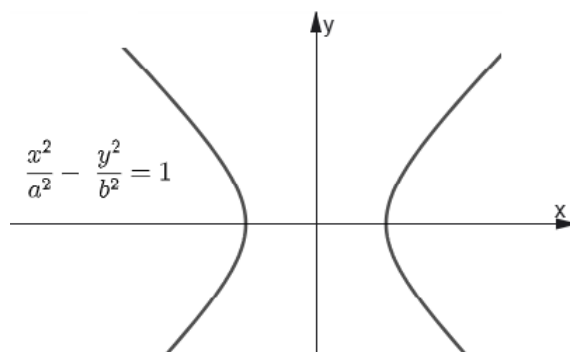


Figura: Flávio Silva (2025)

No Exemplo 2.3 vimos a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, sua forma quadrática associada é:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4xy.$$

Baseando-se em seus menores principais líderes vimos também que a referida matriz é indefinida, o que representa uma hipérbole, que é ilustrada na Figura 15.

Figura 15 - Hipérbole

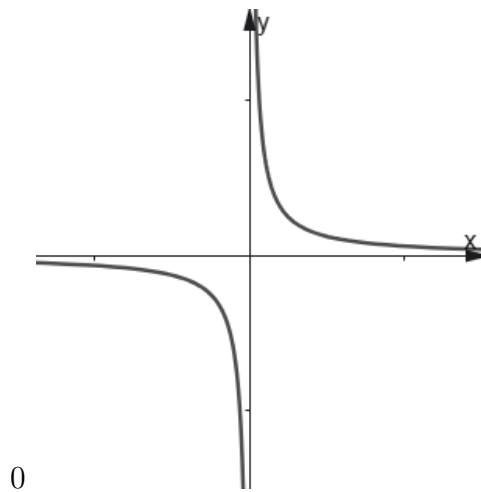


Figura: Flávio Silva (2025)

- **Parábola** Se todo o  $\det (A_Q) = 0$  então essa cônica será uma parábola.

Os exemplos citados mostra assim a importância do estudo dos menores principais líderes na classificação de formas quadráticas e das cônicas associadas.

## CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo apresentar um estudo teórico e aplicado sobre o critério de Sylvester, destacando sua relação com matrizes simétricas e suas principais aplicações, especialmente com o auxílio do software GeoGebra como ferramenta de visualização e apoio didático.

Inicialmente, foram revisados conceitos matemáticos fundamentais, como matrizes simétricas, determinantes principais, formas quadráticas e os diferentes tipos de definitude. Esses conceitos serviram como uma fundamentação teórica para compreender o critério de Sylvester e de sua grande relevância na análise de formas quadráticas associadas a matrizes simétricas.

Posteriormente, foi apresentada a relação dos menores principais líderes e o teorema de Sylvester, evidenciando como o método permite determinar a natureza de uma forma quadrática sem a necessidade de calcular seus autovalores. Essa abordagem mostrou-se eficiente e significativa, especialmente onde o cálculo espectral se torna mais complexo.

Por fim, o estudo também evidenciou a aplicação do critério de Sylvester na análise de cônicas e quádras, permitindo assim a identificação geométrica dessas superfícies por meio da análise de sua definitude. O uso do GeoGebra possibilitou uma visualização gráfica clara dessas estruturas, a qual contribuiu para uma melhor compreensão da relação entre a álgebra e a geometria analítica.

Dessa forma, conclui-se que o critério de Sylvester constitui uma ferramenta matemática relevante no ponto de vista teórico e no aplicado, sendo particularmente útil no estudo de formas quadráticas, matrizes simétricas e superfícies geométricas, podendo assim apresentar um grande potencial didático no ensino da Álgebra Linear.

## REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

AYRES, Frank Jr. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Will, 2009.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper and Row do Brasil, 1980.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014

LAY, David C.; LAY Steven R.; MCDONALD, Judi J. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

MENDES, José de Souza. **Introdução à Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2015.

SANTOS, Luiz Carlos dos; RIBEIRO, Célia Maria. **Formas Quadráticas e Aplicações**. Revista de Educação Matemática, v. 12, n. 2, p. 45-62, 2020.

STRANG, G **Linear Álgebra and Its Applications**. 4. ed. Belmont: Brooks/Cole, 2006