INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS MURICI
PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU EM METODOLOGIAS APLICADAS NO ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

GENILTON FERREIRA DOS SANTOS

EXPLORANDO A ANÁLISE COMBINATÓRIA COM O SAGEMATH: UMA ABORDAGEM ATIVA DE APRENDIZADO EM MATEMÁTICA

MARÇO, AL
2024

GENILTON FERREIRA DOS SANTOS

EXPLORANDO A ANÁLISE COMBINATÓRIA COM O SAGEMATH: UMA ABORDAGEM ATIVA DE APRENDIZADO EM MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Pós-graduação em Metodologias Aplicadas no Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Alagoas, IFAL/*Campus* Murici, (PPGMAECM), como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Metodologias Aplicadas ao Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento.

MARÇO, AL

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
***Campus* Murici**
Biblioteca Professor Cícero Vieira de Araújo

S237e Santos, Genilton Ferreira dos.
Explorando a análise combinatória com o sageMath: uma abordagem ativa de aprendizado em matemática / Genilton Ferreira dos Santos - 2024.
47 f.: il.

Arquivo no Formato PDF do Trabalho Acadêmico.

Orientação: Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Metodologias Aplicadas no Ensino de Ciências e Matemática) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas, Murici. Murici, 2024.

1. Análise combinatória 2. Metodologias ativas 3. SageMath

I. Título

CDD: 511.6

Luciciáudia Silva dos Santos
Bibliotecária — CRB-4/2115

GENILTON FERREIRA DOS SANTOS

EXPLORANDO A ANÁLISE COMBINATÓRIA COM O SAGEMATH: UMA ABORDAGEM ATIVA DE APRENDIZADO EM MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Pós-graduação em Metodologias Aplicadas no Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Alagoas, IFAL/*Campus* Murici, (PPGMAECM), como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Metodologias Aplicadas ao Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
ARLYSON ALVES DO NASCIMENTO
Data: 02/04/2024 19:12:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento (Orientador)
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Documento assinado digitalmente
LEON CAVALCANTE LIMA
Data: 02/04/2024 19:08:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Leon Cavalcante Lima
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Documento assinado digitalmente
RAFAEL DO SACRAMENTO LOPES
Data: 02/04/2024 12:22:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Rafael do Sacramento Lopes
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, por ter me concedido saúde, paz e força para superar os desafios enfrentados. A minha esposa Adriana por estar ao meu lado em todos os momentos e aos meus pais e irmão e sogros por todo apoio. A todos os servidores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas - IFAL, Campus Murici, na representação da coordenadora professora Dr. Danielle dos Santos Tavares Pereira, que tornou possível a realização deste trabalho na oportunidade de participar do curso de especialização e que me permitiu me dedicar e dar continuidade aos estudos referentes ao processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática. Agradeço aos professores que tive a oportunidade de desenvolver habilidades para a vida profissional e acadêmica, em especial, ao meu orientador professor Dr. Arlyson Alves do Nascimento, pela amizade, paciência, dedicação, proporcionando boas experiências acadêmicas e ao incentivo em desenvolver produções científicas em minha trajetória. E as amizades e parcerias que tive a oportunidade de fazer durante a trajetória acadêmica. A banca examinadora deste trabalho representado pelos professores Leon Cavalcante Lima - IFAL, Campus Palmeira dos Índios e Rafael do Sacramento Lopes - IFAL, Campus Maceió.

“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor sua inteligência.”

(Irene de Albuquerque)

RESUMO

O estudo aborda a utilização do SageMath como uma ferramenta para promover uma abordagem ativa de aprendizado na Análise Combinatória no contexto escolar. As Metodologias Ativas de Aprendizagem, que colocam o aluno como protagonista do processo educativo, são destacadas como essenciais para desenvolver habilidades socioemocionais e cognitivas necessárias para o século XXI. A integração do SageMath, que é um software matemático livre e de código aberto, nesse contexto, é proposto como uma forma de enriquecer as atividades de ensino, oferecendo aos alunos experiências interativas e práticas na resolução de problemas simples e complexos de Análise Combinatória. Apresentamos uma metodologia que combina a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) com o uso do SageMath, nele os alunos serão instruídos a resolverem problemas de Análise Combinatória utilizando o SageMath como ferramenta de cálculo e experimentação. A metodologia do estudo abrange etapas fundamentais, tais como a formulação e aplicação de um problema desafiador; a investigação contínua e aprofundada sobre o tema em questão; a aplicação da sequência didática e o desenvolvimento consistente do tema ao longo do processo de aprendizagem; a análise crítica e revisão priorizando a participação ativa e escolha do aluno, a reflexão e busca por autenticidade e apresentação pública do resultado final. A integração do SageMath ao projeto permite que os alunos desenvolvam habilidades práticas na resolução de problemas matemáticos e promove uma aprendizagem mais dinâmica e envolvente. O estudo também destaca a importância do desenvolvimento profissional dos professores para o uso efetivo das tecnologias digitais na educação. O SageMath é apresentado como uma ferramenta versátil que pode ser utilizada em diversos contextos da Matemática, desde o nível mais básico até aplicações avançadas. A integração do SageMath ao ensino da Análise Combinatória é vista como uma oportunidade de enriquecer as práticas pedagógicas e preparar os alunos para os desafios do mundo contemporâneo.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Metodologias Ativas, SageMath.

ABSTRACT

The study addresses the use of SageMath as a tool to promote an active learning approach in Combinatorial Analysis within the school context. Active Learning Methodologies, which place the student as the protagonist of the educational process, are highlighted as essential for developing socio-emotional and cognitive skills necessary for the 21st century. The integration of SageMath, which is free and open-source mathematical software, in this context, is proposed as a means to enrich teaching activities, offering students interactive and practical experiences in solving simple and complex problems in Combinatorial Analysis. We present a methodology that combines Project-Based Learning (PBL) with the use of SageMath, in which students will be instructed to solve problems in Combinatorial Analysis using SageMath as a tool for calculation and experimentation. The methodology of the study encompasses fundamental stages, such as the formulation and application of a challenging problem; continuous and in-depth investigation of the subject matter; the application of didactic sequence and consistent development of the subject throughout the learning process; critical analysis and review prioritizing active student participation and choice, reflection, authenticity-seeking, and public presentation of the final result. The integration of SageMath into the project allows students to develop practical skills in solving mathematical problems and promotes a more dynamic and engaging learning experience. The study also highlights the importance of professional development for teachers to effectively use digital technologies in education. SageMath is presented as a versatile tool that can be used in various mathematical contexts, from the most basic level to advanced applications. Integrating SageMath into the teaching of Combinatorial Analysis is seen as an opportunity to enrich pedagogical practices and prepare students for the challenges of the contemporary world.

Keywords: Combinatorial Analysis, Active Methodologies, SageMath.

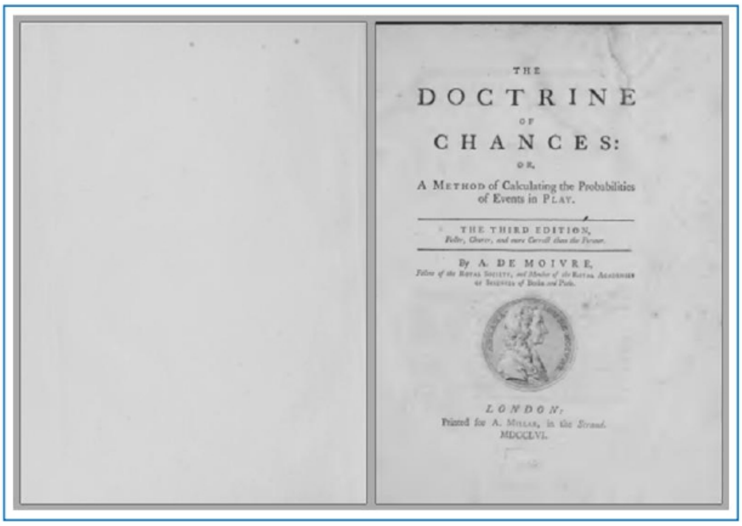
LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento histórico do estudo de problemas de combinatória que são relativos a conjuntos finitos tem início com Abraham De Moivre no começo do século XVIII e se estende até o século XX com um corpo unificado de teorias que estão relacionadas com operações e ordenações de conjuntos finitos. (WILSON; WATKINS, 2013). Nascido na França, em 1685, foi para a Inglaterra como refugiado protestante, passando o resto de sua vida em Londres tornando-se membro da Royal Society em 1697. Na segunda metade do século XX houve um grande aumento do interesse em se estudar as famílias de subconjuntos de conjuntos. De fato, havia uma preocupação sobre os conceitos teóricos de conjuntos. Uma vez que o ápice de estudo dessa teoria está no princípio da inclusão e exclusão, que preocupa-se em estimar o tamanho da união de subconjuntos de um conjunto (WILSON; WATKINS, 2013). Historicamente, este princípio foi explorado pela primeira vez por De Moivre em 1718, em seu livro **The Doctrine of Chances.** Embora não tenha utilizado em seus estudos a notação de conjunto abstrato, várias ideias que surgiram no passar destes trezentos anos são objetos de interesse dos matemáticos da atualidade (WILSON; WATKINS, 2013).

Figura 1 – The Doctrine of Chances - 3ed, 1956


THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.
THE THIRD EDITION,
By A. DE MOIVRE,
LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the Strand.
MDCCLVI.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

The Doctrine of Chances, foi um estudo sobre jogos de azar, estando incluído também estudos sobre o triângulo de Pascal e o problema do desarranjo, este resolvido pelo novo método de De Moivre. Ele estava preocupado com o número de permutações de objetos em que certos lugares de alguns são proibidos. Sendo este problema posteriormente resolvido por um método geral que abstraiu de seus problemas concretos, o princípio de inclusão e exclusão é aplicado de forma mais geral. Conhecido por vários nomes no passado este princípio utilizado por De Moivre, outrora conhecido por o princípio de classificação cruzada, tem sido objeto de trabalho de muitos matemáticos ao longo dos séculos (WILSON; WATKINS, 2013). O princípio de inclusão e exclusão também provou ser uma ferramenta técnica de grande utilidade no estudo dos números primos, por exemplo, para contarmos todos os números primos até 100, usou-se o procedimento de marcar todos os múltiplos de 2, e de forma análoga marcar todos os múltiplos de 3, 5 e 7, de onde os números restantes além do número 1 são primos. Isto se deve ao fato que cada número não primo menor que 100, deve ter um fator não primo menor que 100. Contudo, surge algumas complicações adicionais, pois alguns destes múltiplos são pontuados mais de uma vez, de onde é necessário fazer-se o uso do princípio de inclusão e exclusão para corrigir este fato. Essencialmente o problema do desarranjo se concentra na pergunta:

Se vários objetos em ordem são rearranjados arbitrariamente, qual é a probabilidade de nenhum objeto estar em sua posição original?

Esse novo tipo de álgebra de De Moivre é na sua essência uma forma de generalizar a questão de mensurar o tamanho da união de **n** conjuntos finitos. Isto é, para dois conjuntos finitos a estimativa da adição dos elementos destes conjuntos pode ser muito grande, já que quaisquer elementos em ambos podem ser contados duas vezes, assim precisamos refinar a estimativa subtraindo o número de elementos em ambos os conjuntos. Para o problema em questão, incluímos e excluímos três vezes qualquer elemento que esteja em todos os três conjuntos, então temos que incluir tais elementos mais uma vez no final (WILSON; WATKINS, 2013).

Ele argumentou que se **A** é o conjunto de arranjos de **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** em que **a** está em sua posição de origem, e ainda se **B**, **C**, **D**, **E**, **F** são definidos de forma semelhante, pelo método de De Moivre incluímos e excluímos três vezes quaisquer elemento que pertençam a todos os três conjuntos, então temos que incluir tais elementos mais uma vez no final, logo o número de desarranjos (ordenações em que nenhuma letra está em sua posição de origem) é 265, com aproximadamente 0,3680 chances desse evento ocorrer. Ao longo da trajetória acadêmica tivemos a oportunidade de experimentar disciplinas que vieram desde o campo da lógica matemática à aplicações computacionais na Matemática e em outras áreas, passando pelo contexto de estudo de modelos matemáticos e pudermos ver a importância no qual os conceitos de Matemática Discreta são relevantes para o desenvolvimento intelectual dos estudantes a nível de graduação dos cursos de Matemática e Ciências da Computação, ou áreas afins, de fato a disciplina de Matemática Discreta tem na sua grande maioria cadeira cativa nestes cursos que envolvem áreas de tecnologia.

Para um bom desenvolvimento e estudo dessa área destacamos o raciocínio matemático para ler, compreender e construir argumentos matemáticos, o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas de contagem, desde as técnicas básicas de contagem à argumentos combinatórios aplicados. O estudo de estruturas matemáticas abstratas que são as estruturas discretas, utilizadas na representação de objetos discretos e a relação entre estes, isto é, conjuntos, permutações, relações, grafos, árvores e computabilidade. Neste, precisamos desenvolver o pensamento algorítmico desde sua especificação até a sua implementação, que são utilizadas para resolver certas classes de problemas. Além disso, a Matemática Discreta tem aplicações em diversas áreas de estudo. Há diversas aplicações nas Ciências da Computação, aplicações na Modelagem de Dados, dentre outras áreas, destacamos a Química, Biologia, Financeira, Internet e Inteligência Artificial. De fato, fazer modelagem com Matemática Discreta é uma habilidade de resolução de problemas extremamente importante (ROSEN, 2011).

Gostaríamos através desse trabalho, compartilhar algumas reflexões após concluir o Curso de Pós-graduação em Metodologias Aplicadas no Ensino de Ciências e Matemática no IFAL/Campus Murici, (PPGMAECM). Durante esse período, tivemos a oportunidade de explorar e vivenciar diversas abordagens pedagógicas, especialmente as Metodologias Ativas. Uma das principais aprendizagens que gostaríamos de destacar é o reconhecimento do papel fundamental que as Metodologias Ativas desempenham no processo de ensino e aprendizagem. Ao invés de adotar uma postura passiva, os alunos são incentivados a serem protagonistas do próprio aprendizado, participando ativamente das atividades e construindo seu conhecimento de forma significativa.

As Metodologias Ativas proporcionam um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, colaborativo e inclusivo. Através de estratégias como aprendizagem baseada em problemas, aprendizagem cooperativa e projetos interdisciplinares, os alunos desenvolvem não apenas conhecimentos conceituais, mas também habilidades socioemocionais essenciais para o século XXI, como trabalho em equipe, comunicação eficaz e pensamento crítico. Junto à importância da tecnologia como aliada no processo de implementação das Metodologias Ativas. Ferramentas como o SageMath, por exemplo, tem o potencial de enriquecer as atividades de ensino, proporcionando aos alunos experiências interativas e práticas que facilitam a compreensão de conceitos complexos, como os da Análise Combinatória. Portanto, após esse curso, sinto-me ainda mais motivado e preparado para aplicar as Metodologias Ativas em minha prática pedagógica. Acredito que elas são essenciais para promover um ensino mais engajador, significativo e eficaz, preparando os alunos para os desafios do mundo contemporâneo.

Vamos apresentar esse estudo como consequência de um trabalho bibliográfico levando em consideração ser um tópico importante, mas que não é comumente visto neste programa. Complementando nosso estudo e pesquisa, devido a gama de softwares e linguagens de programação que temos disponíveis atualmente, sejam livres ou proprietários, estes atuam como recursos computacionais importantes para facilitar o processo de apropriação deste conhecimento no processo de ensino-aprendizagem e pesquisa, destacamos, em particular, a proposta de realizarmos essa aplicação utilizando o SageMath.

Problemática

Como a abordagem ativa de aprendizado utilizando o SageMath pode potencializar o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória no contexto escolar?

Objetivo geral: Investigar como a utilização do SageMath como recurso de ensino pode contribuir para uma abordagem ativa e eficaz no ensino da Análise Combinatória, visando aprimorar o entendimento e o desempenho dos alunos em matemática.

Objetivos específicos:

- Analisar as potencialidades e benefícios do SageMath como recurso de ensino no contexto da Análise Combinatória.
- Desenvolver atividades e recursos didáticos utilizando o SageMath para promover uma abordagem ativa de aprendizado na Análise Combinatória.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As Metodologias Ativas representam uma abordagem educativa que promove a participação ativa dos alunos em seu próprio processo de aprendizado. Essa concepção, inspirada na ideia de ação-reflexão-ação proposta por Paulo Freire, enfatiza a resolução de problemas desafiadores que incentivam a pesquisa e a descoberta de soluções aplicáveis à realidade. Nesse contexto, pesquisas recentes nas áreas da educação, psicologia e neurociência afirmam que cada indivíduo possui um processo de aprendizagem diferente e único. E que cada pessoa absorve aquilo que é mais relevante e significativo, resultando assim na formação de conexões cognitivas e emocionais únicas (SANTOS, 2019). As Metodologias Ativas abrangem uma abordagem do ensino e aprendizagem que dar ênfase a participação ativa dos alunos na construção do seu próprio conhecimento. Eles reconhecem e valorizam as diversas formas pelas quais os alunos podem se envolver nesse processo, possibilitando-lhes aprender de maneira mais eficiente, seguindo seu próprio ritmo, tempo e estilo (BACICH e MORAN, 2017).

Figura 2 – Aluno ativo e autônomo

Fonte: Metodologias Ativas de Ensino-Aprendizagem (2019)

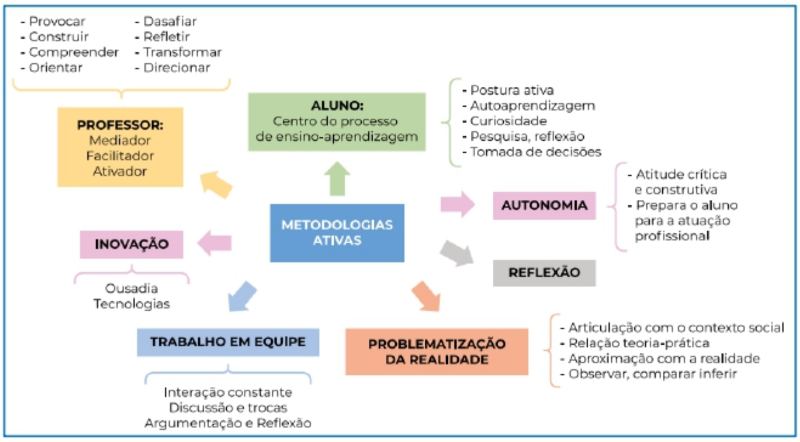
Em meio às transformações sociais, políticas, econômicas e religiosas dos tempos atuais, a educação se vê confrontada com a necessidade de uma nova visão de formação profissional. É evidente uma busca crescente por métodos inovadores de ensino-aprendizagem, que ultrapassem os limites do treinamento técnico para atender às demandas da sociedade contemporânea. Nesse contexto, é essencial formar professores capazes não apenas de dominar conhecimentos, mas também de pensar criticamente, correlacionar teoria e prática, e colaborar na resolução dos desafios do cotidiano escolar. O método tradicional de ensino tem se mostrado inadequado para uma formação abrangente do ser humano, sendo necessário acompanhar os avanços tecnológicos e científicos que hoje facilitam o processo educacional. As Metodologias Ativas capacitam os alunos a realizar uma série de habilidades, desde leitura e pesquisa até análise crítica e tomada de decisões. O papel do professor é fundamental, atuando como facilitador do processo, estimulando a reflexão e orientando os alunos de maneira intelectual, afetiva e gerencial. Esses métodos ancoram-se na pedagogia crítica, que questiona o ensino tradicional e utiliza situações-problema como estímulo para aquisição de conhecimentos e habilidades. Inspirados em pensadores como Paulo Freire, José Carlos Libâneo e Demerval Saviani, buscam uma educação transformadora da sociedade.

Em resumo, as Metodologias Ativas representam uma abordagem pedagógica inovadora que coloca o aluno como protagonista de seu próprio aprendizado, promovendo uma educação mais significativa e transformadora (SANTOS, 2019).

2.1 INTRODUÇÃO AS METODOLOGIAS ATIVAS DE APRENDIZAGEM

O avanço tecnológico do século XX e XXI remodelou diversas práticas diárias, incluindo o aprendizado. Com a crescente presença de dispositivos eletrônicos e o acesso à informação cada vez mais amplo, os métodos tradicionais de ensino têm se tornado menos prevalentes. Paralelamente, mudanças econômicas, políticas e sociais têm impactado significativamente a vida das pessoas, demandando uma adaptação no sistema educacional e no perfil dos professores. Entretanto, muitos educadores ainda baseiam sua prática em concepções pedagógicas ultrapassadas, sem considerar as experiências e saberes dos próprios alunos (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022).

Figura 3 – Princípios das Metodologias Ativas de Aprendizagem.



Fonte: Guia prático de introdução às metodologias ativas de aprendizagem (2022)

As Metodologias Ativas de Aprendizagem surgem como uma alternativa, colocando o aluno no centro do processo educativo e valorizando suas experiências, opiniões e contribuições para a construção do conhecimento coletivo. Essas metodologias envolvem diversas ferramentas, como discussões de situações-problema, contextualização da realidade, uso de tecnologias e trabalho em equipe. O papel do professor nesse contexto é o de facilitador, estimulando a reflexão e a autonomia dos alunos. Por sua vez, estes devem assumir uma postura ativa no processo de aprendizagem, envolvendo-se em autoaprendizagem, pesquisa e tomada de decisões (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022). A abordagem ativa também enfatiza a importância do trabalho em equipe, da interação entre os alunos e do desenvolvimento da capacidade de argumentação. A inovação, especialmente através do uso de tecnologias, desempenha um papel crucial nesse processo, incentivando a experimentação e a criatividade para uma educação mais eficaz e relevante para o mundo contemporâneo (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022).

2.2 METODOLOGIAS ATIVAS E O APRENDER COM TECNOLOGIAS: BREVE HISTORICIDADE E PRINCÍPIOS TEÓRICOS

Para compreender a aprendizagem com base em Metodologias Ativas e Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), é essencial revisitar os princípios pedagógicos que as sustentam e entender como esses recursos podem contribuir para uma educação ativa e eficaz. A busca por inovação e melhoria na aprendizagem deve considerar a complexidade do ambiente educacional, evitando abordagens isoladas de Metodologias Ativas e Tecnologias. Muitas vezes, instituições adotam ações pontuais, desvinculadas do currículo e contexto educacional, resultando em práticas pouco integradas. Para efetivamente qualificar a aprendizagem, é necessário ir além de ações isoladas, promovendo reflexão contínua e colaborativa. O crescimento dos cursos presenciais e a distância no Brasil destaca a necessidade de aproveitar os recursos digitais de forma mais eficaz, buscando uma verdadeira literacia midiática.

> Bacich e Moran... Afirmam que as tecnologias digitais apresentam uma série de questões a serem consideradas, obstáculos, distorções e dependências que devem ser integrados ao plano educacional voltado para uma aprendizagem ativa e emancipadora. Por outro lado, é crucial reconhecer que esses desafios não podem obscurecer o outro lado da moeda: é irracional ignorar a realidade de um mundo interconectado ao educar. Não se deve promover uma educação que se restrinja a um estilo de vida nostálgico, sustentável e progressista baseado exclusivamente em interações presenciais e atividades analógicas (que, é claro, também tem sua importância).

Assim, refletir sobre práticas educacionais contemporâneas envolve considerar marcos históricos e bases teóricas da educação e aprendizagem. Diversas correntes, como o behaviorismo, cognitivismo e construtivismo, moldaram nossas concepções sobre ensino e aprendizagem ao longo do século XX. Compreender essas abordagens pedagógicas possibilita escolhas conscientes na formação de alunos e professores, além de orientar a seleção adequada de metodologias e tecnologias para facilitar a aprendizagem. Recentes descobertas sobre aprendizagem humana, incluindo neurociência e interação social, ampliam nossa compreensão sobre o processo de aprendizagem, fornecendo subsídios para integrar Metodologias Ativas e Tecnologias de maneira eficaz na educação contemporânea. O construtivismo e o interacionismo emergem como referenciais para uma educação transformadora e reflexiva, que considera a realidade dos alunos e promove o pensamento crítico (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022).

2.3 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NAS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS

As mudanças nos currículos do ensino superior no Brasil têm promovido a adoção de projetos pedagógicos inovadores, com ênfase na participação ativa e autonomia dos alunos, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) de 2017. Desde a Declaração Mundial da UNESCO sobre Educação Superior no Século XXI, evidencia-se a necessidade de integrar as tecnologias digitais nos currículos, além de reformular a formação dos professores para acompanhar essas inovações. Diante da influência das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) sobre o desenvolvimento e disseminação do conhecimento, surgem oportunidades para ampliar o acesso à educação superior e revisar conteúdos, metodologias e a formação docente. A literatura converge para a importância de investir na formação dos professores para o uso pedagógico efetivo das TIC. No entanto, diversos desafios surgem na formação de professores para integrar as tecnologias digitais no currículo, incluindo falta de tempo, recursos insuficientes e necessidade de apoio para uma integração pedagógica adequada. Além disso, fatores internos dos professores, como resistência à mudança, influenciam sua decisão de usar tecnologias em sala de aula (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022).

Apesar do reconhecimento da importância das TIC na educação, muitas vezes são subutilizadas devido à falta de compreensão de seu potencial pedagógico. Para superar esses desafios, é essencial transformar a visão das tecnologias digitais como meros suportes pedagógicos para reconhecê-las como ferramentas que podem contribuir efetivamente para o desenvolvimento educacional dos alunos.

Nesse sentido, o desenvolvimento profissional dos docentes é fundamental, destacando-se o framework TPACK, que aborda os conhecimentos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo necessários para uma prática pedagógica eficaz com uso de tecnologias. Esse modelo enfatiza a integração das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, alinhando-se às perspectivas construtivistas e sociointeracionistas da aprendizagem (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022).

> De acordo com Lima e Araújo (2021), conclui-se que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) tem desempenhado papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem, tanto para o professor quanto para o aluno. O acesso a uma variedade de informações oferecidas por meio das

> TIC torna a comunicação mais acessível e amplia o alcance das competências escolares.

2.4 APRENDIZAGEM BASEADA EM PROJETOS (ABP)

A Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) é uma metodologia em que os alunos são incentivados a elaborar projetos para resolver problemas específicos, integrando diferentes conhecimentos e desenvolvendo habilidades como trabalho em equipe, pensamento crítico e protagonismo. Os projetos abordam questões autênticas do mundo real e envolvem a produção de artefatos, com ênfase na investigação e na construção de soluções. A relação entre professores e alunos é orientadora, permitindo que os alunos busquem conhecimentos e habilidades para alcançar seus objetivos. A organização de uma atividade baseada em projetos envolve a divisão em etapas e a consideração de elementos como um problema desafiador, investigação sustentável, crítica e revisão, voz e escolha dos alunos, reflexão, autenticidade e produto público (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022). Na avaliação, são comuns o uso de rubricas para fornecer feedback e a consideração de várias alternativas de avaliação, como autoavaliação, avaliação de colegas e reflexões pessoais. A ABP tem potencial para desenvolver habilidades interpessoais, de liderança, de comunicação e motivação para aprender, além de promover uma maior aproximação com a realidade. No entanto, enfrenta desafios como a possibilidade de desequilíbrio entre projetos e outras atividades, bem como a necessidade de direcionamento para evitar sobrecarga dos alunos e garantir que todos aprendam igualmente (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022).

3 METODOLOGIA

3.1 INTEGRANDO A METODOLOGIA ATIVA COM O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA UTILIZANDO O SAGEMATH

Uma forma de fazer uma ponte entre a metodologia de Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) (LUCHESI, LARA e SANTOS, 2022) e o ensino de Análise Combinatória utilizando o SageMath é integrar a tecnologia às etapas do projeto, oferecendo aos alunos a oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos de forma prática e interativa (MACHADO e NETO, 2021). Aqui está uma proposta de como fazer essa integração:

3.1.1 Definição do Problema Desafiador:

- Apresentar aos alunos um problema relacionado à Análise Combinatória, como por exemplo: "Quantas maneiras diferentes existem de escolher uma equipe de cinco pessoas de um grupo de dez?";

- Incentivar os alunos a explorar diferentes abordagens para resolver o problema e a considerar sua relevância no contexto real;

3.1.2 Investigação Sustentável:

- Apresentar o SageMath como uma ferramenta para realizar cálculos e experimentos relacionados à Análise Combinatória;

- Fornecer recursos e orientações sobre como usar o SageMath para explorar conceitos como permutações, combinações e arranjos;

3.1.3 Crítica e Revisão:

- Encorajar os alunos a revisarem e discutirem suas abordagens, comparando resultados obtidos manualmente com aqueles calculados usando o SageMath;

- Fornecer feedback sobre a precisão dos cálculos e a compreensão dos conceitos subjacentes;

3.1.4 Voz e escolha do Aluno:

- Permitir que os alunos decidam como desejam abordar o problema e quais métodos do SageMath desejam utilizar;

- Incentivar a explorar diferentes funções e recursos disponíveis no SageMath para resolver o problema de forma eficaz;

3.1.5 Reflexão:

- Sugerir aos alunos que reflitam sobre o processo de resolução do problema, identificando os desafios encontrados e as estratégias que funcionaram melhor;

- Promover discussões em sala de aula sobre as diferentes abordagens utilizadas e as lições aprendidas ao trabalhar com o SageMath;

3.1.6 Autenticidade:

- Relacionar o problema de Análise Combinatória ao contexto da vida real, destacando exemplos práticos de sua aplicação em áreas como probabilidade, estatística e engenharia;

- Desafiar os alunos a encontrar situações do mundo real onde a Análise Combinatória é relevante e a aplicar seus conhecimentos usando o SageMath para resolver problemas específicos;

3.1.7 Produto Público:

- Solicitar aos alunos que apresentem seus resultados e soluções, explicando como usaram o SageMath para resolver o problema de Análise Combinatória;

- Promover a disseminação do conhecimento, incentivando os alunos a compartilharem suas descobertas com a classe ou em outros contextos, como apresentações em feiras de ciências ou blogs educacionais.

Ao integrar o SageMath ao projeto de Aprendizagem Baseada em Projetos, os alunos não apenas desenvolvem suas habilidades de Análise Combinatória, mas também ganham experiência prática no uso de ferramentas computacionais para explorar e resolver problemas matemáticos complexos. Isso proporciona uma abordagem mais dinâmica e envolvente para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados.

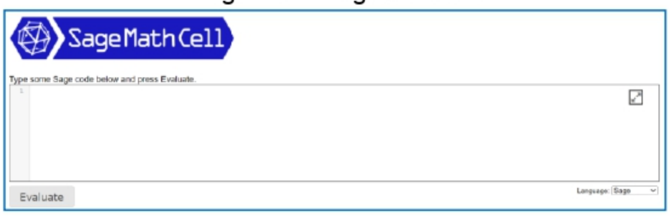
4 SAGEMATH

4.1 CONHECENDO O SAGEMATH

O SageMath é um poderoso software que pode ser utilizado em variados contextos da Matemática. Em seu modo mais simplista ele pode ser utilizado com a função de uma calculadora científica, podendo manipular todos os tipos de números, sejam eles, inteiros, racionais, aproximações de números reais e complexos com uma precisão arbitrária. Construído a partir de aproximadamente, 100 programas de código aberto e livre, pode ser usado em variados contextos da matemática pura e(ou) aplicada e em qualquer nível. Podemos fazer aplicações nas áreas de álgebra básica, cálculo diferencial, teoria dos números, do elementar ao avançado, criptografia, cálculo numérico, álgebra comutativa, teoria dos grupos, combinatória, teoria dos grafos, álgebra linear e muito mais. Sendo um recurso adaptável tanto ao ensino quanto a fazer pesquisas. É um software livre e gratuito com a linguagem baseada em Python, sob a licença GPL. Logo as literaturas de introdução ao Python podem ajudar a aprender a implementar no SageMath (SAGE, 2021).

Ele pode ser obtido em https://www.sagemath.org/, mais atualmente na **versão 10.3** juntamente com o seu manual de instruções. Seu desenvolvimento e hospedagem se deu pela empresa independente SageMathInc originalmente fundada por William Stein. Disponível para os sistemas operacionais Linux, Windows e MacO, para acessar o SageMath para manter o uso regular recomenda-se fazer o download e instalação através do site http://sagemath.org/. Mas como depende dos requisitos da máquina para fazer sua instalação temos algumas alternativas para suprir o uso da linguagem. Uma das alternativas é acessar o SageMathCell que é uma interface da web que pode ser acessada através de http://sagecell.sagemath.org/, ele nos permite o teste de comandos não sendo possível salvar nosso projeto.

Figura 4 – SageMathCell



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Contudo, se quisermos armazenar na nuvem podemos recorrer ao CoCalc que era anteriormente conhecido como SageMathCloud acessando http://cocalc.com, este possibilita o acesso a ferramentas colaborativas e recursos de gerenciamento.

4.2 PRIMEIROS PASSOS NO SAGEMATH

Usando o SageMath como uma calculadora podemos obter resultados numéricos utilizando os operadores aritméticos.

```
#Quatro operações
 a + b, a – b, a*b, a/b

#Potência
 a^b ou a**b

#Raiz quadrada
 sqrt(a)

#Raiz enésima de a
 a^(1/n)
```

Como entrada básica, usaremos números inteiros, strings representando palavras que representaremos entre apóstrofos qualquer quantidade de caracteres. Com estes objetos básicos poderemos fazer operações como:

```
In[1]: 3 + 4 * 5
Out[1]: 23

In[2]: (1 + 2*(3 + 5))*2
Out[2]: 34

In[3]: 20/6
Out[3]: 10/3
```

```
In[4]: 2^10
Out[4]: 1024

In[5]: 1024^(1/10)
Out[5]: 2

In[6]: 'Sage' + '' + 'Math'
Out[6]: 'SageMath'
```

Observação: No cálculo de 20/6 o resultado da divisão após a simplificação é o número racional 10/3 e não uma aproximação como 3.33333. Podemos realizar operações com inteiros utilizando os operadores aritméticos

```
#Divisão inteira
 a//b

#Módulo ou resto de uma divisão
 a%b
```

Validando com o SageMath o resultado do exemplo onde verificamos a quantidade de números inteiros dentre 1 e 1000 inclusive que são divisíveis por 3 ou por 7. Utilizamos o **operador aritmético //** para calcular o menor inteiro entre cada divisão realizada em seguida colocamos para avaliar através do **botão Evaluate** ou pressionando (Shift)+(Enter). Considerando a utilidade das listas como contadores simples ou iteradores para sequenciar ações. Podemos construir de forma manual agrupamentos para formar estes tipos de objetos, separando os elementos por vírgulas entre [\,\,\,\,]. No SageMath o comando **range**(n) nos possibilita escrever uma gama de maneiras abreviadas de listas básicas com números inteiros consecutivos começando em 0. O nome do comando é seguido por () e podemos colocar um ou mais valores(parâmetros) separados por vírgulas dentro. A sintaxe embutida para a lista é [0, 1, 2, ... , n – 1], uma vez que esse é um caso particular de **range**(p, q), com p = 0. De forma geral, **range**(p,q) devolve [p, p + 1, p + 2, ... , q – 1].

```
#Listas com o comando range

In[7]: range(5)
Out[7]: range(0, 5)

In[8]: range(3,5)
Out[8]: range(3,5)
```

Note que o comando **range**() declarado não explicita por extenso as listas definidas, "apenas armazena não explicitando a lista obtida", para isto utilizamos o comando **list**().

```
#Definimos a variável lista1 atribuindo range(5)

In[9]: lista1 = range(5)
In[10]: list(lista1)
Out[10]: [0, 1, 2, 3, 4]

#Definimos a variável lista2 atribuindo range(3,5)

In[11]: lista2 = range(3,5)
In[12]: list(lista2)
Out[12]: [3, 4]
```

Para concluirmos esse primeiro contato com a estrutura de dados lista, veremos como a **condicional if** pode ser usada percorrendo a lista usando apenas itens que satisfaçam determinada condição, e o **operador de repetição for** vai executando um conjunto de comandos por um número definido de vezes. Usaremos nos exemplos o predicado **is_even**(n), que é verdade se um número é par, e **is_even**(n+1) que é verdade se um número é ímpar. De fato, o predicado ou função **is_even**(n) verifica se um número n é par ou não. De modo geral, em programação há uma estrutura bastante importante na construção de uma rotina de um código, a este damos o nome de laço.

```
#Números pares menores que 20

In[13]: [n for n in range(20) if is_even(n)]
Out[13]: [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18]

#Números ímpares menores que 20

In[14]: [n for n in range(20) if is_even(n+1)]
Out[14]: [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19]

In[15]: for i in range(5):
In[16]:     print(i)     "A função print() imprime a mensagem na tela"
Out[16]: 0
         1
         2
         3
         4
```

Note que, a expressão [n **for** n **in** **range**(20) **if** **is_even**(n)] gera uma lista que contém todos os números pares no intervalo de 0 a 19, isto é, [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18], assumindo que a função **is_even**() está corretamente definida e retorna **True** para os números pares. Se não estiver definida, o código retornará um erro. Por outro lado, a expressão [n **for** n **in** **range**(20) **if** **is_even**(n+1)] gera uma lista que contém todos os números ímpares no intervalo de 0 a 19, isto é, [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19]. Com as listas definidas podemos utilizar alguns comandos do SageMath para contar, ordenar e somar os elementos.

```
#Contando os elementos da lista1 com o comando len()

In[17]: len(lista1)
Out[17]: 5

#Ordenando elementos da lista [2,1,3,4] com o comando sorted()
```

```
In[18]: lista3 = [2,1,3,4]
In[19]: sorted(lista3)
Out[19]: [1, 2, 3, 4]

#Somando os elementos da lista2 com o comando sum()

In[20]: sum(lista2)
Out[20]: 7

#Somando os números ímpares menores que 10

In[21]: [n for n in range(10) if is_even(n+1)]
In[22]: sum(n for n in range(10) if is_even(n+1))
Out[22]: 25
```

Em geral, em lógica de programação, podemos utilizar símbolos para fazermos atribuições e comparações. Para isto, utilizaremos os operadores relacionais que servem para comparar dados em um programa. O SageMath utiliza como **operador de atribuição** o símbolo **=** e como **operadores de comparação** os símbolos **==**, **<=**, **>=**, **<** e **>**.

```
#Atribuição
 =
#Igual
 ==
#Menor ou igual
 <=
#Maior ou igual
 >=
#Menor
 <
#Maior
 >
```

Os valores que são comparados podem estar armazenados em variáveis e podem ser valores numéricos ou literais. Uma vez que são operadores binários devolvem os valores lógicos **True** (Verdadeiro) ou **False** (Falso).

```
#Atribuindo os valores as variáveis a e b
In[23]: a = 2; b = 2

#Após definir as variáveis comparamos os valores de a e b

In[24]: a == b
Out[24]: True

In[25]: a < b
Out[25]: False
```

Para definirmos uma função no SageMath usamos o comando **def** seguido de dois pontos após a lista de nomes das variáveis ou predicado definido. Após definir uma função com uma variável e atribuirmos números inteiros aos argumentos para serem calculados, usaremos a instrução **return** que tem a função de enviar valores de volta para onde à função foi chamada. Isso permite distribuir o trabalho do programa entre funções, simplificando o código principal e facilitando a organização, manutenção e reutilização do código. De fato, as funções podem processar os dados e devolver valores, conhecidos como **valores de retorno,** (MATTHES, 2016).

```
#Definimos a função com o predicado is_even(n)
In[26]: def is_even(n):

#Calcula e retorna o valor que será atribuído na entrada
In[26]: def is_even(n):
In[27]:     return n % 2 == 0

#Atribuímos um valor de entrada

In[26]: def is_even(n):
In[27]:     return n % 2 == 0
In[28]: is_even(2)

#O SageMath julga se o valor de entrada deixa resto 0

In[26]: def is_even(n):
In[27]:     return n % 2 == 0
```

In[28]: is_even(2)
Out[28]: True

Exemplo 1: Vamos verificar quais números dentre 5 e 29 inclusive são divisíveis por 3.

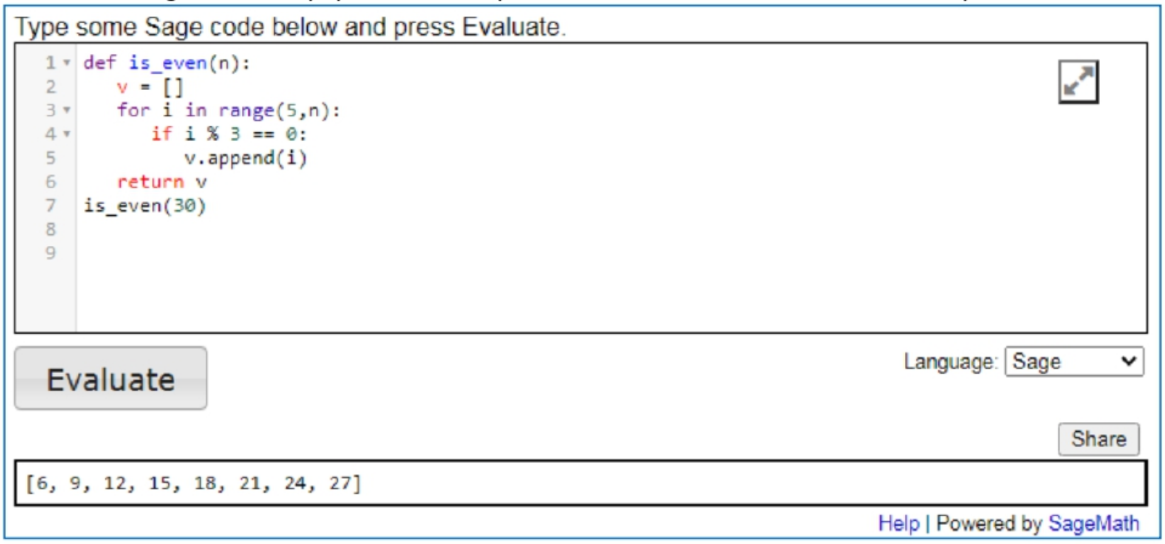
O comando range(5,n) com o valor de entrada n = 30, fornece a lista

[5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29]

de onde verificamos quais números desta lista são divisíveis por 3.

Em seguida, veremos que o comando com sintaxe **elemento.append()** permite anexar vários nós e strings na rotina do código. O método **append**() simplifica a criação dinâmica de listas. Por exemplo, com ele é possível iniciar com uma lista vazia e, em seguida, adicionar elementos a lista utilizando uma sequência de instruções **append**(), (MATTHES, 2016).

Figura 5 – Script para verificar quais números de uma lista são divisíveis por 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

No código acima, inicialmente definimos a função is_even(n) no parâmetro n, isto é:

def is_even(n): #define a função is_even com um parâmetro n.

v = []: #inicializa uma lista vazia chamada "v".

Esta lista será usada para armazenar os números divisíveis por 3.

O loop **for** i **in** **range**(5, n): #itera sobre os números de 5 até "n–1".

if i % 3 == 0: #verifica se o número i é divisível por 3 (ou seja, se o resto da divisão de i por 3 é zero).

Se "i" for divisível por 3, ele é adicionado à lista "v" usando **v.append**(i).

Finalmente, a lista "v" é retornada após o loop. De onde, a instrução:

return v: #após o término do loop, retorna a lista v contendo todos os números entre 5 e “n–1”, que são divisíveis por 3.

is_even(30): #chama a função **is_even** com n = 30, isso retornará todos os números entre 5 e 30 que são divisíveis por 3 e os armazenará em uma lista.

Observação: A função **is_even**(30), está passando o valor 30 como argumento para o parâmetro n. Isso significa que o loop será executado de 5 até 29 (não inclusivo), assim, todos os números divisíveis por 3 nesse intervalo serão adicionados à lista "v". Em seguida, a função retornará a lista de números divisíveis por 3 entre 5 e 29. (MATTHES, 2016).

Exemplo 2: O número de anagramas da palavra ALAGOAS utilizando uma rotina no SageMath.

Figura 6 – Script para verificar o número de anagramas com letras repetidas

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
def permutations_com_repet(*lista):
    pr = factorial(lista[0])
    for i in lista[1:]:
        pr = pr/factorial(i)
    return pr

permutations_com_repet(7, 3)
```

Evaluate

Language: Sage

Share

```
840
```

Help | Powered by SageMath

Fonte: Elaborado pelo autor.

Já no código deste exemplo, definimos a função **permutations_com_repet**(*lista):, isto é:

def **permutations_com_repet**(*lista): #define a função **permutations_com_repet** com um argumento variável *lista, o que significa que a função aceita um número variável de argumentos.
pr = **factorial**(lista[0]) #calcula o fatorial do primeiro elemento da lista e atribui o resultado à variável pr.

for i **in** lista[1:]: #o loop **for** itera sobre os elementos da lista, começando do segundo elemento até o último.

pr = **pr/factorial**(i): #dentro do loop, a variável pr é dividida pelo fatorial de cada elemento da lista (i).

De fato, essa operação é realizada para calcular o número total de permutações com repetição.

return pr #após o loop, o valor final de pr, que representa o número total de permutações com repetição, é retornado como resultado da função.

permutations_com_repet(7,3): #esta linha chama a função definida **permutations_com_repet** com os argumentos 7 e 3, indicando que queremos calcular o número de permutações com repetição de 7 elementos, onde 3 elementos são repetidos.

Para fecharmos essa seção vamos definir uma função com uma variável e atribuiremos números inteiros aos argumentos para serem calculados, de onde temos:

```
In[29]: def f(a,b):
In[30]:   return a + b
In[31]: f(2,3)
Out[31]: 5
```

Também podemos definir uma função atribuindo aos seus argumentos listas, de onde:

```
In[32]: def f(a,b):
```

```
In[33]:   return a + b
In[34]: f([1,2,3],[4,5,6])
Out[34]: [1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

4.3 EXPLORANDO A ANÁLISE COMBINATÓRIA COM SAGEMATH: COMANDOS E EXEMPLOS

Nesta seção vamos lidar com comandos de combinatória no SageMath, conhecendo e implementando algumas sintaxes básicas para o manuseio, estudo, enumeração e contagens a partir de conjuntos finitos. Contudo, os princípios de combinatória abrangem uma área de estudo muito maior: ordens parciais, teoria das representações, etc. Sendo a combinatória uma área onde o SageMath tem bastantes funcionalidades vamos a seguir conhecer e aplicar algumas de suas sintaxes. Dentre os métodos de contagens no SageMath, veremos inicialmente como podemos implementar o princípio aditivo, o princípio multiplicativo e o princípio da subtração ou complementar entre conjuntos. Assim, estando definidas duas listas, A e B, e assumindo que não possui elementos em comum, vamos criar novas listas conforme cada operação estabelecida.

```
#Definimos as listas A e B

In[49]: A = [1,2]
In[50]: B = ['a','b','c']

#O princípio aditivo

In[51]: def adic(A,B):
In[52]:     ad = A + B
In[53]:     return ad
In[54]: adic(A,B)
Out[54]: [1, 2, 'a', 'b', 'c']

#O princípio multiplicativo
In[55]: def prod(A,B):
```

```
In[56]:     mu = [(x, y) for x in A for y in B]
In[57]:     return mu
In[58]: prod(A,B)
Out[58]: [(1, 'a'), (1, 'b'), (1, 'c'), (2, 'a'), (2, 'b'), (2, 'c')]

In[59]: prod(B,A)
Out[59]: [('a', 1), ('a', 2), ('b', 1), ('b', 2), ('c', 1), ('c', 2)]
```

#Em geral observa-se que

```
In[60]: prod(A,B) == prod(B,A)
Out[60]: False
```

#Mas possuem cardinalidade igual

```
In[61]: len(prod(A,B)) == len(prod(B,A))
Out[61]: True
```

Observação: Ambos os produtos cartesianos têm 6 elementos, portanto: **len**(**prod**(A, B)) é igual a **len**(**prod**(B, A)). Isso é válido independentemente dos conjuntos A e B que você escolher. E ainda, observa-se que a função **len**() retorna o número de elementos em um objeto. Nesse contexto, a afirmação implica que a ordem da multiplicação não afeta o número de elementos no produto de dois conjuntos. De fato, isso é verdadeiro. Posteriormente veremos esse retorno de uma maneira quantitativa através da função **len**().

#O princípio da subtração

```
In[62]: U = [n for n in range(20) if is_even(n)]
In[63]: A = [6,9,12,15,18]

In[64]: def complementar(U,A):
In[65]:     c = [x for x in U if not x in A]
In[66]:     return c
```

```
In[67]: complementar(U,A)
Out[67]: [0, 2, 4, 8, 10, 14, 16]
```

Observação: Caso tenhamos listas muito grandes, é mais eficiente transformar as listas em conjuntos usando a sintaxe **list**(**set**(A).**difference**(**set**(B))).

```
In[68]: list(set(A).difference(set(B))).
Out[68]: [1, 2]
```

Definindo duas listas A e B, vamos criar uma rotina implementando o princípio da inclusão e exclusão no SageMath que retorne uma lista com os elementos que estão em A ou B.

```
#O princípio da inclusão e exclusão

In[69]: A = [1,2,3,4,5,6,7]
In[70]: B = [3,4,5,6]

In[71]: def in_ex(A,B):
In[72]:     ie = A
In[73]:     for y in B:
In[74]:         if not y in ie:
In[75]:             ie.append(y)
In[76]:     return ie
In[77]: in_ex(A,B)
Out[77]: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

#Calculando a quantidade de elementos da lista formada

In[78]: len(in_ex(A,B))
Out[78]: 7
```

Para finalizar esta seção vamos apresentar resumidamente alguns comandos úteis no SageMath utilizados para auxiliar na resolução computacional de problemas em Análise Combinatória.

```
#Comando factorial()

In[79]: f(n) = factorial(n)
In[80]: f(3)
Out[80]: 6

#A Permutação de uma lista - comando Permutations()
In[81]: A = [1, 2, 3, 4]
In[82]: Permutations(A)
Out[82]: Standard permutations of 4

#Usamos a sintaxe Permutations().list() para listar

#Também podemos usar a sintaxe list(Permutations())

In[83]: Permutations(A).list()
Out[83]: [[1, 2, 3, 4],
          [1, 2, 4, 3],
          [1, 3, 2, 4],
          [1, 3, 4, 2],
          [1, 4, 2, 3],
          [1, 4, 3, 2],
          [2, 1, 3, 4],
          [2, 1, 4, 3],
          [2, 3, 1, 4],
          [2, 3, 4, 1],
          [2, 4, 1, 3],
          [2, 4, 3, 1],
          [3, 1, 2, 4],
          [3, 1, 4, 2],
```

```
              [3, 2, 1, 4],
              [3, 2, 4, 1],
              [3, 4, 1, 2],
              [3, 4, 2, 1],
              [4, 1, 2, 3],
              [4, 1, 3, 2],
              [4, 2, 1, 3],
              [4, 2, 3, 1],
              [4, 3, 1, 2],
              [4, 3, 2, 1]]

#O número de permutações de A = [1, 2, 3, 4]

In[84]: len(Permutations(A))
Out[84]: 24

#Podemos utilizar a sintaxe Permutations(n).cardinality()

In[85]: Permutations(A).cardinality()
Out[85]: 24

#Podemos definir n e listar as permutações

In[86]: n = 3;
In[87}: Permutations(n).list()
Out[87]: [[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]

#Comando Combinations()

In[88]: Combinations([1, 2, 3, 4, 5], 4).list()
Out[88]: [[1, 2, 3, 4], [1, 2, 3, 5], [1, 2, 4, 5], [1, 3, 4, 5], [2, 3, 4, 5]]

#Calculando o número de combinações
In[89]: len(Combinations([1, 2, 3, 4, 5], 4).list())
```

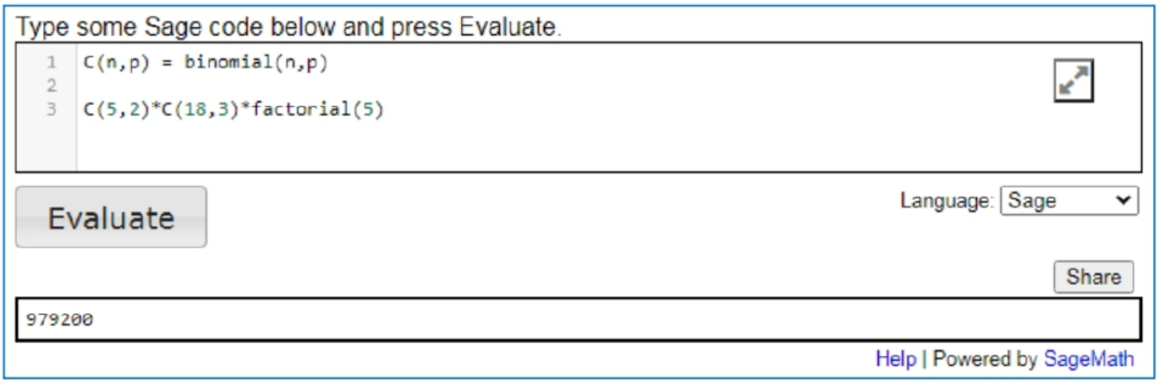
```
Out[89]: 5

#Uma sintaxe mais simples/número de combinações e listar

In[90]: Combinations(5,4).cardinality()
Out[90]: 5

In[91]: Combinations(5,4).list()
Out[91]: [[0, 1, 2, 3], [0, 1, 2, 4], [0, 1, 3, 4], [0, 2, 3, 4], [1, 2, 3, 4]]
```

Podemos observar à medida que vamos concatenando alguns comandos a sintaxe costuma ficar uma pouco mais extensa. No exemplo fizemos a combinação de 5 elementos da lista tomados 4 a 4. Assim, podemos calcular o número de combinações destes objetos através de mais um comando interno no SageMath.

```
#Comando binomial()

In[92]: binomial(5,4)
Out[92]: 5

#Podemos utilizar a sintaxe concatenada

In[93]: binomial(len([1, 2, 3, 4, 5]),4)

#Outra forma de definir o binomial

In[94]: C(n,p) = binomial(n,p)
In[95]: C(5,4)*C(7,4)
Out[95]: 175
```

Exemplo 3: Verificando computacionalmente o exemplo do número de anagramas que são formados por duas vogais e três consoantes escolhidas dentre dezoito consoantes e cinco vogais.

Figura 7 – Utilizando os comandos binomial() e factorial()



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.1 INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA UTILIZANDO METODOLOGIAS ATIVAS E SAGEMATH

Objetivo: Introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória de forma dinâmica e interativa, utilizando Metodologias Ativas de investigação e o software SageMath com scripts previamente definidos.

Componente curricular: Matemática - Ensino Médio.

Competências e Habilidades a serem desenvolvidas:

(C3): Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(C4): Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Objeto de conhecimento: Análise Combinatória.

Metodologia: O ensino será baseado na Metodologia Ativa, Aprendizagem Baseada em Projetos(ABP) por meio de investigação, onde os alunos serão incentivados a explorar conceitos por meio da resolução de problemas e validação das respostas.

Eles serão incentivados a trabalhar em grupos e utilizar o SageMath para validar os resultados obtidos e discutir outras soluções.

Duração:

- 4 aulas de 50 minutos cada.

Recursos:

- Computadores com acesso à internet e SageMath instalado ou a utilização da web página SageMathCell;
- Material impresso com exercícios práticos;
- Quadro branco e marcadores;
- Projetor.

AULA 1: INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS BÁSICOS

Atividade Inicial

- Apresentar um problema prático que envolva contagem, como "quantas formas diferentes há de distribuir 5 cartas para 3 pessoas?";
- Sugerir aos alunos que discutam em grupos pequenos, possíveis estratégias para resolver o problema;

Discussão em Grupo:

- Os grupos compartilham suas estratégias e discutem as diferentes abordagens;
- Destacar a importância da Análise Combinatória para resolver problemas desse tipo;

Apresentação Teórica:

- Introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, como fatorial, arranjo, permutação e combinação;

- Utilizar exemplos simples para ilustrar cada conceito;

Atividade Prática

- Distribuir exercícios impressos que envolvam cálculos simples de fatorial, arranjo, permutação e combinação;
- Os alunos podem resolver os exercícios individualmente ou em duplas.

AULA 2: EXPLORAÇÃO PRÁTICA COM SAGEMATH

Revisão dos Conceitos Básicos

- Realizar uma breve revisão dos conceitos apresentados na aula anterior;
- Apresentar o SageMath;
- Demonstrar aos alunos como utilizar o SageMath para realizar cálculos relacionados à Análise Combinatória;
- Mostrar exemplos de scripts previamente definidos para calcular fatoriais, arranjos, permutações e combinações;

Atividade Prática com SageMath;

- Dividir grupos com os alunos e fornecer problemas práticos que envolvam Análise Combinatória;
- Os grupos devem utilizar o SageMath para resolver os problemas, aplicando os conceitos aprendidos.

AULA 3: INVESTIGAÇÃO E APLICAÇÃO DE MÉTODOS

Atividade de Investigação

- Apresentar problemas desafiadores que exigem a aplicação de diferentes métodos de Análise Combinatória;
- Os alunos trabalham em grupos para investigar e encontrar soluções, utilizando tanto métodos tradicionais quanto o SageMath;

Discussão em Grupo

- Os grupos compartilham suas abordagens e soluções;
- Estimular a reflexão sobre a eficácia de cada método utilizado.

AULA 4: CONSOLIDAÇÃO E APLICAÇÃO DOS CONCEITOS

Revisão dos Conceitos

- Fazer uma revisão rápida dos conceitos e métodos aprendidos até o momento;

Atividade Prática

- Distribuir problemas mais complexos que envolvam uma combinação de diferentes técnicas de Análise Combinatória;
- Os alunos resolvem os problemas individualmente ou em grupos, utilizando tanto métodos tradicionais quanto o SageMath;

Discussão e Reflexão

- Promover uma discussão em sala de aula sobre as diferentes abordagens utilizadas para resolver os problemas;
- Pedir aos alunos que reflitam sobre a aplicabilidade da Análise Combinatória em situações do cotidiano;

Avaliação:

- Observação da participação dos alunos durante as atividades;
- Avaliação dos exercícios práticos e problemas propostos;
- Verificação da compreensão dos conceitos por meio de discussões em sala de aula e resolução de problemas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, exploramos o desenvolvimento histórico do estudo de problemas de combinatória, desde os primórdios com Abraham De Moivre até sua aplicação contemporânea em contextos educacionais. Além disso, destacamos a importância das Metodologias Ativas de Aprendizagem na promoção de uma educação mais engajadora e significativa. Ao colocar os alunos no centro do processo educativo, essas abordagens incentivam a participação ativa, a colaboração e o desenvolvimento de habilidades essenciais para o século XXI. A integração do SageMath como ferramenta computacional para explorar e resolver problemas de Análise Combinatória representa um passo importante na modernização do ensino de Matemática. Ao permitir que os alunos experimentem conceitos de forma prática e interativa, o SageMath amplia as possibilidades de aprendizagem e promove uma compreensão mais profunda dos tópicos abordados. Por fim, acreditamos que este trabalho contribui não apenas para o avanço do conhecimento em Análise Combinatória, mas também para a promoção de práticas educacionais inovadoras e eficazes. Esperamos que as reflexões e propostas apresentadas aqui possam inspirar futuras pesquisas e iniciativas no campo da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem téorico-prática.** Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

MACHADO, J. R. N.; NETO, L. M. S. **Análise Combinatória e Probabilidade: Com Aplicações no SageMath.** 2021. Página da Web. Disponível em: <https://sagectu.com.br/calculo1.github.io/notas-combinatoria/section-permutacao-caotica.html>.

MATTHES, ERIC. **Curso intensivo de Python: uma apresentação prática e baseada em projetos à programação.** São Paulo: Novatec Editora, 2016.

LUCHESI, B. M., LARA, E. M. O., & Santos, M. A. (Orgs.). (2022). **Guia prático de introdução às metodologias ativas de aprendizagem** [recurso eletrônico]. Campo Grande, MS: Ed. UFMS.

LIMA, Marilia Freires de; ARAÚJO, Jefferson Flora Santos de. **A utilização das tecnologias de informação e comunicação como recurso didático-pedagógico no processo de ensino e aprendizagem.** Revista Educação Pública, v. 21, nº 23, 22 de junho de 2021. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/23/a-utilizacao-das-tecnologias-de-informacao-e-comunicacao-como-recurso-didatico pedagogico-no-processo-de-ensino-aprendizagem.

MOIVRE, A. de. **The Doctrine of Chances:** Or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play. W. Pearson, 1718. (Eighteenth century collections online). ISBN 9780598843753. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=3EPac6QpbuMC>.

ROSEN, K. **Discrete Mathematics and Its Applications.** McGraw-Hill Education, 2011. ISBN 9780073383095. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ad1DvgAACAAJ>.

SAGE. **Tutorial Sage Release 10.3.** 2024. Livro digital. Disponível em: < https://doc.sagemath.org/pdf/pt/tutorial/tutorial-pt.pdf>.

SANTOS, Taciana da Silva. **Metodologias ativas de ensino aprendizagem.** Olinda - PE, 2019. Roteiro por Taciana da Silva Santos; Organização por Bruna Pereira Vasconcelos; Orientação por Prof. Dr. José Davison da Silva Júnior; Coorientação por Profª Drª Valquíria Farias Bezerra Barbosa. Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica. Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Pernambuco – Campus Olinda. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia - Biblioteca Campus Olinda.

WILSON, R.; WATKINS, J. J. **Combinatorics: ancient & modern**. [S.l.]: OUP Oxford, 2013.