

**INSTITUTO
FEDERAL**

Alagoas

INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS MACEIÓ

CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

YASMIN LARYSSA LIMA DE OMENA QUEIROZ

**PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E ANALÍTICAS DA FAMÍLIA DAS CICLOIDES:
UM ESTUDO COMPARATIVO**

MACEIÓ, ALAGOAS

2025

YASMIN LARYSSA LIMA DE OMENA QUEIROZ

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E ANALÍTICAS DA FAMÍLIA DAS CICLOIDES: UM
ESTUDO COMPARATIVO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Vanessa Lúcia da Silva

MACEIÓ, ALAGOAS
2025



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
Campus Maceió
Biblioteca Benevides Monte

516.35
Q3p

Queiroz, Yasmin Laryssa Lima de Omena.

Propriedades geométricas e analíticas da família das cicloides [recurso eletrônico] : um estudo comparativo / Yasmin Laryssa Lima de Omena Queiroz. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 5,52 MB). – 2025.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader.

Modo de acesso: Internet.

Orientação: Profa. Dra. Vanessa Lúcia da Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, Maceió, 2025.

1. Matemática. 2. Cicloides. 3. Geometria diferencial. 4. Curvas paramétricas. 5. Cálculo diferencial. 6. Braquistócrono. I. Título.

Franciane Monick Gomes de França
Bibliotecária – CRB 4/1831


YASMIN LARYSSA LIMA DE OMENA QUEIROZ

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E ANALÍTICAS DA FAMÍLIA DAS CICLOIDES: UM ESTUDO COMPARATIVO


Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 11/07/2025.


BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
 VANESSA LUCIA DA SILVA
Data: 19/08/2025 10:34:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dra. Vanessa Lúcia da Silva(Orientador)
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

Documento assinado digitalmente
 CLEVERTON DA SILVA VASCONCELOS
Data: 19/08/2025 12:33:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Me. Cleverton da Silva Vasconcelos
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

Documento assinado digitalmente
 ANA PAULA DANTAS DE SOUZA
Data: 19/08/2025 17:52:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Ma. Ana Paula Dantas de Souza
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

Documento assinado digitalmente
 VALDIR SOARES COSTA
Data: 19/08/2025 11:39:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Valdir Soares Costa Membro Interno
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

Dedico este trabalho a Deus; sem ele eu não teria capacidade para desenvolver este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus, o qual possibilitou a oportunidade de está vivenciando este momento, por ter me ajudado a superar os desafios e manter-me forte, saudável e comprometida a viver este propósito. Assim também agradecer a minha família por ter incentivado e muitas vezes, viabilizado a minha permanência no curso, dando apoio para superar os momentos difíceis e de insegurança que no decorrer do curso passei.

Em especial gostaria de agradecer a minha mãe, Roseane Queiroz que foi minha maior incentivadora para chegar até aqui, acredito que o amor dela a Educação me impulsionou a este momento. Gratidão a minha orientadora Dr^a Vanessa Silva, por aceitar a realizar as orientações deste Trabalho e contribuição, não só apenas para este momento, mas para minha formação como docente, sua determinação é um exemplo a seguir. Assim como também ao meu co-orientador Ma. Cleverton Vasconcelos, que contribuiu de forma efetiva a realização deste trabalho e para construção de conhecimentos específicos na área do Ensino a Matemática no decorrer do curso. Aos meus amigos que durante está jornada foram importante para o desenvolvimento das atividades e compartilhamento de aprendizado, Jonas Alexandre, Jonathan Ferreira, Rodrigo Santana, Lucas Alexandre, Raquel Brandão, Louise Oliveira, Alef Henrique e Gisele Costa.

Na oportunidade manifesto meu agradecimento ao INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS - IFAL, aos docentes, técnicos, coordenadores e demais colaboradores por todo o suporte necessário para que o ambiente fosse saudável e colaborasse de forma positiva a execução de todas as atividades.

E por fim, agradeço a todos professores membros da banca examinadora, Ma. Ana Paulo e Me. Valdir Soares, por compartilhar os seus conhecimentos e ampliar pontos importantes e continuação do trabalho apresentado.

“ Tudo tem o seu tempo determinado,
e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.
Eclesiaste 3:1.”

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal investigar as propriedades geométricas e analíticas da família das cicloides, compreendendo variações como a cicloide comum, a cicloide curtada e a cicloide alongada. A pesquisa é desenvolvida por meio de um estudo comparativo que abrange aspectos teóricos e práticos dessas curvas, analisando suas equações paramétricas, derivadas, integrais e características geométricas. Além disso, o estudo explora aplicações históricas e contemporâneas das cicloides em contextos como a física, a engenharia e a matemática aplicada, destacando problemas clássicos como o braquistócrono e o tautócrono. O trabalho visa contribuir para a compreensão aprofundada dessas curvas, tanto do ponto de vista matemático quanto didático, servindo como recurso para o ensino de cálculo diferencial e integral.

Palavras-chave: cicloide; geometria; curvas paramétricas; braquistócrono; cálculo diferencial.

ABSTRACT

This work aims to investigate the geometric and analytical properties of the cycloid family, including variations such as the common cycloid, curtate cycloid, and prolate cycloid. The research is conducted through a comparative study that covers both theoretical and practical aspects of these curves, analyzing their parametric equations, derivatives, integrals, and geometric characteristics. Additionally, the study explores historical and contemporary applications of cycloids in contexts such as physics, engineering, and applied mathematics, highlighting classical problems such as the brachistochrone and the tautochrone. The work seeks to contribute to a deeper understanding of these curves from both mathematical and educational perspectives, serving as a resource for teaching differential and integral calculus.

Keywords: Cycloid. Geometry. Parametric Curves. Brachistochrone. Differential Calculus.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Galileu Galilei, Galileu Galilei: o pai da ciência moderna Super	12
Figura 2 – Christiann Huygens, https://monochrome-watches.com/who-invented-the-balance-spring-reaffirming-the-crucial-role-of-christiaan-huygens-editorial-rob-memel/	13
Figura 3 – Isaac Newton, https://www.obaricentrodamente.com/2017/12/isaac-newton.html	13
Figura 4 – James Stewart, volume II, 7ª edição, p. 576	14
Figura 5 – James Stewart, volume II, 7ª edição, p. 579	17
Figura 6 – James Stewart, volume II, 7ª edição, p. 579	18
Figura 7 – Cicloide Encurtada, Autor - Geogebra	19
Figura 8 – Cicloide Alongada, Autor - Geogebra	19
Figura 9 – Comparativo das cicloides	26

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA.	12
2	CONCEITOS PRELIMINARES.	14
2.1	CURVAS PARAMÉTRICAS NO PLANO	14
2.2	DERIVADAS E VETORES TANGENTE	14
2.3	COMPRIMENTO DE ARCO	15
2.4	ÁREA SOB CURVAS PARAMÉTRICAS	15
2.5	CURVATURA DE UMA CURVA PLANA	16
2.6	CENTRO DE MASSA DE UMA REGIÃO PLANA	16
2.7	TIPOS DE CICLOIDES	17
2.7.1	Cicloide Normal	17
2.7.2	Cicloide Encurtada	18
2.7.3	Cicloide Alongada	19
3	ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DA FAMÍLIA DAS CICLOIDES. . .	20
3.1	EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS UNIFICADAS	20
3.2	COMPRIMENTO DE ARCO	20
3.3	ÁREA SOB UM ARCO	21
3.4	CURVATURA	22
3.5	CENTRO DE MASSA DA REGIÃO	23
3.6	RESUMO COMPARATIVO	26
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.	28
	REFERÊNCIAS	29

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta as propriedades geométricas e analíticas da família das cicloides, desenvolvendo um estudo comparativo que proporciona uma visão geométrica do comportamento dessas curvas, com o objetivo de contribuir para os estudos de curvas específicas.

A cicloide, além de ser uma curva esteticamente interessante, possui propriedades analíticas e geométricas de grande valor. Seu estudo contribui significativamente para a compreensão de conceitos importantes do cálculo diferencial e integral, como comprimento de arco, áreas sob curvas, curvatura e centro de massa. Além disso, as cicloides oferecem uma rara oportunidade de conectar a Matemática pura com aplicações práticas na Física, Engenharia e Astronomia, tornando-as excelentes ferramentas pedagógicas e investigativas.

A modelagem matemática das cicloides permite o desenvolvimento do raciocínio analítico e reforça a capacidade de visualização geométrica, especialmente no contexto das curvas paramétricas.

Dessa forma, este trabalho justifica-se pela relevância histórica, matemática e educacional da família das cicloides, bem como pelo potencial que esse tema oferece para integrar teoria, aplicação e representação computacional em um único estudo.

O objetivo geral da pesquisa é estudar e analisar as propriedades geométricas e analíticas da família das cicloides — incluindo a cicloide comum, a encurtada e a alongada — por meio de suas equações paramétricas e integrais associadas, investigando o comprimento de arco, a área sob a curva, a curvatura e o centro de massa. Além disso, a proposta visa revisar os conceitos teóricos sobre curvas paramétricas no plano, desenvolver as derivadas das equações paramétricas das diferentes formas da cicloide, calcular o comprimento de arco, a área sob a curva e a curvatura de cada variação, bem como determinar os centros de massa das regiões delimitadas por cada curva.

Em seguida, a importante descrição gráfica das curvas por meio de softwares computacionais, relacionando os resultados obtidos com suas aplicações históricas e práticas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta um breve relato histórico sobre as curvas em estudo; o Capítulo 2 expõe os fundamentos teóricos necessários acerca das curvas paramétricas, bem como os conceitos de cálculo diferencial e integral aplicados ao estudo de curvas planas. Na sequência, o Capítulo 3 dedica-se à derivação das equações das cicloides e ao cálculo detalhado de suas propriedades geométricas. Por fim, o Capítulo 4 explora as representações gráficas das curvas por meio de softwares matemáticos, comparando visual e analiticamente os resultados obtidos, seguido pelas conclusões finais do trabalho.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA.

A cicloide é uma curva de natureza geométrica fascinante, cuja descoberta e estudo envolvem figuras históricas importantes da matemática e da física. Seus primeiros registros remontam aos trabalhos de Nicholas de Cusa (1401–1464) e Charles de Bovelles (1475–1566), que exploraram a curva no contexto da quadratura do círculo, um dos grandes problemas clássicos da matemática. Bovelles chegou a publicar um tratado chamado *Introduções Geométricas*, no qual mencionava formas relacionadas à cicloide, mesmo que de modo rudimentar.

Mais tarde, o físico e matemático Galileu Galilei (1564–1642) demonstrou grande interesse pela curva, sendo o primeiro a nomeá-la como "cicloide". Galileu propôs que a área sob um arco de cicloide seria três vezes a área do círculo que a gera, conjectura posteriormente verificada e formalizada por outros matemáticos. Ainda que Galileu não tenha conseguido provar rigorosamente essa propriedade, sua intuição estimulou diversos estudos subsequentes.

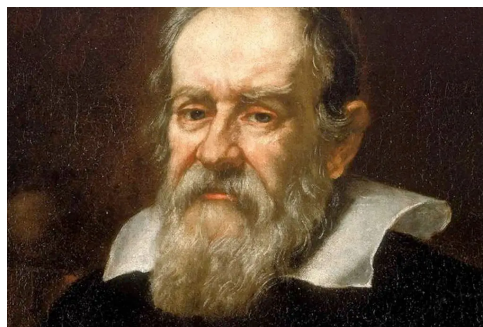


Figura 1 – Galileu Galilei, Galileu Galilei: o pai da ciência moderna | Super

O matemático francês Gilles de Roberval (1602–1675) foi um dos primeiros a determinar a área sob a cicloide de forma rigorosa. Ele denominou a curva de trochóide, termo derivado do grego, que remete ao movimento de rotação. Pouco tempo depois, Blaise Pascal (1623–1662) aprofundou-se na análise da curva, estudando suas propriedades geométricas e físicas, incluindo centros de massa e volumes de sólidos gerados por rotação. Pascal também utilizou o termo *roulette* para se referir à cicloide e propôs, em 1658, um famoso desafio matemático sobre ela, o que fomentou o interesse da comunidade científica da época.

Outros matemáticos importantes, como Fermat, Descartes e Torricelli, também contribuíram para o avanço da compreensão sobre a cicloide. Marin Mersenne (1588–1648), teólogo e matemático francês, teve papel central ao divulgar o problema da cicloide e incentivá-lo como tema de estudo entre seus contemporâneos.

Durante o século XVII, o estudo da cicloide ganhou uma nova dimensão com o surgimento de dois problemas clássicos da física: o da braquistócrona (qual é o caminho mais rápido para um corpo descer entre dois pontos, apenas sob ação da gravidade?) e o da tautocrônia (qual curva permite que corpos cheguem ao ponto mais baixo no mesmo

tempo, independentemente do ponto de partida?). Ambos têm como solução a cicloide invertida. Christiaan Huygens (1629–1695) demonstrou essa propriedade da cicloide ao construir

um relógio isócrono baseado nesse princípio, marcando um ponto de união entre teoria e aplicação prática.

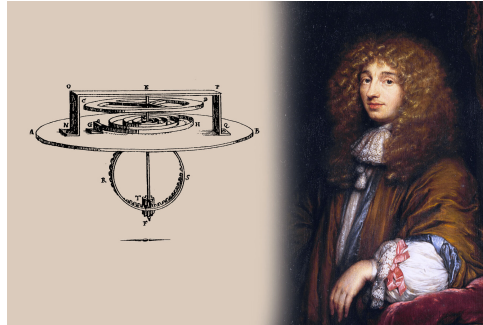


Figura 2 – Christiann Huygens, <https://monochrome-watches.com/who-invented-the-balance-spring-reaffirming-the-crucial-role-of-christiaan-huygens-editorial-rob-memel/>

Paralelamente, outros estudiosos investigaram variações da cicloide, como as epicloides e hipocicloides, obtidas pelo movimento de um ponto sobre uma circunferência que gira em torno de outra. O artista e matemático Albrecht Dürer (1471–1528) já explorava essas formas em suas obras geométricas. Posteriormente, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) aplicou curvas epicloides na modelagem dos movimentos celestes, enquanto Isaac Newton utilizou a hipocicloide como solução teórica para o problema do túnel mais rápido entre dois pontos na superfície da Terra.

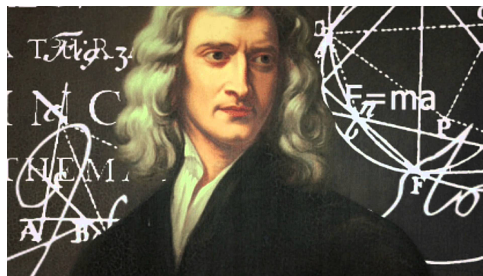


Figura 3 – Isaac Newton, <https://www.obaricentrodamente.com/2017/12/isaac-newton.html>

Essas contribuições históricas não apenas enriqueceram o estudo da geometria, mas também consolidaram a importância da cicloide e suas variações como objetos fundamentais da matemática aplicada, destacando as principais contribuições, limitações e sugestões para estudos futuros.

2 CONCEITOS PRELIMINARES.

Este capítulo apresenta os conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do trabalho para o estudo analítico e geométrico da família das cicloides. Serão abordados tópicos essenciais sobre curvas paramétricas, bem como ferramentas de cálculo diferencial e integral aplicadas a curvas planas. Além disso, serão discutidos conceitos sobre curvatura, comprimento de arco, área sob uma curva e centro de massa de uma figura plana delimitada por curvas.

2.1 CURVAS PARAMÉTRICAS NO PLANO

As curvas paramétricas representam uma forma alternativa e poderosa de descrever trajetórias no plano cartesiano, em contraste com as representações explícitas ou implícitas tradicionais. Em vez de relacionar diretamente as variáveis x e y , utiliza-se um terceiro parâmetro para expressar ambas as coordenadas como funções desse parâmetro:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

onde $t \in I \subset \mathbb{R}$.

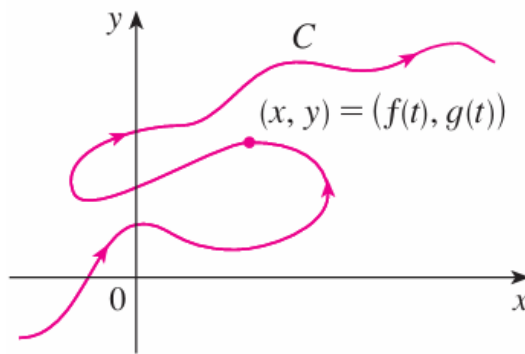


Figura 4 – James Stewart, volume II, 7ª edição, p. 576

Geometricamente, uma curva paramétrica no plano pode ser entendida como o caminho percorrido por um ponto que varia no tempo t , onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ determinam suas coordenadas instantâneas. Isso permite que a curva incorpore noções de orientação, velocidade e direção do movimento.

2.2 DERIVADAS E VETORES TANGENTE

Quando tratamos de curvas paramétricas no plano, as derivadas desempenham um papel fundamental na análise do comportamento da curva e no cálculo do vetor tangente em qualquer ponto.

Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis e queremos encontrar a reta tangente a um ponto da curva $x = f(t)$ e $y = g(t)$ onde y também é uma função diferenciável de x . A Regra da Cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se $\frac{dx}{dt} \neq 0$, podemos isolar $\frac{dy}{dx}$ e obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

A derivada vetorial da curva paramétrica $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, dada por:

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

define o vetor tangente à curva no ponto correspondente ao instante t . Esse vetor é essencial para análises como cálculo de inclinação, determinação de pontos críticos e compreensão da geometria local da curva.

A norma de $\alpha'(t)$ fornece a velocidade escalar do ponto que descreve a curva:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

2.3 COMPRIMENTO DE ARCO

Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva regular, isto é, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. O comprimento de arco de α , entre os instantes $t = a$ e $t = b$, é dado por:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Esse conceito será fundamental na análise das cicloides, especialmente na obtenção de comprimentos de curvas e na comparação entre diferentes trajetórias.

2.4 ÁREA SOB CURVAS PARAMÉTRICAS

Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada no plano, com $t \in [a, b]$, e suponha que a curva seja crescente e suficientemente regular nesse intervalo. A área sob a curva parametrizada α compreendida entre a curva e o eixo x , pode ser calculada por:

$$A = \int_a^b y(t) \cdot \frac{dx}{dt} dt. \quad (2.1)$$

Essa fórmula é uma generalização da integral definida para funções da forma $y = f(x)$, obtida através da substituição $x = x(t)$ com $dx = x'(t)dt$. Vale observar que o sinal da área

dependerá da orientação do percurso $t \mapsto (x(t), y(t))$. Se $x'(t) < 0$, a área pode sair negativa, exigindo interpretação adequada ou uso do valor absoluto, conforme o contexto.

Para calcular a área entre a curva e o eixo y , de forma análoga ao feito anteriormente temos:

$$A = \int_a^b x(t) \cdot \frac{dy}{dt} dt. \quad (2.2)$$

Esse resultado também decorre da mudança de variáveis na integral clássica de funções da forma $x = g(y)$.

No caso em que a área está envolvida por curvas fechadas, isto é, considerando $\alpha(y) = (x(t), y(t))$ uma curva fechada e simples (sem auto-interseções e tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$) a área da região interior pode ser dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Essa expressão é conhecida como fórmula de Green para área ou fórmula da “área de linha”, e tem diversas aplicações em geometria, física e cálculo vetorial.

2.5 CURVATURA DE UMA CURVA PLANA

A curvatura κ mede o quanto uma curva se desvia de uma linha reta. Para uma curva parametrizada por t , a curvatura no ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é dada por:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

A curvatura será utilizada para comparar geometricamente as cicloides e suas variações.

2.6 CENTRO DE MASSA DE UMA REGIÃO PLANA

O centro de massa (ou centroide) de uma região plana é o ponto em que a massa da região pode ser considerada concentrada, assumindo-se uma densidade constante. Este conceito é de grande relevância em física, engenharia e geometria, sendo particularmente útil na análise das cicloides e suas propriedades simétricas.

Seja R uma região plana delimitada por uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in [a, b]$, e suponha que a densidade da região seja constante. O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) da região é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x(t)y(t)x'(t) dt$$

e

$$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b (y(t))^2 x'(t) dt$$

onde $A = \int_a^b y(t)x'(t) dt$ é a área da região delimitada pela curva e o eixo x .

Essas fórmulas assumem que a curva α está descrita no sentido direto, de modo que $x'(t) > 0$ e que a região está entre a curva e o eixo x .

Mais geralmente, se uma região plana é limitada por uma curva fechada e simples $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in [a, b]$ o centro de massa pode ser obtido por:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_a^b x(t)^2 y'(t) - x(t)y(t)x'(t) dt$$

e

$$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b x(t)y(t)y'(t) - y(t)^2 x'(t) dt.$$

2.7 TIPOS DE CICLOIDES

As cicloides constituem uma classe especial de curvas planas obtidas a partir do movimento de uma circunferência que rola sem escorregar sobre uma reta. Quando um ponto P , fixado em relação à circunferência, descreve o trajeto durante esse movimento, obtém-se uma curva parametrizada cuja forma depende da posição do ponto em relação ao centro da circunferência. Este trabalho foca-se na comparação entre três variações dessa curva: a cicloide comum (ou normal), a cicloide encurtada e a cicloide alongada.

2.7.1 Cicloide Normal

A cicloide normal, também chamada de cicloide comum, é descrita por um ponto que se encontra exatamente sobre a borda de uma circunferência de raio r , que rola sem escorregar sobre uma reta horizontal.

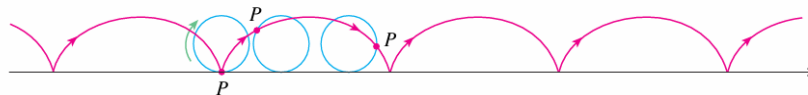


Figura 5 – James Stewart, volume II, 7ª edição, p. 579

Considerando como parâmetro o ângulo de rotação θ do círculo ($\theta = 0$ quando P está na origem), quando o círculo gira em θ radianos, como o círculo está em contato com a reta, a distância que ele girou a partir da origem é dada por $|OT| = \widehat{PT} = r\theta$

Desta forma, concluímos que $r\theta$ e r são abscissa e ordenada, respectivamente, de C e, conseqüentemente,

$$x(\theta) = |OT| - |PQ| = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \quad (2.3)$$

e

$$y(\theta) = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta). \quad (2.4)$$

Logo, podemos descrever a cicloide, como sendo o traço da curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(\theta) = (r\theta - r\sin\theta, r - r\cos\theta). \quad (2.5)$$

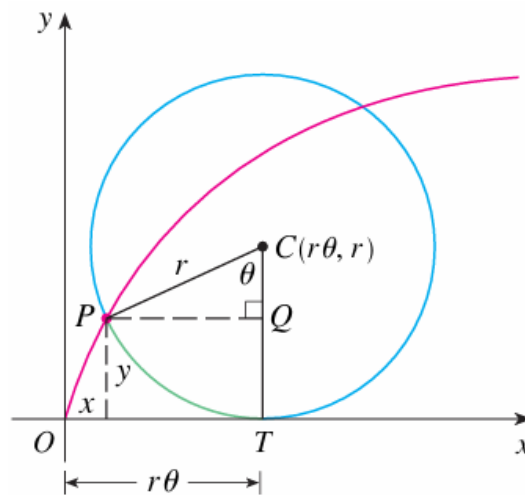


Figura 6 – James Stewart, volume II, 7ª edição, p. 579

Essa curva apresenta uma forma de “arco” periódico, com picos de altura $2r$ e toques regulares no eixo x , ocorrendo em intervalos de comprimento $2\pi r$. A cicloide normal é notável por sua presença em problemas clássicos da física, como o da tautócrona e da braquistócrona, como abordaremos mais adiante.

2.7.2 Cicloide Encurtada

A cicloide encurtada é gerada quando o ponto gerador P está localizado dentro da circunferência rolante, a uma distância $b < r$ do centro. Esse deslocamento altera a geometria da curva, tornando seus “arcos” menos acentuados e eliminando o toque no eixo horizontal.

Neste caso, o ponto P nunca atinge o eixo x , e a amplitude vertical da curva torna-se inferior a $2r$. A cicloide encurtada mantém periodicidade, mas exibe comportamento suavizado, com menor variação de altura e menor curvatura nas extremidades, como avaliaremos mais adiante.

Note que, novamente temos o centro da circunferência no ponto $C(r\theta, r)$, mediante a rotação de um ângulo θ , porque ao rolar uma distância $r\theta$ o centro se desloca horizontalmente por $r\theta$ e está sempre a uma altura R .

No instante θ , o ponto P está girando em torno do centro da circunferência. Suponhamos que P esteja inicialmente (em $\theta = 0$) localizado verticalmente abaixo do centro. Isso corresponde a um vetor radial que gira com o ângulo θ . O vetor da posição de P em relação ao centro é dado por $s(\theta) = b(\sin(\theta), -\cos(\theta))$, pois o vetor faz um ângulo θ com a vertical e gira no sentido horário (por isso o cosseno vem com sinal negativo). Somamos a posição do centro com o vetor até o ponto e obtemos a parametrização da cicloide encurtada:

$$\begin{cases} x(\theta) = |OA| - |BQ| = r\theta - b\sin(\theta) \\ y(\theta) = |AC| - |CQ| = r - b\cos(\theta) \end{cases}$$

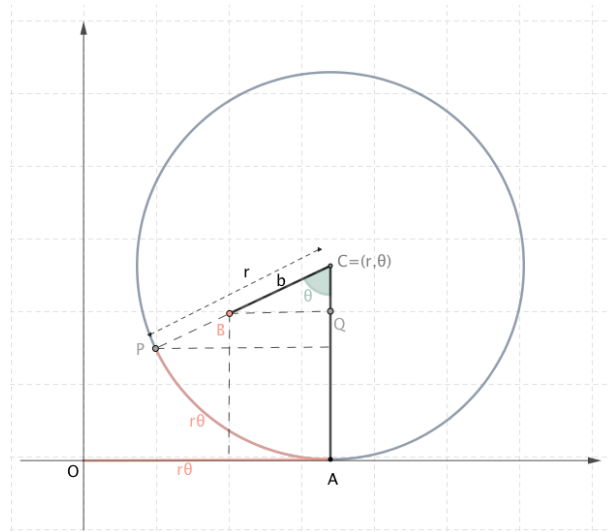


Figura 7 – Cicloide Encurtada, Autor - Geogebra

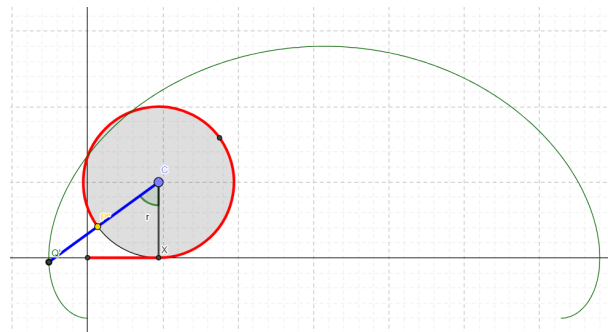


Figura 8 – Cicloide Alongada, Autor - Geogebra

2.7.3 Cicloide Alongada

A cicloide alongada ocorre quando o ponto P está localizado fora da circunferência rolante, ou seja, a uma distância $b > r$ do centro. Essa configuração faz com que a curva gerada tenha arcos mais alongados, podendo apresentar laços ou retrocessos, dependendo da relação entre d e r .

Nesse caso, a curva pode atingir valores negativos no eixo y (isto é, abaixo da linha de rolamento), formando alças ou reentrâncias. A periodicidade é mantida, mas a morfologia da curva torna-se mais complexa, e o ponto gerador pode ultrapassar o eixo de rolamento, criando interseções com a própria trajetória.

As equações paramétricas da cicloide alongada são obtidas de maneira inteiramente análoga a cicloide encurtada, isto é, admite a parametrização

$$\begin{cases} x(\theta) = |OA| - |BQ| = r\theta - b \sin(\theta) \\ y(\theta) = |AC| - |CQ| = r - b \cos \theta \end{cases}$$

com $b > r$.

3 ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DA FAMÍLIA DAS CICLOIDES.

Este capítulo aprofunda o estudo das propriedades geométricas e analíticas das cicloides — normal, encurtada e alongada — destacando suas semelhanças, diferenças e particularidades, com base nas equações parametrizadas estabelecidas no capítulo anterior. O objetivo é compreender a estrutura matemática e o comportamento das curvas, com foco em propriedades como comprimento de arco, área sob a curva, curvatura e centro de massa.

3.1 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS UNIFICADAS

Considerando a razão $k = \frac{b}{r}$ onde b é a distância entre o ponto gerador e o centro da circunferência rolante, a equação paramétrica geral da família das cicloides é dada por:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - k \sin(\theta)) \\ y(\theta) = r(1 - k \cos \theta) \end{cases}.$$

Os valores de k determinam o tipo de cicloide:

- $0 < k < 1$: cicloide encurtada;
- $k = 1$: cicloide normal;
- $k > 1$: cicloide alongada.

Esta formulação permite uma análise comparativa das curvas sob uma mesma estrutura matemática.

3.2 COMPRIMENTO DE ARCO

Teorema 3.1. *O comprimento L de um arco de cicloide correspondente ao intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$ é dado por*

$$L = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2k \cos \theta + k^2} d\theta. \quad (3.1)$$

Demonstração: Sejam:

$$x'(\theta) = r(1 - k \cos(\theta)), \quad y'(\theta) = rk \sin \theta.$$

O comprimento de arco é:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta.$$

Substituindo:

$$L = r \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - k \cos \theta)^2 + k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Expandindo:

$$(1 - k \cos \theta)^2 + k^2 \sin^2 \theta = 1 - 2k \cos \theta + k^2((\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta) = 1 - 2k \cos \theta + k^2.$$

Logo:

$$L = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2k \cos \theta + k^2} d\theta.$$

□

Corolário 3.1. *O comprimento L satisfaz:*

- $L < 8r$ para $0 < k < 1$ (*encurtada*),
- $L = 8r$ para $k = 1$ (*normal*),
- $L > 8r$ para $k > 1$ (*alongada*).

O valor $L = 8r$ no caso normal é clássico. Quando $k > 1$, a curva se estende mais devido à projeção mais longa do ponto gerador, criando laços que aumentam o comprimento.

3.3 ÁREA SOB UM ARCO

Teorema 3.2. *A área sob a cicloide entre $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ é:*

$$A = \pi r^2(2 + k^2).$$

Demonstração: A área sob uma curva parametrizada é dada por:

$$A = \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta) dt.$$

Calculamos:

$$x'(\theta) = r(1 - k \cos \theta), \quad y(\theta) = r(1 - k \cos \theta), \Rightarrow y(\theta)x'(\theta) = r^2(1 - k \cos \theta)^2.$$

Expandindo:

$$(1 - k \cos \theta)^2 = 1 - 2k \cos \theta + k^2(\cos \theta)^2.$$

Logo:

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2k \cos \theta + k^2(\cos \theta)^2) d\theta.$$

Sabemos que:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta = \pi.$$

Então:

$$A = r^2(2\pi + k^2\pi) = \pi r^2(2 + k^2).$$

□

Proposição 3.1. *Sejam A_k as áreas sob uma cicloide de parâmetro $k > 0$, então:*

$$A_k = \pi r^2(2 + k^2).$$

As seguintes relações de ordem valem:

1. *Se $0 < k_1 < k_2$, então $A_{k_1} < A_{k_2}$.*
2. *$A_k = 3\pi r^2$ se, e somente se, $k = 1$.*

Demonstração: Da fórmula:

$$A_k = \pi r^2(2 + k^2),$$

a função A_k é crescente com k , pois a derivada de A_k em relação a k é:

$$A'_k = \pi r^2 \cdot 2k > 0 \quad \text{para todo } k > 0.$$

Logo, se $k_1 < k_2$, então $A_{k_1} < A_{k_2}$.

Além disso, $A_k = 3\pi r^2$ implica $2 + k^2 = 3$, ou seja, $k = 1$. □

Corolário 3.2. *As áreas sob um ciclo completo de cicloide atendem à seguinte hierarquia:*

$$A_{\text{encurtada}} < A_{\text{normal}} < A_{\text{alongada}}.$$

Mais precisamente, se $k < 1$ e $k > 1$, então:

$$\pi r^2(2 + k^2) < 3\pi r^2 < \pi r^2(2 + k^2).$$

Exemplo 3.1. *Para ilustrar numericamente, considere $r = 1$:*

- *Encurtada com $k = \frac{1}{2}$: $A = \pi(2 + \frac{1}{4}) = \frac{9}{4}\pi$.*
- *Normal com $k = 1$: $A = \pi(2 + 1) = 3\pi$.*
- *Alongada com $k = 2$: $A = \pi(2 + 4) = 6\pi$.*

Essa comparação evidencia como o parâmetro k interfere no crescimento da área. A área cresce quadraticamente com k , o que faz com que a diferença entre a cicloide normal e a alongada seja maior do que entre a encurtada e a normal.

3.4 CURVATURA

Teorema 3.3. *A curvatura da cicloide é:*

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 k [(1 - k \cos \theta) \cos \theta - k \sin^2 \theta]}{(r^2 [(1 - k \cos \theta)^2 + k^2 \sin^2 \theta])^{3/2}}.$$

Demonstração: A fórmula da curvatura é:

$$\kappa(\theta) = \frac{x'(\theta)y''(\theta) - y'(\theta)x''(\theta)}{([x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2)^{3/2}}.$$

Com:

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= r(1 - k \cos \theta), & x''(\theta) &= rk \sin \theta, \\ y'(\theta) &= rk \sin \theta, & y''(\theta) &= rk \cos \theta. \end{aligned}$$

Numerador:

$$x'y'' - y'x'' = r(1 - k \cos \theta) \cdot rk \cos \theta - rk \sin \theta \cdot rk \sin \theta = r^2k [(1 - k \cos \theta) \cos \theta - k \sin^2 \theta].$$

Denominador:

$$([x']^2 + [y']^2)^{3/2} = [r^2 ((1 - k \cos \theta)^2 + k^2 \sin^2 \theta)]^{3/2}.$$

Portanto:

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2k [(1 - k \cos \theta) \cos \theta - k \sin^2 \theta]}{(r^2 [(1 - k \cos \theta)^2 + k^2 \sin^2 \theta])^{3/2}}.$$

□

- Para $k = 1$: a curvatura é sempre positiva e suave.
- Para $0 < k < 1$: também é positiva, mas com menor intensidade.
- Para $k > 1$: pode haver pontos onde $\kappa(t) = 0$, indicando inflexões e laços.

A variação da curvatura reflete a geometria global da curva. As cicloides alongadas apresentam comportamento ondulatório mais acentuado, podendo cruzar a si mesmas, enquanto as encurtadas são mais regulares.

3.5 CENTRO DE MASSA DA REGIÃO

Teorema 3.4. *O centroide da região sob a cicloide é:*

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} x(\theta)y(\theta)x'(\theta) d\theta, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \int_0^{2\pi} y(\theta)^2 x'(\theta) d\theta,$$

onde $A = \pi r^2(2 + k^2)$.

Demonstração: Seja a cicloide parametrizada por:

$$x(\theta) = r(\theta - k \sin \theta), \quad y(\theta) = r(1 - k \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

com $r > 0$ e $k > 0$, onde $k = \frac{d}{r}$ representa a razão entre a distância do ponto gerador ao centro da circunferência rolante.

Assumindo densidade constante e região delimitada pela curva e o eixo x , o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) da região é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} x(\theta)y(\theta)x'(\theta) d\theta, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \int_0^{2\pi} y(\theta)^2 x'(\theta) d\theta,$$

em que a área A da região sob a curva é:

$$A = \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta) dt.$$

Calcularemos agora as derivadas necessárias:

$$x'(\theta) = r(1 - k \cos \theta), \quad y(\theta) = r(1 - k \cos \theta).$$

Note que $x'(\theta) = y(\theta)$, fato interessante que simplifica os cálculos.

Calcularemos agora a área da região:

$$A = \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} [r(1 - k \cos \theta)]^2 d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2k \cos \theta + k^2(\cos \theta)^2) d\theta.$$

Sabemos que:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta = \pi.$$

Logo:

$$A = r^2 \left[\int_0^{2\pi} 1 d\theta + k^2 \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta \right] = r^2(2\pi + \pi k^2) = \pi r^2(2 + k^2).$$

Vamos calcular a coordenada de \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_0^{2\pi} y(\theta)^2 x'(\theta) d\theta.$$

Como $y(\theta) = r(1 - k \cos \theta)$ e $x'(\theta) = r(1 - k \cos \theta)$, temos:

$$y(\theta)^2 x'(\theta) = r^3(1 - k \cos \theta)^3.$$

Expandimos:

$$(1 - k \cos \theta)^3 = 1 - 3k \cos \theta + 3k^2(\cos \theta)^2 - k^3(\cos \theta)^3.$$

Assim:

$$\bar{y} = \frac{r^3}{2A} \int_0^{2\pi} (1 - 3k \cos \theta + 3k^2(\cos \theta)^2 - k^3(\cos \theta)^3) d\theta.$$

Utilizando as integrais conhecidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^3 d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta = \pi.$$

Portanto:

$$\bar{y} = \frac{r^3}{2A} (2\pi + 3k^2\pi) = \frac{r^3}{2A} \cdot \pi(2 + 3k^2).$$

Substituindo $A = \pi r^2(2 + k^2)$:

$$\bar{y} = \frac{r^3 \pi (2 + 3k^2)}{2\pi r^2 (2 + k^2)} = \frac{r(2 + 3k^2)}{2(2 + k^2)}.$$

Calculamos agora a coordenada de \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} x(\theta)y(\theta)x'(\theta) d\theta$$

Sabemos que:

$$x(\theta) = r(\theta - k \sin \theta), \quad y(\theta) = r(1 - k \cos \theta), \quad x'(\theta) = r(1 - k \cos \theta).$$

Então:

$$x(\theta)y(\theta)x'(\theta) = r^3(\theta - k \sin \theta)(1 - k \cos \theta)^2.$$

Expandindo:

$$(\theta - k \sin \theta)(1 - k \cos \theta)^2 = \theta(1 - 2k \cos \theta + k^2(\cos \theta)^2) - k \sin \theta(1 - 2k \cos \theta + k^2(\cos \theta)^2).$$

A integral se torna:

$$\bar{x} = \frac{r^3}{A} \left[\int_0^{2\pi} \theta(1 - 2k \cos \theta + k^2(\cos \theta)^2) d\theta - k \int_0^{2\pi} \sin \theta(1 - 2k \cos \theta + k^2(\cos \theta)^2) d\theta \right].$$

Analisando os termos:

$$- \int_0^{2\pi} \theta \cos \theta d\theta = 0 \text{ (por simetria)}, \quad - \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta (\cos \theta)^2 d\theta = 0.$$

Então restam:

$$\int_0^{2\pi} \theta d\theta = 2\pi^2, \quad \int_0^{2\pi} \theta (\cos \theta)^2 d\theta = \pi^2.$$

Logo:

$$\bar{x} = \frac{r^3}{A} (2\pi^2 + k^2 \pi^2) = \frac{r^3 \pi^2 (2 + k^2)}{A}.$$

Substituindo $A = \pi r^2(2 + k^2)$, temos:

$$\bar{x} = \frac{r^3 \pi^2 (2 + k^2)}{\pi r^2 (2 + k^2)} = r\pi.$$

Portanto, o centro de massa da região sob a cicloide é:

$$\boxed{\bar{x} = r\pi, \quad \bar{y} = \frac{r(2 + 3k^2)}{2(2 + k^2)}}.$$

□

Note que:

- Em $k = 1$, o centro de massa está mais próximo do solo e centrado no arco.

- Para $k < 1$, ele se eleva levemente, pois a curva não toca o eixo x .
- Para $k > 1$, o centro de massa desloca-se para cima e para frente, devido ao aumento de área e altura.

Aém disso,

- $\bar{x} = r\pi$ independe de k : o centro de massa está sempre no meio do arco.
- \bar{y} cresce com k : cicloides alongadas têm o centro mais alto; encurtadas, mais baixo.

3.6 RESUMO COMPARATIVO

Em sequência apresentamos um quadro resumo comparativo das propriedades analíticas e geométricas da família das cicloides:

Propriedade	Encurtada ($0 < k < 1$)	Normal ($k = 1$)	Alongada ($k > 1$)
Altura máxima	$r(1+k) < 2r$	$2r$	$r(1+k) > 2r$
Altura mínima	> 0	0	< 0 (laços)
Comprimento de arco	$< 8r$	$8r$	$> 8r$
Área sob a curva	$< 3\pi r^2$	$3\pi r^2$	$> 3\pi r^2$
Curvatura	Sempre positiva	Positiva	Pode mudar de sinal
Centro de massa	Mais alto e centrado	Simétrico	Mais alto e deslocado

Essas diferenças serão representadas graficamente a seguir, reforçando a compreensão das propriedades dinâmicas e estruturais da família das cicloides.

As curvas se comportam da seguinte forma:

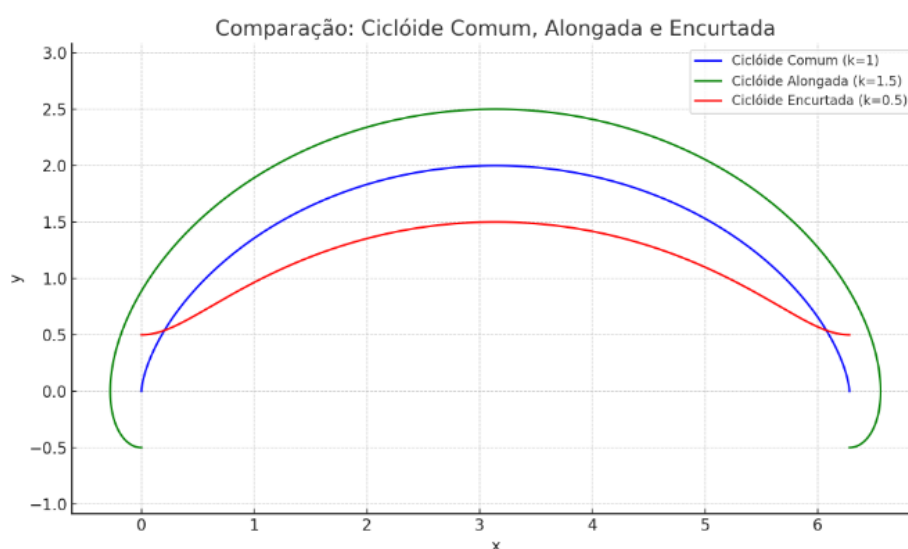


Figura 9 – Comparativo das cicloides

Temos a curva azul representando a cicloide comum, a curva verde a cicloide alongada e a curva vermelha a cicloide encurtada.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Este trabalho teve como objetivo fazer uma abordagem das propriedades geométricas e analíticas da família das cicloides, incluindo as cicloides normal, alongada e encurtada, através da equação paramétrica que se pode determinar o comprimento de arco, área sob a curva, curvatura e o centro de massa.

O assunto é mencionado no curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial III, no Instituto Federal de Alagoas- IFAL, quando fala-se da parametrização das curvas, e o trabalho teve como objetivo aprofundar os conhecimentos adquiridos aplicando os conhecimentos e aplicando de forma que garanta a construção deste conhecimento.

Com as análises geométricas e analíticas ficou demonstrado que se $r > a$ temos a cicloide encurtada, se o $r = a$ temos a cicloide normal e se o $r < a$ temos a cicloide alongada, sendo a o ponto gerador da curva cicloide. Através dessa definição podemos então determinar que:

- A cicloide normal possui características em que a curva é formada suavemente, sob o eixo no qual a circunferência rola; A área desta curva é dada por $3\pi r^2$, comprovando então a intuição de Galileu, que intuitivamente considerou que esta curva era três vezes a área da circunferência, além de ter o centro de massa, centralizado no centro da curva por apresentar comportamento simétrico.
- A cicloide alongada apresenta uma característica onde sua curva possui uma curvatura que em algum momento será negativo, por está abaixo do eixo a qual a circunferência desliza.
- A cicloide encurtada é gerada de forma suave, não chega a tocar ao eixo por seu ponto gerador $a < r$, mantendo então a curva sempre positiva.

Com isto, podemos considerar que a abordagem deste trabalho auxilia docentes e discentes a compreensão analítico e geométrico da família da cicloide, considerando ser um estudo importante e de grande valor para geometria descritiva.

REFERÊNCIAS

1. **STEWART, James.** *Cálculo: Volume 2.* 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
2. **COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert.** *O que é matemática?* 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996
3. **BERGER, Marcel et al.** On the geometry of cycloids and their variants. *The American Mathematical Monthly*, v. 108, n. 3, p. 196–206, 2001.
4. **SOUZA, José R.** *Estudo da cicloide e suas aplicações.* 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2022.
5. **HERRERA, M. Galileo, Bernoulli, Leibniz e Newton** em torno do problema da braquistócrona. *Rec. Mexicana Fis.* V. 40, n 3, pág. 459-475, 1994.
6. **CAETANO W. L.** *Queda em curvas de Menor Tempo e Tempo Independente da Altura – Braquistócrona e tautócrona.*
7. **CHAQUIAM, Miguel.** *Ensaio temáticos: história e matemática em sala de aula.* Belém: Sbem-pa, 2017.
8. **NASCIMENTO, Dandara Lorryne.** *O ensino da Matemática na natureza: análise da curva cicloide nas folhas.* Ebiografia.com/blaiseoascal/
9. **BOYER, C. B., Merzbach, U. C.,** *História da Matemática,* Editora Blucher, São Paulo, 2012
10. **SILVA, Jefferson Marinho.** *Uma abordagem da cicloide “A Helena da Geometria”.* 2022. 36f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, Maceió, 2022.
11. **DAVIS, A. Bivens,** *Cálculo, Volume II, 10ª Edição,* Editora Bookman.
12. **FOULIS, J. David, Munem, A. Mustafasa,** *Cálculo II, Editora LTC, ano 1982.*
13. **TENENBLAT, K.:** *Introdução à geometria diferencial, 2ª Ed. Revisada – São Paulo: Blucher, 2008.*
14. **VEGA, José Oscar. SASSINE, André.** *A magia da curva cicloide: braquistócrona e tautócrona.* São Paulo: Scortecci, 2011.

15. **VENCESLAU, A. W. N.:** *Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT: São Cristovão -SE, 2015.*