



**INSTITUTO
FEDERAL**

Alagoas

**INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS MACEIÓ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MARCOS JOSÉ DA SILVA TENÓRIO

**GEOMETRIA ANALÍTICA: PANORAMA HISTÓRICO
E ALGUMAS APLICAÇÕES**

MACEIÓ, AL

2023

MARCOS JOSÉ DA SILVA TENÓRIO

GEOMETRIA ANALÍTICA: PANORAMA HISTÓRICO
E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador(a): Prof. Me. Rosivaldo Pereira da Silva

MACEIÓ, AL

2023



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
Campus Maceió
Biblioteca Benevides Monte

516.3
T312g

Tenório, Marcos José da Silva.

Geometria analítica : panorama histórico e algumas aplicações / Marcos José da Silva Tenório. – Maceió, 2023.
86 f. : il.

Orientação: Prof. Me. Rosivaldo Pereira da Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió. Maceió, 2023.

Arquivo no formato digital em PDF.

1. Matemática. 2. Geometria analítica – Histórico e aplicações. 3. Álgebra linear.
I. Título.

Franciane Monick Gomes de França
Bibliotecária CRB-4/1831

MARCOS JOSÉ DA SILVA TENÓRIO

GEOMETRIA ANALÍTICA: PANORAMA HISTÓRICO
E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Alagoas, *Campus Maceió*,
como requisito parcial para a obtenção de grau
de Licenciado(a) em Matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente



ROSIVALDO PEREIRA DA SILVA

Data: 26/12/2023 09:30:13-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Rosivaldo Pereira da Silva (Orientador)

Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Documento assinado digitalmente



ARLYSON ALVES DO NASCIMENTO

Data: 26/12/2023 10:11:40-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento

Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Documento assinado digitalmente



RAFAEL DO SACRAMENTO LOPES

Data: 26/12/2023 09:42:57-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Rafael do Sacramento Lopes

Instituto Federal de Alagoas – IFAL

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, meu pai celestial, por tudo que “Ele” me proporcionou ao longo dessa jornada. Uma trajetória recheada de bons momentos, momentos de adversidades e de muitos desafios e que sem sua ajuda, sobremaneira indispensável, “Paizinho Querido”, eu não seria capaz de chegar até aqui. À minha família, especialmente meu pai, José Mauro da Silva (in memoriam), homem íntegro detentor de uma inteligência e desenvoltura naturalmente marcantes. Quantas saudades tenho de você. À minha mãe, Josefa Ferreira da Silva, que com seu exemplo e hignidez de caráter sempre me apoiou nas horas de dificuldades. E nas diversas vezes que pensei em desistir sempre repetia a mesma expressão: “não desista, só mais um pouco, vá em frente”. Muito obrigado, mamãe, a senhora é sensacional. À minha amada esposa, Giselda Tenório de Almeida Silva, quão sou grato a Deus por você existir e ter entrado em minha vida, aprendo contigo todos os dias meu amor, valorosas lições que vão para além de bancas escolares. Aprendi a ter paz em momentos de turbulência e adversidade contigo e não olhar para o problema como fim, mas como uma situação didática, um desafio a ser superado e evoluirmos com ele. Você é uma mulher maravilhosa, eu te amo. Aos meus irmãos, Lúcia, Silvana e Maurício, muito obrigado a vocês essa jornada iniciamos e terminaremos juntos, sempre. Aos meus professores, poderia citar muitos deles, mas em especial agradeço ao meu orientador Professor Rosivaldo Pereira da Silva, que com tanta sobriedade, empatia e inteligência me ajudou a tornar possível a conclusão desse trabalho. Professor, daria para fazer um outro trabalho de conclusão de curso, somente para estudar a cirúrgica inteligência emocional que o senhor tem. “Risos”. Muito obrigado pelo aprendizado que o senhor me proporcionou nesses ricos momentos. Também não poderia deixar de agradecer, em especial ao Professor Arlyson Alves do Nascimento, o qual ao longo do tempo de curso aprendi a admirá-lo e respeitá-lo. Compreendi que em muitos momentos de sua aparente braveza escondia-se o zelo e o amor pela matemática; sem deixar de dizer, também, que tem um coração gigante empenhado a não deixar seus alunos para trás. Um cara sensacional de uma inteligência rara, fora da curva. Muito obrigado, professor pelos conselhos e pela paciência com a qual lidou comigo em muitos momentos de dificuldade, se eu cheguei até aqui é porque suas orientações foram determinantes para isso. Essa sua obstinação para o engrandecimento e elevação do conhecimento matemático é realmente notório, uma referência para todos os seus alunos.

RESUMO

A Geometria Analítica é a área da matemática que estuda as estruturas geométricas sob uma perspectiva algébrica em que seus estudos são usados em contextos que envolvem coordenadas. Alguns historiadores da matemática atribuem à René Descartes a descoberta da Geometria Analítica. Partindo desse breve contexto, este trabalho teve como objetivo abordar historicamente o surgimento e a evolução da Geometria Analítica e suas implicações na construção e desenvolvimento do conhecimento matemático. Como metodologia tem-se uma revisão bibliográfica realizada através livros e estudos disponibilizados em bases de dados, que a princípio revela a importância da Geometria Analítica enquanto componente curricular de cursos de graduação das ciências exatas, a exemplo das Engenharia, das Ciências da Computação, e da Matemática, além de sua relevância como ferramenta necessária para o Cálculo Diferencial e Integral e de ser uma das principais componentes em um primeiro curso de álgebra linear. Como a Geometria Analítica teve origem em meios a problemas enfrentados pela humanidade, a exemplo da descoberta dos números irracionais, dos incomensuráveis, os paradoxos de Zeno, o método da exaustão, a ideia de continuidade, questões filosóficas e crenças religiosas. Considera-se ser relevante que o ensino da geometria analítica perpassa pelos acontecimentos históricos propondo com a proposta de construir o conhecimento e não apenas a resolução de algoritmos.

Palavras-chave: Geometria analítica. Álgebra. História. Aplicações.

ABSTRACT

Analytical geometry is the area of mathematics that studies geometric structures from an algebraic perspective in which its studies are used in contexts involving coordinates. Some historians of mathematics credit René Descartes with the discovery of analytical geometry. Starting from this brief context, this work aimed to historically address the emergence and evolution of Analytical Geometry and its implications for the construction and development of mathematical knowledge. As a methodology, there is a bibliographical review carried out through books and studies available in databases, which initially reveals the importance of analytical geometry as a curricular component of undergraduate courses in the exact sciences, such as Engineering, Computer Science, and of Mathematics, in addition to its relevance as a necessary tool for Differential and Integral Calculus and being one of the main references in a first linear algebra course. As Analytical Geometry originated in the midst of problems faced by humanity, such as the discovery of irrational numbers, incommensurable numbers, Zeno's paradoxes, the method of exhaustion, the idea of continuity, philosophical questions and religious beliefs, it is considered to be It is important that the teaching of analytical geometry permeates historical events, proposing the proposal to build knowledge and not just solve algorithms.

Keywords: Analytical geometry. Algebra. History. Applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
2 JUSTIFICATIVA	8
2.1. AS ORIGENS DA GEOMETRIA ANALÍTICA.....	9
2.1.1 Geometria analítica na antiguidade.....	9
2.1.2 Contribuições da Idade Média.....	18
2.1.3 Contribuições da era moderna.....	22
2.2 A (RE)DESCOBERTA DA GEOMETRIA ANALÍTICA POR DESCARTES E FERMAT	26
2.3 GEOMETRIA ANALÍTICA NA CONTEMPORANEIDADE	32
3 METODOLOGIA	35
4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	36
4.1 SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL	36
4.1.1 Ponto no plano cartesiano.....	36
4.1.2 Distância entre dois pontos.....	36
4.1.3 Ponto médio de um segmento.....	37
4.1.4 Função	39
4.1.5 Função polinomial.....	39
4.1.6 Função polinomial de grau 1	40
4.1.7 Função polinomial de grau 2.....	42
4.1.8 Relações trigonométricas	45
4.1.9 Relações fundamentais:	45
4.1.10 Vetores.....	51
4.1.11 Decomposição de vetores	55
4.1.12 Equação da circunferência	57
4.1.13 Esfera.....	60
5 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA	65
5.1 APLICAÇÃO NA TOPOGRAFIA	65
5.2 APLICAÇÃO NA FÍSICA - LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS (LANÇAMENTO OBLÍQUO).....	69
5.3 APLICAÇÃO NA ENGENHARIA - DIMENSIONAMENTO DE VIGAS EM UMA TRELIÇA E DETERMINAÇÃO DA TENSÃO EM UM CABO SUSPENSO	72
5.4 APLICAÇÃO NO GPS (SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL).....	75
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
7 REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

A busca por compreender o vasto universo da matemática em sua totalidade é um desafio de proporções grandiosas. Dominar esse conhecimento e estar preparado para enfrentar os desafios que esta ciência impõe é, sem dúvida, uma tarefa de extrema exigência. É como se aventurar em uma "corda bamba no picadeiro", diante dos olhares atentos de inúmeros espectadores em uma grande arena de apresentação.

Neste contexto, somos confrontados com um caminho sinuoso, repleto de elevações íngremes e contornos desafiadores, representando uma jornada longa e ao mesmo tempo maravilhosa, para aqueles que desejam conhecer as origens e explorar a infinita, porém ainda não completamente desvendada, extremidade deste campo de estudo. Além dos desafios inerentes, o ato de aprender matemática não pode ser dissociado do ato de ensiná-la, considerando todas as experiências vivenciadas e observações feitas ao longo de nossa formação acadêmica, pois somos simultaneamente "*ensinantes-aprendentes*".

Neste contexto, o estudo da Geometria Analítica emerge como um tópico de destaque, por se configurar como uma poderosa ferramenta matemática para a resolução de problemas geométricos e pela sua inestimável contribuição com aplicações em diversas áreas do conhecimento. Ao longo deste trabalho, será evidente como a Geometria Analítica encontra aplicações significativas em campos como Física, Engenharia Civil, Computação Gráfica e Design, Estatística e Ciência de Dados, Geografia e Geologia, Economia e Finanças.

Por meio de sua linguagem matemática universal, a Geometria Analítica estabelece uma ponte entre o abstrato e o concreto, possibilitando uma compreensão precisa e analítica das formas geométricas e suas relações espaciais. Com essa base sólida, esta pesquisa se propõe a explorar as diversas áreas de aplicação deste componente curricular, revelando como ela permeia as mais diversas esferas do conhecimento e se torna uma valiosa aliada na resolução de problemas práticos.

Ao longo desta jornada de pesquisa e análise, almejamos desvendar a importância e o alcance da Geometria Analítica, aprofundando em suas aplicações e desafiando os limites do conhecimento. A cada capítulo, nossa intenção é trazer à tona a relevância dessa poderosa ferramenta matemática e seu papel essencial na compreensão e transformação do mundo.

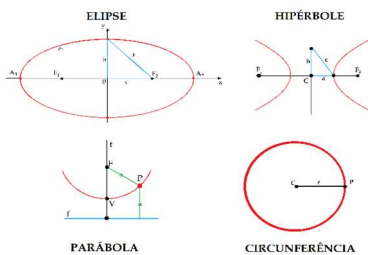
O objetivo geral deste Trabalho de Conclusão de Curso é abordar historicamente o surgimento e a evolução da Geometria Analítica, e suas implicações na construção e

desenvolvimento do conhecimento matemático, elencando algumas aplicações interessantes dela na sociedade atual.

2 JUSTIFICATIVA

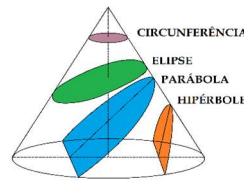
No século XVII, ao adentrar no cenário da matemática global, como se estivéssemos fazendo uma viagem no tempo, encontramos dois personagens de importância monumental para o surgimento da Geometria Analítica: René Descartes e Pierre de Fermat. A eles é comumente atribuída a sua invenção, embora persistam até hoje debates intermináveis entre os historiadores sobre essa descoberta. Alguns argumentam que a Geometria Analítica já havia sido concebida pelos gregos na antiguidade, como evidenciado nos trabalhos de Apolônio e Menaecmo sobre as cônicas (Figuras 1 e 2), enquanto outros ressaltam os estudos de Nicolas Oresme sobre variações longitudinais na Idade Média. No entanto, a corrente predominante entre os historiadores atribui a Descartes e Fermat o mérito por essa conquista (Eves, 2011).

Figura 1 - Trabalho de Menaecmus e Apolônio de Perga - Seções Cônicas.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Figura 2 - Equações das cônicas dos dias atuais.



$$\text{Circunferência: } x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Elipse: } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Hipérbole: } \frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1$$

$$\text{Parábola: } kx^2$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Diante das controvérsias mencionadas, é possível concordar com a maioria dos historiadores, que atribuem às contribuições decisivas dos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, no século XVII, a origem essencial da Geometria Analítica. A partir das contribuições desses dois estudiosos, a Geometria Analítica adquiriu os contornos iniciais que se tornaram familiares (Domingues, 2011).

Antes mesmo de concebermos um formato definido para a Geometria Analítica, é importante reconhecer que ela resulta da fusão de dois ramos fundamentais da matemática: a geometria e a álgebra. Podemos afirmar que "a álgebra ousou e conferiu à geometria analítica, e à matemática de modo geral, uma linguagem, simbologia e significado próprios, chegando até a adquirir um sentido distinto" (Eves, 2011, p. 27). É relevante destacar que a descoberta da

Geometria Analítica resulta das condições favoráveis do primeiro terço do século XVII e das circunstâncias que remontam a tempos anteriores.

2.1. AS ORIGENS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

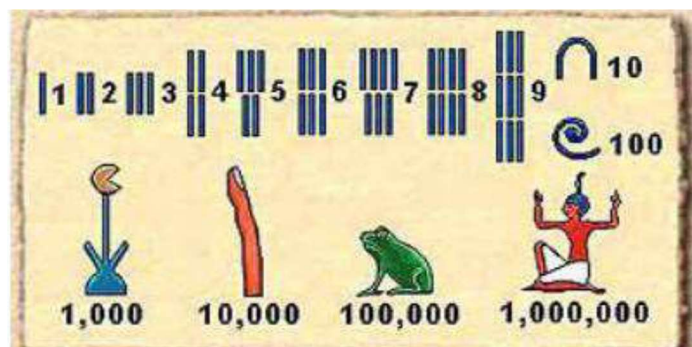
2.1.1 Geometria analítica na antiguidade

Em sua obra sobre a história da matemática, Boyer (2012) percorre um caminho desde os vestígios até às tendências recentes para falar sobre a matemática, e nesse entremeio o matemático explica que o surgimento da geometria se fundamenta em desdobramentos da matemática da antiguidade até o início do século XVII ao sustentar a necessidade de investigações gerais sobre a história da geometria analítica.

Ele avalia que, frequentemente o desenvolvimento efetivo da matemática está associado ao mundo das questões práticas, o que ele discorda ao argumentar que para esta regra parece haver mais exceções do que exemplos, sendo uma das exceções a descoberta da geometria analítica, que goza de certa autonomia quando comparada a outras áreas da matemática que sofrem a influência de aspectos externos (fatores socioculturais).

Para explicar o surgimento da geometria analítica, busca vestígios históricos nas civilizações pré-helênicas do Egito e da Babilônia que praticavam uma matemática assentada na experiência, e possuíam considerável conhecimento em aritmética e geometria tanto que desenvolveram um sistema de coordenadas com aplicações próprias na agrimensura e na astronomia. Tais civilizações imprimiam a prática matemática por meio da mensuração de figuras geométricas, o que propiciou a relação entre números e configurações espaciais.

Figura 3 – Números Egípcios.



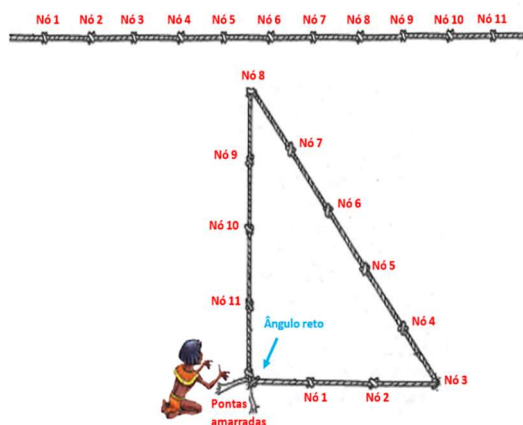
Fonte: Silva, Lima e Oliveira (2020)

A álgebra, desenvolvida ao longo do tempo e aprimorada por indivíduos obstinados na superação dos desafios impostos, teve suas raízes nos babilônios, cujo estilo retórico perdurou até meados do século V. Contudo, no século IV d.C., emergiu um novo método de

representação da álgebra, um estilo abreviado (sincopado), que revolucionou a forma de expressar e representar cálculos matemáticos no contexto geométrico. Por volta do ano 400 d.C., Diofante de Alexandria, com sua ideia audaciosa e engenhosa, deixou sua marca no cenário da álgebra. Diofante dedicou-se incansavelmente a encontrar símbolos que facilitassem a escrita e os cálculos matemáticos, substituindo as expressões que anteriormente eram completamente descritas por palavras (Evens, 2011).

Roque (2012) argumenta que são pré-históricos a associação da relação numérica com a configuração espacial e a primeira conexão entre números e tempo. Os antigos documentos escritos da Mesopotâmia, Egito, China e Índia evidenciam a preocupação com a mensuração. Os papiros pré-helênicos e as escritas cuneiformes descrevem problemas envolvendo os conceitos de comprimento, área e volume. Historicamente, as ideias da Geometria Analítica surgiram da comparação de grandezas curvilíneas com grandezas retilíneas feitas pelos egípcios e babilônios. As contribuições dos antepassados para o surgimento da geometria analítica não resultam apenas de problemas relacionados à ciência natural ou à tecnologia, mas por questões puramente filosóficas. Sua origem egípcia narra o seu surgimento devido à necessidade de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do Rio Nilo. (Boyer, 2012a). As inundações anuais sobrepunham-se sobre o Delta do referido rio. Ano após ano, o Nilo transbordava seu leito natural, espalhando um rico limo sobre os campos ribeirinhos. A inundação fazia desaparecer os marcos fixados no ano anterior, de delimita o entre as propriedades de terras. Para demarcarem novamente os limites existiam os "puxadores de corda", (assim chamados devido aos instrumentos de medida e cordas entrelaçadas que usavam para marcar ângulos, e determinar as áreas de lotes de terrenos, dividindo-os em retângulos e triângulos).

Figura 4 – Puxadores de corda



Fonte: Clube de Matemática da OBMEP (2023)

Os egípcios levavam os direitos de propriedade muito a sério e sem os marcos fronteiros, tinham início muitos conflitos entre indivíduos e comunidades. Assim, sem as demarcações, os agricultores não tinham como saber qual era a sua propriedade, tanto para o cultivo, quanto para o pagamento de impostos aos governantes. Para resolver esta situação, os faraós passaram a nomear funcionários, os agrimensores, cuja tarefa era avaliar prejuízos das cheias, medir as terras e fixar os limites das propriedades, restabelecendo as fronteiras entre as diversas propriedades, refazendo os limites de suas áreas de cultivo. No momento de refazer os limites, os agrimensores tinham apenas informações parciais ou até mesmo nenhuma, pois as fronteiras podiam ter sido destruídas por completo (Malta, 2015).

Estes agrimensores acabaram por aprender a determinar áreas de terrenos dividindo-os em retângulos e triângulos, e quando se deparavam com superfícies irregulares utilizavam o método de triangulação, (dividir um campo em porções menores e triangulares cujas áreas somadas correspondiam à área total). Os egípcios tinham muita habilidade em delimitar terras e com isso descobriram e utilizaram inúmeros princípios. Um destes princípios era utilizado para marcar ângulos retos, onde usavam cordas cheias de nós equidistantes um do outro, fazendo assim a divisão das terras. Essa técnica empírica, para obter resultados aproximados, mais tarde viria a ser demonstrada pelo Teorema de Pitágoras (Fleck, 2010).

Contudo, as relações entre números e configurações espaciais surgiram com base no empirismo através de casos particulares que eram ampliados mediante induções para incluir outros casos semelhantes. Observa-se que a falta de uma compreensão da estrutura lógica da matemática por partes dos egípcios e dos babilônios impediu que seus resultados fossem transformados em teoremas universais. E mesmo que essas civilizações tenham evoluído de forma razoável em aritmética e geometria, a ausência de processos gerais e dedutivos dificultou a associação desses campos num sistema formal que definiria a geometria algébrica futura.

Tales de Mileto no século VI a.C. foi o primeiro matemático grego que substituiu a base de comparação desenvolvida pelos egípcios e babilônios como modelo indutivo para o modelo dedutivo, que alcançava resultados partindo de uma série de proposições verdadeiras por si só, de maneira tal que as demais proposições eram deduzidas das anteriores mediante argumentos de ordem lógica, ou seja, era um modelo matemático que valorizava a reflexão ao invés da observação. Essa nova forma de pensar a matemática, priorizando a comprovação de resultados através da investigação sistemática, foi a base metodológica para o desenvolvimento histórico da geometria.

Os pitagóricos deram continuidade a esse processo dedutivo implantado por Tales na geometria e avançaram ao estabelecerem uma sistematização maior de conceitos envolvendo

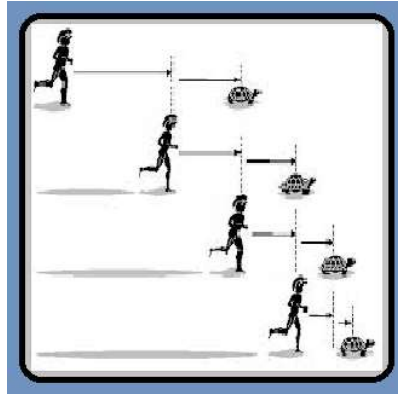
a matemática como um todo. Os babilônios e os egípcios tinham submetido os números a mensurações espaciais e demarcações temporais; já os pitagóricos ampliaram o conhecimento para a lógica e provaram que os números possuíam também propriedades operacionais para as explicações de quaisquer fenômenos intrínsecos à realidade física. Logo, havia uma identificação do universo com a geometria e isto foi primordial para o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade (implícita nos tratados pré-helênicos).

A compreensão pré-helênica da ideia de proporcionalidade desempenhou um papel crucial tanto na resolução de problemas de medição da época quanto no desenvolvimento subsequente desse conceito na civilização grega. Os pitagóricos desempenharam um papel fundamental ao identificar as limitações da noção de proporcionalidade pré-existente e ao reformulá-la. Embora os pitagóricos já estivessem familiarizados com a ideia de conectar a aritmética com a geometria, seu trabalho estava restrito a números inteiros positivos e considerava apenas a reta e o círculo como curvas possíveis. Essas limitações iniciais comprometeram o desenvolvimento de uma geometria analítica mais ampla devido às restrições impostas pelas ideias pitagóricas (Roque; Carvalho, 2012).

A segunda metade do século V a.C. foi designada como a "idade heroica" da civilização helênica, devido ao considerável número de investigações que foram fundamentais para o futuro da matemática. Isso incluiu o desenvolvimento do método analítico na Academia Platônica. O termo "idade heroica" refere-se à crítica de um representante da escola de Eléia em relação ao sistema de ideias dos pitagóricos.

Os pitagóricos acreditavam em um universo composto por uma multiplicidade infinita de pontos dispostos ordenadamente e em movimento constante, o que estava em desacordo com a concepção de uma unidade permanente do universo defendida pelos filósofos de Eléia. Zenão, um dos representantes proeminentes da escola de Eléia, apresentou quatro paradoxos - conhecidos como a dicotomia, a corrida de Aquiles, a flecha e o estádio - para mostrar que essas posições levavam a absurdos, questionando assim as ideias dos pitagóricos (Oliveira; Fragoso, 2011).

Figura 5 – Paradoxo de Zenão: A corrida de Aquiles



Fonte: Adaptado de Vivian (2014)

Roque e Carvalho (2012) avaliam que os argumentos de Zenão não apenas revelaram as fragilidades e conceitos vagos da matemática grega, particularmente da escola de Pitágoras em relação aos conceitos de infinito, continuidade e limite, mas também destacaram a ambiguidade entre razão e experiência. Surpreendentemente, essas questões tiveram pouco impacto nas atitudes dos pitagóricos, que simplesmente descartaram a suposição de uma aritmética contínua e a presença de uma variável algébrica. Acrescenta-se que:

Outro evento aparentemente em sincronia com as argumentações de Zenão foi a descoberta de certo impasse entre a aritmética e a geometria da parte de um discípulo de Pitágoras chamado Hipassus. Para compreendermos melhor as consequências dessa descoberta, é necessário informar que antes da sua revelação os pitagóricos acreditavam que a aritmética regia todas as leis da geometria e mesmo das demais ciências da natureza sendo que a teoria das proporções era o principal exemplo dessa supremacia numérica. Essa teoria admitia que todas as grandezas naturais eram comensuráveis. No entanto, a diagonal de um quadrado, por exemplo, não é comensurável com o seu lado, visto que não há uma grandeza comum a estas duas anteriores que possa exprimir a razão entre elas mediante uma razão entre dois números inteiros. (Malta, 2015, p. 15).

A transformação dos princípios da Escola de Pitágoras teve um profundo impacto no desenvolvimento do pensamento matemático grego, resultando em várias mudanças significativas. Uma dessas mudanças foi a separação gradual entre a geometria e a aritmética, uma vez que esta última não conseguia mais atender às necessidades da primeira. Além disso, houve uma evolução nos enunciados dos problemas clássicos, que anteriormente envolviam a construção de figuras geométricas em vez do cálculo de quantidades numéricas (Boyer, 2012a).

A substituição dos cálculos numéricos por construções geométricas ocorreu de maneira progressiva. A geometria passou a ter uma influência mais significativa sobre a aritmética, especialmente no contexto das equações quadráticas, que passaram a ser resolvidas geometricamente por meio do método de áreas, em oposição ao método algébrico-numérico anteriormente proposto pelos babilônios (Oliveira; Frago, 2011). A emergência do conceito

de incomensurabilidade levou a essas restrições, que se tornaram uma característica geral na matemática da época, substituindo a abordagem discreta pela contínua no pensamento coletivo (Gonçalves; Possani, 2009). Isso, por sua vez, consolidou a supremacia da geometria sobre a álgebra grega.

Apesar das restrições impostas pelos paradoxos e pela incomensurabilidade, a pesquisa coletiva sobre problemas clássicos, como a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo, permaneceu imune à influência dominante, criando um ambiente propício para o desenvolvimento da geometria analítica (Malta, 2015).

Os princípios teóricos pitagóricos inicialmente impediram a resolução desses problemas clássicos, o que incentivou os matemáticos da chamada "idade heroica" a contornarem essas limitações por meio de técnicas alternativas na construção geométrica, desempenhando um papel crucial na descoberta de novas curvas. Paralelamente, Hipócrates desenvolveu um teorema que relacionava as áreas de círculos com os quadrados de seus diâmetros, usando proporções. Esse teorema só foi rigorosamente demonstrado séculos depois, no século IV a.C., através do método de Exaustão de Eudoxo. Isso trouxe a crença coletiva de que a quadratura do círculo era possível, mas sua resolução exigiria o abandono das abordagens tradicionais (Eves, 2011).

Nesse sentido, o sofista Hípias recorreu a procedimentos mecânicos para introduzir uma nova curva no cenário geométrico grego, conhecida historicamente como quadratriz e que levou a uma ideia de lugar amadurecida no imaginário coletivo. No século seguinte outras curvas seriam conhecidas pelos métodos cinemáticos e estereométrico. Dentre os problemas que despontaram no imaginário coletivo da época, Boyer (2012a, p. 12) assegura que a duplicação do cubo “desempenhou o maior papel no desenvolvimento da geometria analítica [...]”.

Hipócrates foi o pioneiro na resolução da duplicação do cubo ao perceber que esse problema poderia ser reduzido ao cálculo das médias proporcionais. Seu esforço inicial foi seguido por Arquitas, amigo de Platão, que no início do século IV a.C. abordou o problema das médias proporcionais por meio de construções envolvendo a interseção de três superfícies de revolução: o cone, o cilindro e o toro (Boyer, 2012a). Dessa forma,

O refinamento gradual das soluções dos problemas clássicos ampliou o número de lugares conhecidos em relação à reta e o círculo e as construções mecânicas e estereométricas surgiram como alternativa a esses “novos lugares” que não eram construídos segundo as convenções tradicionais. Essas soluções alternativas de definição de curvas encontraram inicialmente algumas dificuldades de serem implantadas na linha de pensamento que estava se desenvolvendo na academia de

Platão – fundada por ele mesmo em Athenas em meados do século IV a.C. (Malta, 2015, p. 19).

Platão enfatizava especialmente a régua não graduada e o compasso, por serem instrumentos aceitáveis na linha de pensamento seguida por seu amigo e instrutor Arquitas, porém, aos poucos, houve uma desconstrução desse pensamento tradicional e resoluções dos problemas clássicos passaram a atrair a atenção dos estudantes da academia. Mesmo mantendo seus pressupostos teóricos, Platão se dedicou ao problema deliano resolvendo-o por meio de procedimentos mecânicos, contrariando a sua obstinação excessiva em torno da régua e do compasso.

Boyer (2012a) argumenta que as restrições impostas por Platão às curvas, permitindo apenas a reta e o círculo, revelam que, embora tenha inibido o desenvolvimento da geometria analítica, ele, inadvertidamente, favoreceu o desenvolvimento do método analítico. Esse método se tornou uma ferramenta heurística que mais tarde seria incorporada à geometria analítica. Na visão de Platão, o teorema a ser demonstrado era supostamente válido, e a partir dele, outro teorema era deduzido de tal forma que, se a ordem desse processo fosse invertida, o teorema proposto ainda seria demonstrado.

A incomensurabilidade de grandezas representou um dos maiores desafios intelectuais para os gregos antigos, devido à complexidade de lidar com números irracionais ao tratar de objetos planos e espaciais de forma proporcional. Isso levou os gregos a desenvolverem uma teoria baseada no equivalente geométrico de encontrar o maior divisor comum (Gonçalves; Possani, 2009).

O método da Exaustão era eficaz para demonstrar sinteticamente muitos resultados específicos envolvendo relações proporcionais entre figuras curvilíneas e retilíneas. No entanto, esse método não permitia uma descoberta analítica dos procedimentos subjacentes a esses resultados. Por quase dois mil anos, a matemática foi predominantemente sustentada pela "ideia de proporcionalidade em vez da noção mais geral de função" (Boyer, 2012, p. 5).

Entre as contribuições da Academia Platônica, as seções cônicas se destacam como as mais relevantes, sendo conhecidas como elipse, hipérbole e parábola. Essas curvas desempenharam um papel fundamental na formulação das leis que governam o movimento dos planetas por Johannes Kepler e foram igualmente importantes para as descobertas de Galileu sobre o movimento de projéteis. Tradicionalmente, a atribuição do descobrimento dessas curvas é atribuída a Menaecmo (Eves, 2011). Afirma-se que:

O termo seções cônicas alude à forma com que Menaecmo resolveu o problema deliano mediante uma família de curvas descortinadas através do corte de três cones circulares retos por um plano perpendicular as suas geratrizes. Conforme a natureza do ângulo do vértice desses três cones – se agudo, reto ou obtuso – Menaecmo determinou as três curvas distintas que são conhecidas hoje como tríades menaecmianas. (Malta, 2015, p. 22).

Na era heroica, a matemática atingiu um nível significativo de refinamento, estabelecendo as bases para investigações futuras. Com o advento da era helenística no século III a.C., a matemática testemunhou avanços notáveis, resultantes dos desenvolvimentos anteriores. Em pouco mais de um século, três matemáticos surgiram em Alexandria, marcando o início da Idade de Ouro da matemática.

Esta era dourada foi inaugurada por Euclides, um geômetra que viveu em Alexandria. Ele compilou o conhecimento de seus predecessores em uma obra notável chamada "Elementos", que sistematicamente reuniu os princípios fundamentais da matemática helênica em uma exposição concisa e organizada (Boyer, 2012a). Além disso, a coletânea "Tesouro", que inclui obras de Euclides, Apolônio e Aristeu, destacou os "Lugares Planos" e as "Cônicas", que mais tarde serviram como base para o desenvolvimento da geometria analítica de Fermat.

Apolônio, por sua vez, unificou e aprimorou as ideias de Menaecmo, Aristeu e Euclides relacionadas às cônicas. Ele organizou de forma sistemática e completa esses conceitos, demonstrando que é possível obter os três tipos de cônicas apenas alterando a inclinação do plano que corta o cone. Apolônio tratou as cônicas como uma família de curvas, rompendo com a visão anterior de tríades (Boyer, 2012a).

Enquanto isso, Arquimedes, conhecido por seu estudo das cônicas, concentrou-se em problemas de mensuração. Sua contribuição mais notável foi a descoberta da espiral, uma nova curva, através de métodos cinemáticos, o que representou um avanço significativo para o desenvolvimento da geometria analítica (Boyer, 2012a).

Roque (2012) menciona Perseu como um contemporâneo de Arquimedes, que também contribuiu para o desenvolvimento da ideia de lugares. Perseu, por meio de métodos estereométricos, criou três curvas ovais ao realizar seções ou cortes de planos paralelos ao eixo de rotação de certas superfícies sólidas, que foram construídas pela rotação de um círculo sobre seu próprio eixo.

Dois outros matemáticos que desempenharam um papel fundamental na evolução da ideia de lugares e na resolução do problema deliano foram Nicomedes e Diocles. Ambos introduziram novas curvas, a conchoide e a cissoide, respectivamente, com base em

procedimentos cinemáticos. Essas descobertas representaram avanços importantes na geometria analítica. Consta-se que:

Com a ocupação romana de Alexandria, a geração que ornamentou a matemática – da segunda metade do século V a.C. até a primeira metade do século II a.C. – com elementos sintéticos e lógicos próprios do pensamento platônico, se encontrava em extinção e a linha geometrizada do coletivo de pensamento foi gradualmente substituída por uma linha pragmática na qual as matemáticas aplicadas e os estudos isolados de álgebra e aritmética ganhavam espaço nos próximos séculos. (Malta, 2015, p. 26).

No período que compreendeu desde Hipparchus (150 a.C.) até Ptolomeu (150 d.C.), surgiu a ideia de coordenadas com aplicações na astronomia, engenharia e geografia. No entanto, essa ideia "não parece ter exercido qualquer influência claramente explicável sobre a subsequente ascensão da geometria analítica" (Boyer, 2012, p. 35).

Heron foi um dos matemáticos representativos desse período e se destacou por desafiar o princípio da homogeneidade euclidiana. Ele rompeu com a supremacia da geometria no tratamento das equações, introduzindo o conceito de linhas com áreas e conectando novamente a aritmética com a geometria, atribuindo valores numéricos às grandezas geométricas.

No século III d.C., Diofanto (250 d.C.) resgatou a matemática pura. Ele trouxe uma nova perspectiva para a álgebra ao criar representações simbólicas que não mais se baseavam em segmentos de linhas, mas sim em números. A solução geométrica das equações quadráticas foi substituída por um método aritmético. Embora as questões estudadas por Diofanto não fossem de natureza prática (Roque; Carvalho, 2012), sua notação quase-simbólica desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da geometria analítica. Isso ocorreu porque a principal limitação da matemática grega era a ausência de uma álgebra simbólica independente, e o trabalho de Diofanto representou um elo na evolução da álgebra, desde os babilônios até Descartes (Boyer, 2012, p. 36).

Diofanto foi o primeiro matemático a fazer uso de abreviações nos problemas e equações. Segundo Guilli (1999), usando o sistema de numeração decimal e o nosso alfabeto. Com o surgimento de outros símbolos, Diofanto utilizava o símbolo xx para representar a incógnita no caso em que ela viesse acompanhada de um número diferente de 1. Para as potências, de acordo com Guilli (1999), Diofanto utilizava os seguintes símbolos: "Q (de quadrado), para x^2 . C (de cubo), para x^3 . QQ (de quadrado e quadrado), para x^4 QC (de quadrado e cubo), para x^5 ". (Guilli, 1999, p.24).

No final do século III d.C., a matemática assumiu uma nova abordagem estilística, enfatizando aspectos heurísticos e dedutivos. Nesse período, destacou-se a pesquisa inovadora do geômetra Pappus, que propôs reunir todo o conhecimento matemático dos antigos, seguindo uma abordagem mais abrangente e coerente do que a de Euclides. Ele condensou praticamente todos os ramos da matemática, acrescentando novos resultados e generalizações de teoremas existentes.

Pappus estudou o problema elaborado por Descartes - o lugar para três ou quatro linhas - e demonstrou que em todos os casos possíveis o lugar geométrico é sempre uma cônica. O geômetra também percebeu que o problema poderia ser ampliado para cinco ou seis linhas e até mesmo para um número qualquer de linhas. As intervenções de Pappus fizeram com que a geometria voltasse a ser a base do pensamento matemático, e esteve próximo de descobrir a geometria analítica, mas seu desinteresse pela matemática da época de Diofanto dificultou a sua ação.

2.1.2 Contribuições da idade média

A queda do Império Romano, no século V, transferiu a liderança em pesquisas matemáticas exercida pelos gregos em Alexandria para o mundo oriental. Boyer (2012a) descreve que a primeira fase do desenvolvimento da matemática medieval ocorreu principalmente em três civilizações orientais entre os anos de 524 (nascimento de Boécio) e 1250 com a morte de Fibonacci. A matemática foi desenvolvida de forma específica por cada uma dessas civilizações, a exemplo dos hindus, que praticavam uma matemática de orientação prática a partir de um método heurístico, haja vista que seus tratados se concentravam, especialmente, na resolução de problemas de aritmética e álgebra, porém, a geometria também era estudada só que indiferente aos aspectos gerais e lógicos dos gregos.

Boyer (2012a, p. 40) afirma que: “Entre os hindus o lado computacional do assunto ofuscou os aspectos lógicos e especulativos, por isso que encontramos lá pouco material relacionado à ascensão da geometria analítica”, tendo sido contestado por Fleck (2010, p. 72) ao revelar que “toda descoberta é inseparavelmente intrincada com o chamado erro: para se perceber uma relação, outra relação deve passar despercebida, deve ser negada ou ignorada”. Isto explica o estilo de pensamento vigente à época, em que os fatos eram apresentados conforme o sistema de ideias, revelando uma forte repressão psicológica exercida pelo coletivo de pensamento.

Assim, os hindus raciocinavam conforme o estilo da época, uma vez que a capacidade adquirida de lidar com a forma (*gestalt*) do método heurístico sugeria a perda simultânea da “capacidade de ver aquilo que contradiz tal forma” (Fleck, 2010, p. 142). Tempos depois, os árabes sucederam os hindus e superaram essa incapacidade por meio de contatos intercoletivos com os gregos do império bizâncio.

As descobertas dos hindus nos campos da aritmética e da álgebra compõe acervo que Boyer relacionou a ascensão posterior da geometria analítica. Na aritmética, os hindus inventaram símbolos específicos para representar os números de zero até nove, aperfeiçoando a ideia babilônica de notação posicional com a criação de um sistema numérico decimal que admitia o zero como número. Boyer (2012a, p. 41) avalia que os numerais hindus “serviam mais para simplificar cálculos algébricos e assim tornar atrativa mais tarde a substituição de instrumentos algorítmicos por construções geométricas”. Quanto à álgebra, os hindus aperfeiçoaram a linguagem sincopada de Diofanto para realizar cálculos, o que representou “um passo dos gregos em direção a Viète.” (Boyer, 2012a, p. 41). Observa-se, então, que:

Enquanto a civilização hindu estava ligada ao imaginário prático da matemática que se ocupava de questões específicas da aritmética e álgebra, a civilização bizantina se encontrava num estado de conhecimento que preservava o estilo de pensamento dos antigos gregos – na trilha dos comentadores a partir de Pappus. As investigações matemáticas no império bizantino não extrapolaram a tendência do momento em construir comentários dos principais tratados gregos. Essa linha de orientação revelava uma tendência à persistência do sistema de idéias da tradição. (Malta, 2015, p. 32).

Em razão disso, o respeito e a obediência aos cânones tradicionais impediram os bizantinos de entender novos fatos distantes da rigidez da harmonia das ilusões do coletivo de pensamento, haja vista que “um sistema de opinião elaborado e fechado, constituído de muitos detalhes e relações, persiste continuamente diante de tudo que o contradiga” (Fleck, 2010, p. 69). No início da era moderna, os matemáticos demonstraram maior interesse pelas questões de mensurações infinitesimais indicadas por Arquimedes em seus tratados, do que aquelas de lugares geométricos contidas nas obras de Apolônio.

A civilização árabe era um império de grande extensão territorial com soberania geopolítica frente aos povos dominados, o que estimulou a comunicação intercoletiva entre os matemáticos mulçumanos e os coletivos de pensamento desses outros povos, promovendo um fluxo de trocas sobre os diferentes estilos de pensamento da matemática. Por conseguinte, o estado de conhecimento da matemática árabe definiu um estilo de pensamento heterogêneo que

continha traços da “aritmética dos hindus e a geometria dos bizantinos, com elementos adicionais dos gregos, babilônios e egípcios” (Boyer, 2012a, p. 41). Destaca-se que:

Da aritmética dos hindus, os árabes incorporaram os símbolos numéricos juntamente com a sua ideia de notação posicional. Da geometria bizantina, eles adotaram o método lógico de investigação, mas o interesse pela aritmética hindu fez com que eles não atentassem para as dificuldades lógicas subentendidas no conceito de número irracional que tanto preocupava os gregos do império bizantino. Desse modo, da aritmética hindu, os árabes também incorporaram os números irracionais, mas os números negativos foram postos de lado devido à adoção dos métodos gregos de resolução geométrica de equações. A principal contribuição matemática árabe para o desenvolvimento da geometria analítica se deu no campo da álgebra. Nesse assunto eles foram influenciados tanto pelos mesopotâmicos, como também pelos próprios hindus e até um pouco pelos gregos. (Malta, 2015, p. 32).

Al-Khowarizmi foi o primeiro matemático notável em álgebra ao realizar um amplo estudo sobre as equações quadráticas através do método babilônio de resolução, que se servia de uma álgebra retórica sem justificativa e emprego do recurso geométrico, o que foi visto por Boyer (2012a, p. 41-42) como “um retrocesso do trabalho grego clássico” já que a técnica dos gregos não era usada na sua essência como “uma construção rigorosa em conformidade aos postulados especificamente declarados (tal como eram construídas as soluções pitagóricas e euclidianas) [...]”. A álgebra de Al-Khowarizmi não atingiu o mesmo nível de sofisticação de linguagem dos cálculos sincopados de Diofanto, que foram aperfeiçoados pelos hindus, pois se valeu de uma linguagem retórica, por isso, Boyer (2012b) entende que o título de pai da álgebra se deve mais a Al-Khowarizmi do que propriamente Diofanto em razão de sua investigação geral em torno das equações quadráticas.

O matemático Omar Khayyam deu continuidade à álgebra de Al-Khowarizmi ao estudar as equações cúbicas, justificando que este tipo de equação só podia ser solucionada pelo método geométrico dos antigos que envolvia interseção de cônicas. Omar generalizou o método clássico para todos os casos de equações cúbicas que possuíam raízes positivas e ultrapassou os antigos, mas em relação aos gregos foi uma decisão limitada, já que todas as descobertas científicas se fundamentam em dois movimentos ativos, isto é: “um determinar dirigido, voltado para um objetivo, e um abstrair em direção contrária, sendo que ambos se complementam.” (Fleck, 2010, p. 73). Mesmo os árabes admitindo a existência dos irracionais, Omar não se atentou para as possibilidades algébricas de resolução das equações cúbicas no âmbito dos números reais positivos e no tratamento das equações lineares e quadráticas que permitiam soluções algébricas, Omar entendia ser “necessário complementar e verificar estas por meio de construções geométricas, uma visão que faz dele um elo importante entre os gregos e a geometria de Descartes” (Boyer, 2012a, p. 43).

Enquanto as civilizações orientais utilizam o melhor da matemática clássica, a Europa latina penava devido à escassa criação intelectual. No século XII, a desigualdade entre as matemáticas do oriente e do ocidente, referente ao nivelamento de informações, foi contornada com a divulgação por toda a Europa latina de manuscritos árabes e gregos traduzidos para o latim, o que não repercutiu bem no imaginário coletivo da época, pois os “eruditos europeus ocidentais mostravam inicialmente pouco interesse nelas, ocupados como eles estavam com questões de teologia e metafísica” (Boyer, 2012a, p.44).

No início do século XIII surgiram inúmeras exposições dos numerais hindu-árabicos que contrastavam com os pragmáticos numerais romanos. Os árabes haviam juntado o melhor da aritmética hindu e da geometria bizantina, levando os europeus a se curvarem à álgebra, fato que foi confirmado pelo mercador Fibonacci – o primeiro grande matemático do mundo latino – cujos métodos se enquadravam perfeitamente ao estilo de pensamento dos matemáticos árabes. Fibonacci em sua obra *Liber abaci* de 1202 apresenta um corpo de regras algébricas e muitos problemas em álgebra recomendando a utilização dos numerais hindu-árabicos por meio das operações da aritmética, além de enfatizar que todas as propriedades da aritmética só poderiam ser demonstradas geometricamente (Malta, 2015).

Devido à persistência dos sistemas de opiniões do coletivo de pensamento enraizado na filosofia e ciência aristotélica, a obra de Fibonacci não teve uma boa repercussão à época, o que adiou o florescimento da álgebra, cedendo lugar aos estudos em torno da cinemática de Aristóteles que foram desenvolvidos pelos eruditos das universidades de Oxford e Paris, no período posterior da idade média, compreendido entre 1250 e 1477, quando surgiram as primeiras discussões em torno da quantificação das formas variáveis – como a distância e o tempo – que contrapunham com o posicionamento qualitativo de Aristóteles acerca do tema.

Calculator, um importante escritor de Oxford, apresentou uma compreensão qualitativa do conceito de velocidade (taxa de variação), demonstrando limitações do seu estilo de pensamento que não levava em conta a possibilidade de quantificação das formas a não ser a distância e o tempo, pois eram soluções intuitivas que não tinham condições de satisfazer os rigores da matemática grega, porém, contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento posterior dos conceitos de variável e função que seriam retrabalhados na modernidade.

Em meados do século XIV, as argumentações prolixas demonstradas por Calculator, influenciaram o professor da universidade de Paris, Nicolas Oresme, que estabeleceu um tratamento diferenciado para a quantificação das formas a partir da interpretação gráfico-geométrica associada ao uso de coordenadas na matemática, que já havia sido desenvolvida na antiguidade por Apolônio no estudo das seções cônicas.

De certo, a teoria das proporções dos antigos não foi substituída pelas equações hindu-arábicas que poderiam ter enriquecido as pré-ideias de variável e função sinalizadas por Oresme. Uma possível contribuição de Oresme para a geometria analítica, no campo da álgebra, ocorreu no próprio estudo da teoria das proporções que era um dos tópicos favoritos da matemática latina desde os tempos de Boécio.

Nesse contexto, Boyer (2012a, p. 53) avalia que a Europa latina, no período medieval, perdeu a oportunidade de alavancar o desenvolvimento da matemática, pois faltou aos eruditos o domínio do fundo matemático oriental herdado da geometria grega e da álgebra árabe. A postura inflexível do estilo de pensamento dos latinos que se preocupava mais com os aspectos práticos da matemática inibiu uma possível conversão da teoria das proporções e da latitude das formas, respectivamente, numa álgebra simbólica e numa geometria analítica.

2.1.3 Contribuições da era moderna

No final do século XV, a matemática ainda era delimitada pela linha de pensamento da segunda fase da matemática medieval, com destaque para a teoria da proporção e a composição gráfica da latitude das formas. Durante o século XVI, as alterações graduais na continuidade dos estudos orientais em álgebra aperfeiçoaram os métodos simbólicos, tendo como referência as obras a *Triparty en la science des nombres de Chuquet* publicada na França em 1484, e dez anos após na Itália a *Summa de arithmetica de Pacioli*, que revelavam uma tendência ao emprego de símbolos para tornar as formulações algébricas mais claras e precisas.

Tais obras representaram uma antecipação da álgebra sincopada, que viria a se desenvolver gradualmente no século XVI, nas quais constavam abreviaturas compostas por símbolos para as quantidades desconhecidas e as potências dessas quantidades, constituindo-se numa linguagem simbólica substituta da linguagem retórica medieval. Acrescenta-se que:

Ainda assim, especificamente na maior parte do século XVI, o renascimento nas matemáticas tinha sido mais um reflexo da continuidade dos estudos orientais em álgebra do que um resultado do interesse e da recuperação dos tratados gregos de geometria. Naturalmente, isso não quer dizer que a geometria não tinha sido influente naquela época, pelo contrário, as traduções e referências aos tratados clássicos, como parte da tendência humanista em torno da cultura renascentista, exerceu influência em muitos matemáticos que traduziram do grego para o latim, inclusive para as línguas vernáculas, diversos tratados de geometria clássica. No entanto, o respeito excessivo do imaginário da época aos cânones tradicionais impedia o desenvolvimento de uma nova compreensão para a geometria euclidiana além da sintética. Em todo o caso, o interesse renascentista pela ciência clássica ampliou a perspectiva dos algebristas italianos que viriam a se interessar não só pelos problemas aplicados da álgebra, mas também para os problemas teóricos da geometria. (Malta, 2015, p. 38).

Na época de Pacioli, a álgebra e a geometria possuíam similaridades, principalmente para a solução de problemas, contudo essa relação era mais em benefício da geometria do que das equações algébricas, que eram solucionadas à maneira geométrica, tendo o próprio Pacioli declarado a impossibilidade da resolução algébrica da cúbica. Tal pensamento foi contrabalanceado por resoluções algebrizadas para solucionar a cúbica e a quádrlica mediante cálculos com radicais. Essa condição estilística quinhentista fez com que “algo já conhecido” influenciasse a “maneira do conhecimento novo”, por isso “o processo do conhecimento” continuamente “amplia, renova e refresca o sentido do conhecido” (Fleck, 2010, p. 81). Para Boyer (2012a, p. 57), essa nova tentativa de resolução da cúbica e da quádrlica impulsionou o desenvolvimento da álgebra em sua totalidade, sobretudo, no tocante às operações, notações e conceitos, pois a partir desse momento tinha “surgido uma maior confiança nas operações da álgebra, independentemente de qualquer significado geométrico” e isso promoveu “o desenvolvimento de uma teoria elementar de equações”.

Conforme Boyer (2012a), os estudos em álgebra desenvolvidos na Itália inauguraram uma teoria geral de equações, primeira inspirada por Paolo Bonasoni na obra “Álgebra Geométrica” ao propor o uso de letras para se referir as incógnitas, e também indicar os coeficientes de uma equação.

O francês Viète conseguiu trazer para o conceito algébrico de parâmetro uma inovação por meio do simbolismo algébrico à época ao distinguir parâmetro de incógnita, surgindo um sistema geral de cálculo simbólico com a exposição e manipulação das espécies independentemente da sua natureza. Os problemas eram tratados de maneira geral, anulando os exemplos numéricos e as regras de procedimento verbais da tradição algébrica italiana.

Esse conceito de parâmetro revelou uma teoria geral de equações que possibilitou encontrar as fórmulas ou soluções gerais das equações algébricas que expressavam as incógnitas em função dos parâmetros. Boyer (2012a, p. 63), afirma que Viète adotou os “símbolos + e –, mas ele fez pouco além disto”, haja vista sua linguagem não ter sido apenas simbólica, mas sua terminologia geométrica ter se prendido ao princípio da homogeneidade dimensional que limitou consideravelmente as suas intervenções simbólicas, especialmente no que diz respeito às potências das quantidades.

Boyer (2012a, p. 59-60) destaca três contribuições de Viète para o desenvolvimento da geometria analítica, sendo a primeira delas o que diz respeito aos termos “parâmetro” e “variável” que não foram cunhados pelo francês, mas em todo o caso, essas ideias algébricas surgiram gradualmente à medida que a convenção vogal-consoante fosse aplicada mais tarde por Descartes e Fermat nas representações gráficas de equações indeterminadas. A segunda

contribuição se refere à aplicação sistemática da álgebra sincopada aos problemas geométricos. Essa contribuição, segundo Boyer (2012a, p. 62) foi motivada pela tendência do final do século XVI em torno da recuperação dos problemas clássicos e dos desenvolvimentos notáveis em álgebra, a qual tinha impulsionado os matemáticos a “buscarem uma estrada real para a geometria através de técnicas numéricas”.

Desse modo, Viète tinha atacado os problemas de construção geométrica mediante equações determinadas nas quais as raízes forneciam as “medidas possíveis das linhas desconhecidas iniciais”. Boyer (2012a, p. 62) constata que os gregos já tinham usado incógnitas em geometria, mais especificamente, na álgebra geométrica euclidiana e por isso as novidades nas soluções de Viète estavam na aplicação de símbolos literais seguido de regras mecânicas de cálculo, o que tornava mais simples o caminho de solução dessas equações. Esse caminho era validado por Viète através da construção geométrica das raízes.

No entanto, a álgebra geométrica euclidiana não dava conta de construir as raízes das equações de grau superior a dois, e para seguir em frente, Viète teve que recorrer aos métodos antigos de Arquimedes para construir as raízes das cúbicas. O método de interseção de cônicas, por exemplo, relacionava os problemas de construção com o estudo de lugares e por conta disso Boyer (2012a, p. 63) entende que “uma continuação neste sentido quase inevitavelmente teria levado Viète a geometria de coordenadas, justamente como fez Descartes meio século mais tarde”.

Boyer (2012a) entende que a inter-relação da geometria com a álgebra no sentido de Viète não é ainda uma geometria analítica, pois faltava a ideia de coordenadas que não foi trabalhada pelo matemático francês. Na realidade, a aplicação de Viète da álgebra sincopada aos problemas geométricos não incluía aqueles de natureza indeterminada. Além disso, Viète ao aplicar a geometria à álgebra através da construção das raízes das equações algébricas – resultantes dos problemas geométricos determinados – não cogitava a representação gráfica dessas equações num sistema de coordenadas mesmo porque tal cogitação era quase que impensável em virtude da natureza particular dessas equações que continham apenas uma quantidade – nesse caso a incógnita. Na realidade, a atitude de Viète espelhava o interesse da época em torno dos problemas determinados e nessas circunstâncias o “uso de um sistema de coordenadas pode oferecer pouca vantagem” (Boyer, 2012a, p. 64).

A terceira contribuição de Viète ao descobrimento da geometria analítica é resultado da avaliação crítica do imaginário coletivo da época quanto ao método de análise usado pelos gregos para resolver problemas geométricos.

Viète sistematizou essa ideia na sua arte analítica mediante uma divisão radical da antiga análise em três ramos dedicados à nova álgebra que visavam substituir a antiga definição aplicada à geometria. Ele tinha considerado três formas de análise: a zetética que servia para equacionar as propriedades das coisas exigidas em função das coisas que são dadas; a porística que era utilizada para averiguar em termos de uma equação a verdade dos teoremas e a exegética que era apropriada para comprovar a validade de uma equação.

Essa transposição semântica da análise geométrica dos antigos para a análise algébrica dos modernos representava uma evolução conceitual da logística especiosa de Viète e foi essa evolução que produziu uma das matrizes essenciais da geometria analítica. Nem Viète e nem os gregos inventaram a geometria analítica em razão das limitações das suas análises que não levavam em conta, numa única abordagem, as duas matrizes essenciais da geometria analítica, isto é: a ideia de coordenadas e a álgebra simbólica. De qualquer maneira, a contribuição de Viète para o desenvolvimento da geometria analítica foi muito ressaltada por Boyer (2012a, p. 63) na medida em que a arte analítica abriu caminho, respectivamente, para as transições da álgebra sincopada e das manipulações de proporções para a álgebra simbólica e o uso de equações. Essas mutações no estilo de pensamento da matemática moderna tinham se manifestado entre os finais do século XVI e os começos do século XVII.

Nesse período, compreendido entre Viète e Descartes, os analistas publicaram alguns trabalhos na tentativa de restaurar as obras perdidas de Apolônio com base na nova análise algébrica. De todas essas tentativas, a publicação mais significativa para o desenvolvimento da geometria analítica foi a *Apollonius redivivus* de autoria do croata Marino Guethaldi, um discípulo distinguido de Viète que “herdou alguns dos manuscritos do seu mestre e continuou o interesse de Viète em geometria algébrica” (Boyer, 2012a, p. 66).

Os analistas não tinham sido os únicos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria analítica no período entre Viète e Descartes, pois durante aquele tempo surgiram muitas publicações – tais como a *diversarum speculationum* de Benedetti em 1585 e a *álgebra discorsiva numerale et bineare de Cataldi* em 1618 – que privilegiavam a transição das equações retóricas geométricas para as equações simbólicas algébricas. Essas publicações mostram que a circulação inter coletiva de idéias entre os analistas e os outros coletivos foi praticada em razão da própria atmosfera intelectual do período que ficou marcada por um “uso bastante expandido de símbolos, em paralelo com a coordenação da álgebra e geometria” (Boyer, 2012, p. 66).

No entanto, a transição do pensamento sintético para o analítico foi gradual e até a primeira metade do seiscentos, a corrente analista de pensamento, em que pese as suas

realizações originais, não teve grande popularidade entre os geômetras, pois o pensamento sintético dominava os sistemas de opiniões do coletivo de pensamento que estava totalmente centralizado nos Elementos de Euclides que servia de referência para o estudo da geometria e da própria ciência em geral.

No segundo terço do seiscentos, ou mais especificamente na década de 1634 a 1644, ocorreu um preenchimento das lacunas dos métodos antigos de definição de curva mediante a descoberta da geometria analítica por parte de Descartes e Fermat. Esse poderoso instrumento tinha complementado os métodos sintéticos e cinemáticos e ainda permitiu que dentro de um período de doze anos, Fermat e Descartes, de maneira totalmente independente, pudessem descobrir “mais novas curvas (ou lugares) do que tinha sido descoberto na história inteira da matemática até aquele momento” (Boyer, 2012a, p. 72). Boyer (2012a, p. 69) entende que a descoberta da geometria analítica se deve mais aos desenvolvimentos da álgebra do que propriamente da geometria e entre 1629 e 1631 ele localiza alguns trabalhos nessa direção – como a *Invention nouvelle en l’algèbre* de Girard (1595-1632) e a *Artis Analyticae Praxis de Harriot* (1560-1621) – que influenciaram o método cartesiano de Descartes com respeito às abreviações da linguagem da álgebra simbólica.

Se por um lado, a linguagem da Geometria de Descartes tinha sido nitidamente influenciada por essa tendência em torno do simbolismo da álgebra. Por outro, a Introdução de Fermat mostrou que a terminologia quase-simbólica de Viète e o próprio princípio da homogeneidade não tinham impedido o desenvolvimento da geometria de coordenadas. Portanto, Fermat mesmo com uma linguagem não tanto desenvolvida quanto a de Descartes, conseguiu alcançar a mesma descoberta do sábio de *La Flèche*.

Após 13 séculos, a geometria analítica finalmente emergiu quando René Descartes resolveu o problema de Pappus através da análise algébrica de François Viète. Os matemáticos gregos que sucederam Pappus, tanto na escola de Alexandria quanto na academia de Atenas, não alcançaram resultados expressivos, mas mantiveram a tradição pappusiana de comentar as principais obras gregas e continuaram a reverenciar o estilo de pensamento predominante.

2.2 A (RE)DESCOBERTA DA GEOMETRIA ANALÍTICA POR DESCARTES E FERMAT

Ao longo do século XVII, o conhecimento matemático apresentou-se como um misto de atividades praticadas por diferentes coletivos que conservavam os seus próprios valores, métodos e objetivos acerca dessa ciência. Cada um desses coletivos tinha as suas próprias

perspectivas acerca da natureza da matemática que se refletiam nas suas práticas sociais – orientadas em termos culturais por um estilo de pensamento.

A fragmentação da matemática seiscentista é uma consequência da estrutura curricular do cenário universitário da modernidade que valorizava apenas a medicina, a teologia e o direito como profissões admissíveis para os estudantes. Sem status de uma profissão, a matemática favoreceu a existência de concepções diferentes acerca da sua constituição, pois não havia um comunicado universitário oficial para unificá-la em métodos e objetivos bem traçados. Desse modo, o desenvolvimento da matemática seiscentista se instalou fora da universidade e as grandes descobertas que surgiram nessa época foram realizações de autodidatas (Malta, 2015), que registravam suas descobertas por correspondências (cartas) trocadas entre si.

O padre Mersenne (1588-1648) foi o grande agente dessas circulações postais na França. Ele mantinha contato com grande parte dos autodidatas da época mediante correspondências e reuniões numa busca insaciável de socializar resultados, teoremas e teorias que chegavam até as suas mãos. Os trabalhos de Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) referentes à geometria analítica tornaram-se públicos graças ao esforço de Mersenne em espalhar as suas idéias ao coletivo parisiense a qual ele fundara.

Em 1637, Fermat anuncia, e envia, ao padre Mersenne, um manuscrito intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos* – fruto das suas pesquisas em Bordéus a partir de 1629 que estavam conectadas a sua reconstrução dos Lugares Planos de Apolônio – em que ele apresenta uma teoria geral sobre lugares geométricos que não desenrola os seus desafios anteriores, mas apresenta a sua visão crítica acerca do estilo de pensamento da matemática da época. Nesse pequeno opúsculo ele comprova que todas as cônicas estudadas por Menaecmo e Apolônio na antiguidade, poderiam ser descritas de uma forma mais simplificada que envolveria equações indeterminadas estudadas em sua gênese por Diofanto (Abreu *et al.*, 2020).

Figura 6 - Retrato estimado de René Descartes



Fonte: Quadros (2023)

Aproximadamente ao mesmo tempo, Descartes organizava para serem editadas as provas de granel do seu Discurso do método, que compreendia três apêndices, dentre os quais se encontrava a obra *A Geometria*. Ambos os tratados, *Introdução* e *Geometria* haviam apresentado o princípio fundamental da geometria analítica – a constatação de uma relação mútua entre equações indeterminadas e curvas – e as técnicas apresentadas pelos autores para tratar problemas geométricos à maneira algébrica eram semelhantes (Abreu *et al.*, 2020).

Portanto, Descartes e Fermat foram os precursores da geometria analítica, e em razão disso não se discutirá aqui a prioridade da sua descoberta, mas a inter-relação de circunstâncias que motivaram a mesma, pois “mais importante para o historiador é a questão da simultaneidade, já que ela revela a existência de um contexto de problemas e ferramentas comuns.” (Roque, 2012, p. 332). No início do século XVII, a matemática – em especial a geometria – estava ainda impregnada à metodologia euclidiana que se apoiava num estilo sintético de exposição, que submetia os problemas a um verdadeiro esboço excessivo de figuras, exigindo em cada situação, uma nova inspiração para o encontro das soluções. Tal dificuldade no tratamento das soluções dos problemas não agradava a esses pensadores, logo:

Para Descartes, as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de convencer e estabelecer uma certeza; deviam, sobretudo, esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-lo. Por isso ele rejeitava a demonstração por absurdo. (Roque, 2012, p. 318).

Sendo assim, era preciso descobrir um método que pudesse assegurar não só a rigorosa demonstração dos resultados, como também o descobrimento dos mesmos. Assim, tinha sugerido Fermat no preâmbulo da Introdução:

Que os antigos haviam tratado amplamente sobre os lugares não se pode duvidar; o sabemos por Pappus, que na introdução do livro VII, testemunha que Apolônio havia escrito sobre os lugares planos e Aristeu sobre os lugares sólidos, mas se não nos enganamos, a investigação sobre os lugares não o resultava nada fácil, o que conjecturamos com base no fato de que para um grande número de lugares fracassaram em estabelecer o problema de maneira geral. Submetemos, portanto, essa teoria a uma análise que é própria e particular, e que abre o caminho geral para investigação dos lugares. (Fermat, 1891/1912, p. 85).

Na realidade, a Geometria de Descartes foi publicada com o objetivo de aplicar o seu novo método nas Matemáticas, isto é, a álgebra dos modernos e a análise geométrica dos antigos, a primeira tinha evoluído da sua antiga linguagem retórica e se encontrava agora numa forma sincopada que mesclava aspectos simbólicos com aspectos retóricos, no entanto ela estava ainda atrelada “a determinadas regras e cifras que se fez dela uma arte confusa e obscura que atrapalha o espírito, em vez de uma ciência que o cultiva. [...]” (Descartes, 2000, p. 49). A análise geométrica por sua vez, estava “tão ligada à consideração das figuras que não pode propiciar a compreensão sem cansar muito a imaginação” (*Idem, Ibidem*). Portanto, era necessário reconstruir as matemáticas, tanto a álgebra dos modernos quanto a análise geométrica dos antigos mediante um novo método.

Desse modo, ao associar a álgebra dos modernos com a geometria dos antigos, mediante um programa de reformulação da notação sincopada e da metodologia sintética aplicado em sua Geometria, Descartes dá início a criação de uma ferramenta ancorada em sua álgebra simbólica que soluciona impecavelmente os problemas geométricos dos antigos, dentre eles o problema de Pappus – donde ele estabelece um sistema de coordenadas incipiente – e especialmente o problema da normal a uma curva, no qual ele estabelece, ainda que de forma indireta, o princípio fundamental da geometria analítica, segundo o qual: “[...] no que diz respeito a todas as outras propriedades que se podem atribuir às linhas curvas, elas só dependem das grandezas dos ângulos que fazem com algumas outras linhas.” (Descartes, 2010, p. 521-22). Conforme explica Boyer (2012a, p. 94) esta afirmação de Descartes dá a entender que “as propriedades são determinadas pela equação de uma curva”.

De acordo com Katz (2010, p. 549), tanto Fermat quanto Descartes tinham o interesse mútuo em “redescobrir as técnicas gregas perdidas da análise” e como tinham “estudado os trabalhos de Viète e via neles a chave para compreensão da análise dos gregos”. Descartes e

Fermat decidiram aplicar a mecânica algorítmica da álgebra simbólica de Viète aos problemas geométricos de Apolônio e Pappus que envolviam equações indeterminadas, obtendo, assim, resultados satisfatórios expressos num sistema incipiente de coordenadas. Dessa forma, a Arte analítica de Viète foi à ferramenta usada por Descartes e Fermat na recriação da via inventiva da análise geométrica dos gregos, propiciando a descoberta da geometria analítica mediante a consequente resolução dos problemas geométricos por meio da síntese algébrica. Portanto, ao que tudo indica, a geometria analítica foi descoberta de maneira independente, tanto por Descartes, que publicou a sua Geometria em 1637, como por Fermat, em escritos precedentes, mas não publicados. Isso nos leva a deduzir que os dois pensadores possuem méritos especiais, o primeiro com relação à ordem da publicação, o segundo a do tempo.

Embora a Introdução e a Geometria tivessem como fundamento as idéias da Arte analítica, Boyer (2012a, p. 74) considera que as geometrias de Fermat e Descartes deram continuidade às ideias viëtianas em direções um pouco diferentes. Assim, Fermat tinha conservado a linguagem sincopada do seu mestre, mas ele decidiu empregá-la em uma nova conexão que foi o estudo de lugares geométricos. Descartes, por seu turno, seguiu o caminho da Arte analítica que era a construção geométrica das raízes das equações algébricas, mas ele deu seguimento a esse caminho com o auxílio do simbolismo algébrico moderno divulgado em tratados de álgebra posteriores a Arte analítica.

De fato, na virada do século XVI para o XVII, os avanços consecutivos em álgebra criaram condições favoráveis para a intervenção do pensamento analítico na constituição das matemáticas, em particular na geometria. Mesmo assim, o pensamento sintético ainda conservava, até então, a sua condição epistemológica privilegiada no imaginário coletivo da época. Dessa forma, os principais tratados geométricos publicados no século XVII davam particular importância às construções geométricas na medida em que elas eram indispensáveis na validação das soluções algébricas – dos problemas determinados – alcançadas por meio de equações. Em compensação, esses mesmos tratados, mostravam que o método analítico era tão eficiente quanto o sintético para resolver os problemas clássicos da geometria. Além do mais, as restaurações dos tratados perdidos da geometria grega em termos da linguagem algébrica, realizadas pelos matemáticos seiscentistas, muitos dos quais eram discípulos de Viète, revelavam ao imaginário coletivo a possibilidade de aplicar o método analítico na solução dos problemas indeterminados. (Malta, 2015, p. 58).

Duas personalidades que compreenderam melhor essas possibilidades foram Descartes (embora este não se considerasse discípulo de Viète) e Fermat (discípulo assumido de Viète), que de forma praticamente simultânea e independente, decidiram implantar o método analítico na solução dos problemas indeterminados – que até então não atraíam muito a atenção do imaginário coletivo – o que acarretou, por volta da terceira década do seiscentos, na descoberta

daquilo “que hoje é denominado geometria analítica e que consiste no estudo da geometria por meio de equações” (Garbi, 2010, p. 63).

Descartes e Fermat tinham de fato, condições de desenvolver uma nova geometria porque o clima do momento estava indicando esta direção. Duas mentes privilegiadas, guiadas pelo interesse particular na solução analítica de um dado problema indeterminado – Descartes resolveu o problema de Pappus e Fermat o de Apolônio – puderam então assimilar os resultados apresentados e desenvolver os seus estudos naquele momento. No entanto, as inovações em tais estudos, face ao conhecimento matemático empregado na época, não podem ser superestimadas na medida em que o processo de conhecimento não é apenas fruto de uma mente talentosa, mas antes “o resultado de uma atividade social, uma vez que o respectivo estado do saber ultrapassa os limites dados a um indivíduo” (Fleck, 2010, p. 81-82). Nesse sentido, as geometrias de Descartes e Fermat devem ser analisadas como um resultado em meio às possibilidades da atividade matemática da época.

O surgimento da nova geometria comprova que os conceitos e as técnicas de Euclides – compartilhados até então pelo coletivo de pensamento seiscentista – não eram rígidos e as suas transformações executadas por Descartes e Fermat mostram também que não há necessariamente um acúmulo de conhecimento no desenvolvimento das matemáticas, mas sim uma substituição de pressupostos como defendia Fleck. Essas substituições, evidentemente, não foram repentinas, mas graduais, afinal de contas, a influência da tradição dominava os sistemas de opiniões dos círculos científicos da modernidade. Desse modo, tanto Descartes quanto Fermat tiveram dificuldades para que suas idéias fossem assimiladas pelo coletivo de pensamento (Eves, 2011).

A inovação notacional de Descartes – que propunha o abandono da forma homogênea de expressão juntamente com os resquícios de abreviações descritivas presentes na linguagem algébrica dos discípulos de Viète – foi criticada naturalmente por Fermat. Boyer (2012a) entende que para Fermat, a notação era uma questão puramente convencional e a expressão de uma ideia matemática bem elaborada não estava sujeita a sua linguagem, mas a seu conteúdo. Fermat, porém não compreendeu o lucro operacional – em termos mecânicos e algorítmicos – que se ganhava em utilizar uma linguagem puramente simbólica que proporcionava simplificação, generalidade e flexibilidade ao encadeamento das idéias matemáticas. Nesse aspecto, Descartes o superou, e a aceitabilidade da notação cartesiana por parte da comunidade matemática foi um fator fundamental para o crescimento do capital simbólico do sábio de *La Flèche*. Descartes, de fato tinha muito prestígio no círculo de Mersenne em virtude de ter

estudado na Escola de *La Flèche*, por isso suas aspirações científicas eram mais ousadas que as de Fermat.

2.3 GEOMETRIA ANALÍTICA NA CONTEMPORANEIDADE

Dentre todas as vertentes da matemática, a geometria tem sido a mais sujeito a mudanças de gosto, de uma época para outra. Na Grécia clássica, subiu ao zênite, para cair ao nadir ao tempo da queda de Roma. Tinha recuperado parte do terreno perdido na Arábia e na Europa da Renascença. No século dezessete esteve no limiar de uma nova era, mas novamente foi esquecida, ao menos pelos pesquisadores em matemática, por mais dois séculos, permanecendo à sombra dos ramos prolíficos da nova análise. A Inglaterra, especialmente durante o fim do século dezoito, travara uma batalha perdida para devolver a “Os elementos de Euclides”, sua posição outrora gloriosa, mas pouco fizera para desenvolver a pesquisa no assunto (Malta, 2015).

O conhecimento sobre geometria perpassa por diferentes períodos de construção deste ramo da matemática. Inicia pela Escola de Monge, passa pela geometria projetiva de Poncelet e Charles; chega à geometria sintética métrica de Steiner e à geometria sintética não métrica de Van Staud; até culminar na geometria analítica. No tocante à Escola de Monge, constata-se que:

Através dos esforços de Monge e Carnot houve alguns sintomas de reavivamento da geometria pura durante o período da Revolução Francesa, mas a redescoberta quase explosiva da geometria como um ramo vivo da matemática veio principalmente no início do século dezenove. Como podia ser previsto, os estudantes de Monge na *École Polytechnique* fizeram contribuições significativas ao novo movimento geométrico. Refletindo a natureza múltipla da pesquisa de seu professor, alguns seguiram a área de aplicação da geometria à engenharia, alguns à pedagogia, alguns à física; muitos estudaram o assunto por seu interesse intrínseco. (Boyer, 2012b, p. 357).

Pelo método de Monge, uma figura do espaço tridimensional é estudada por meio de suas projeções nos planos do diedro. Sendo esses planos rebatidos um sobre o outro pela rotação de um deles em torno de sua interseção (chamada linha de terra), as projeções aparecem desenhadas num só plano, chamado *épura*. Essa concepção reduziu a um pequeno número de princípios abstratos e invariáveis todas as operações geométricas que aparecem nas representações usuais de interseção de plano com plano, de superfícies cilíndricas com esféricas, cônicas etc., na perspectiva, nos desenhos técnicos, no estudo de sombras e demais representações gráficas. Entre os discípulos e continuadores de Monge estão J. D. Gergonne, Brianchon, Carnot e Poncelet (Roque, 2012).

A geometria projetiva de Poncelet e Chasles possui fundamento na formalização matemática dos conceitos de ponto de fuga e perspectiva de Desargues. O francês Jean Victor Poncelet (1788-1867) era prisioneiro de guerra num confronto militar entre França e Rússia, e sem ter nenhum livro de referência em mãos, criou sua grande obra sobre a geometria projetiva, publicada em 1822, com o título “Tratado das propriedades projetivas das figuras”, tornando - se assim conhecido como “o pai da Geometria Projetiva” (Malta, 2015).

A geometria projetiva fornece a indispensável base teórica para o entendimento da perspectiva utilizada pelos renascentistas. Para tal teoria as dimensões reais e as propriedades métricas dos objetos em questão têm pouco valor, o importante é conhecer as propriedades visuais das figuras consideradas. A nova geometria, visando criar tais regras empíricas, negligenciou, então, as velhas propriedades dos “Elementos” de Euclides e concentrou o interesse nas propriedades visuais da figura. Assim, pode-se afirmar que, enquanto a geometria euclidiana se preocupa com o mundo em que se vive, a geometria projetiva lida com o mundo que se vê (Malta, 2015).

A obra de Poncelet foi continuada por Michel Chasles (1798- 1880), professor de tecnologia de máquinas em 1841, e que a partir de 1846 teve a cadeira de geometria na Sorbonne. A Chasles se deve a ênfase à geometria projetiva, sobre as seis razões duplas de quatro pontos lineares ou quatro retas concorrentes, e a invariância dessas razões sob transformações projetivas. Chasles é considerado um dos últimos geômetras conhecido na França (Boyer, 2012b).

A geometria pura, também chamada de geometria sintética, é um ramo da matemática que se encarrega de estudar e construir através de um tratamento lógico-dedutivo as formas e os lugares geométricos através das relações e propriedades geométricas sem fazer o uso de sistema de coordenadas (Dias; Grimberg, 2015).

Através da geometria sintética métrica, Steiner abordou problemas de máximo e mínimo, emprestando seu nome em muitos lugares da geometria como a solução e generalização de Steiner do problema de Malfati, as cadeias de Steiner, o prisma de Steiner e os pontos de Steiner da configuração do hexágono místico. Considerado o maior geômetra desde Apolônio, Steiner possuía um poder incrível para o tratamento sintético da geometria, escreveu tratados do mais alto padrão, depreciava o método analítico por considera-lo uma muleta para os espíritos menos dotados.

A geometria sintética não métrica desenvolvida por von Staudt baseou-se em considerações métricas e “[...] foi muito importante ao mostrar como uma geometria projetiva podia ser estabelecida sem o conceito de distância, abrindo, assim, caminho para a ideia de se

ter uma geometria não métrica, em que a noção de distância podia ser apenas definida”. (Boyer, 2012b, p. 361).

A Geometria Analítica tem Julius Plücker como o primeiro especialista em geometria em particular, contudo, não foi compreendido em suas fundamentações migrando para a Física. Um dos objetivos desse ramo da matemática é fazer uma conexão entre fatos geométricos e as relações algébricas. A base da Geometria Analítica está relacionada aos Teoremas de Tales e de Pitágoras, pois é possível demonstrar as fórmulas dessa geometria (Boyer, 2012b).

Avalia-se que a Geometria Analítica é o ramo da matemática que surge unindo elementos da Geometria Plana com a Álgebra. Ao relacionar Geometria com a Álgebra, a Geometria Analítica permite que os problemas de Geometria sejam tratados a partir de procedimentos algébricos que permitem identificar pontos específicos, intersecções entre objetos geométricos, como as órbitas no espaço. Álgebra em articulação com a Geometria surge no estudo das funções, dos sistemas lineares. Além de ser essencial no estudo de várias áreas aplicadas e do conhecimento como: problemas de otimização, problemas da mecânica celeste, problemas das engenharias, dentre outras situações (Malta, 2015).

A geometria analítica tem como desvantagem o fato dos métodos analíticos perderem a facilidade do processo quando o sistema de coordenadas não é escolhido adequadamente, podendo ocasionar em excessivos cálculos algébricos. Outra desvantagem ocorre quando do não uso das notações abreviadas, as expressões se tornarem longas demais. Os estudos proporcionados pela Geometria Analítica envolvem coordenadas, assim, os objetos geométricos são relacionados a sistemas de coordenadas e equações que são analisadas algebricamente. Essa interação expande as possibilidades e os resultados da Geometria Plana e Espacial, permitindo a exploração de novas ferramentas matemáticas (Roque, 2012).

A Geometria Analítica é o tratamento algébrico para estudo da Geometria Plana e Espacial em que os elementos geométricos são associados a pontos no espaço cartesiano e as distâncias são determinadas pelas respectivas coordenadas. As fórmulas de distância entre pontos e as equações da reta são expressões muito utilizadas na Geometria Analítica. Nesse sentido, alguns dos principais conceitos trabalhados na Geometria Analítica envolvem coordenadas cartesianas, vetores, equação da reta, equação da circunferência e cônicas (Malta, 2015).

3 METODOLOGIA

Este trabalho será conduzido através de uma revisão de literatura criteriosa. A pesquisa bibliográfica será estruturada em várias etapas para uma compreensão abrangente e sistemática do tema.

Inicialmente, a introdução contextualizará a importância da geometria analítica ao longo da história, explicitando as diversas contribuições para o desenvolvimento do que conhecemos atualmente, a fim de oferecer um panorama mais atual já registrado.

Posteriormente, formalizaremos as relações entre conceitos, ideias e algumas características da geometria analítica. Em seguida, serão mostradas as aplicações da geometria analítica em diversos campos, como física, engenharia, entre outros.

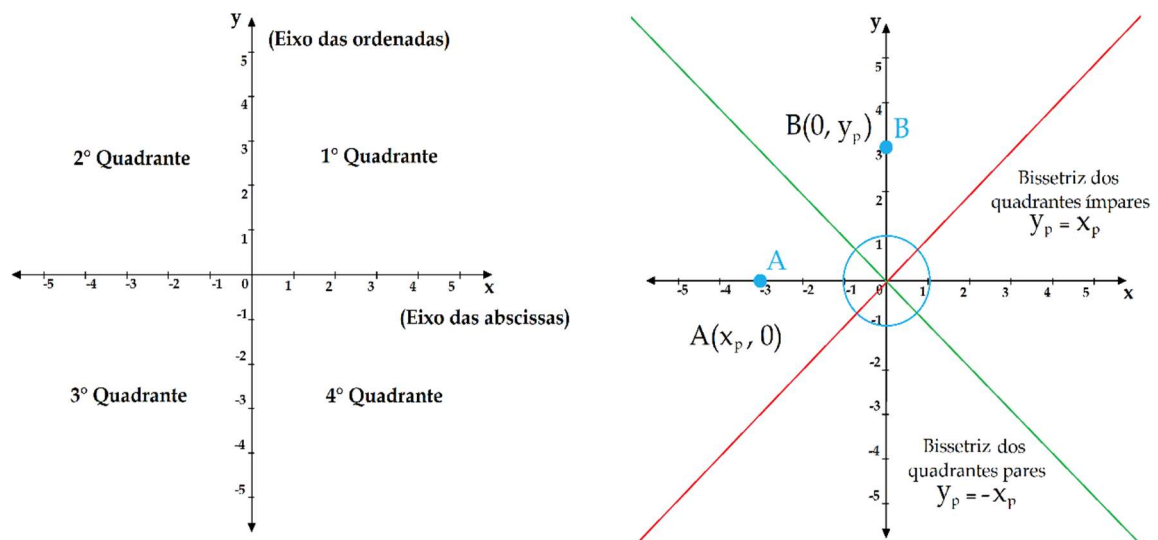
A discussão e conclusão do TCC enfatizarão a relevância das aplicações da geometria analítica nas áreas analisadas, resumindo de forma concisa as principais descobertas. Também serão feitas recomendações para pesquisas futuras ou possíveis aplicações com base nos resultados obtidos.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

A ideia de coordenadas já era bastante mencionada ao longo da história antiga e bem difundida entre os egípcios e romanos. Contudo, esse campo da matemática teve seus elementos organizadamente ordenados no século XVII, com os trabalhos de René Descartes e Pierre de Fermat. O Sistema Cartesiano Ortogonal é uma base de referência para localização de coordenadas. É constituído, em um plano, por dois eixos perpendiculares entre si. (ASTH, 2023).

Figura 7 – Plano cartesiano com alguns conceitos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.1.1 Ponto no plano cartesiano

Um ponto qualquer no plano possui a coordenada $P(x, y)$, onde x é denominada a abscissa do ponto P e constitui a distância entre sua projeção ortogonal no eixo x até a origem $O(0,0)$ e y é a ordenada do ponto P e constitui a distância entre sua projeção ortogonal no eixo y até a origem (ASTH, 2023).

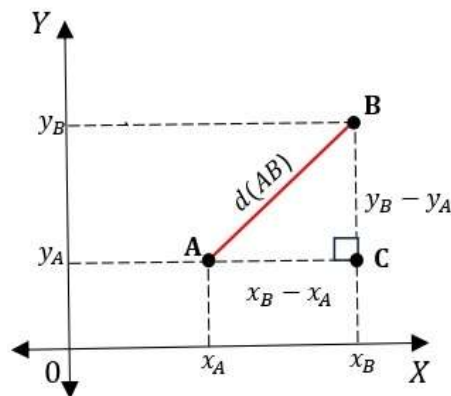
4.1.2 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos A e B, a distância entre eles é a medida de \overline{AB} dada em certa unidade de medida de comprimento. A distância entre esses pontos é indicada por $d(A, B)$

ou AB . Em um plano cartesiano é possível calcular a distância entre dois pontos por meio de uma expressão. Observe.

Considere no plano cartesiano abaixo os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, de maneira que \overline{AB} não seja paralelo a nenhum dos eixos. Nesse plano, a distância entre os pontos A e B corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, em que: $d(A, C) = (x_B - x_A)$ e $d(B, C) = (y_B - y_A)$, em valores absolutos.

Figura 7 – Distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

De acordo com o teorema de Pitágoras:

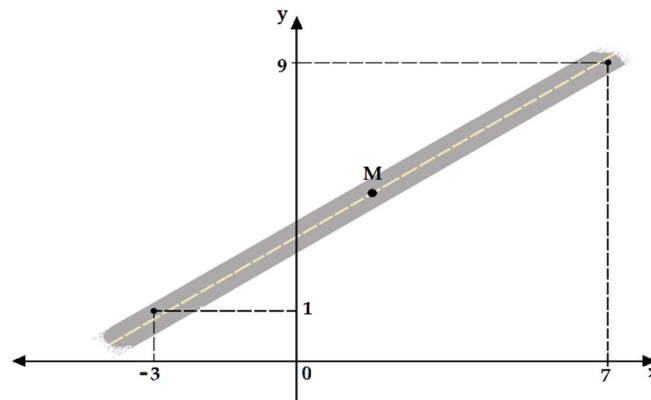
$$[d(A, B)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

4.1.3 Ponto médio de um segmento

Suponhamos que num trecho em linha reta de uma estrada será instalada uma placa equidistante das extremidades. Representando em um plano cartesiano as extremidades do trecho da estrada pelos pontos A e B, e o local onde a placa será instalada pelo ponto M, temos:

Figura 8 – Ponto médio em uma pista.

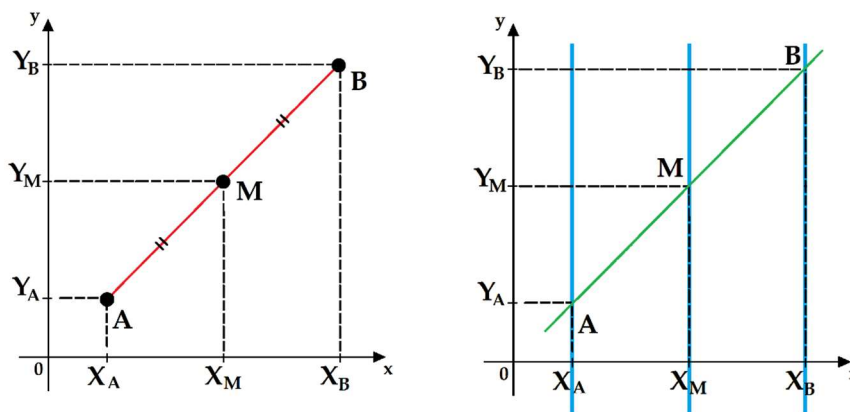


Fonte: Andrade (2020)

Quais devem ser as coordenadas do ponto M em que a placa será instalada?

Dados dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, podemos obter o ponto médio de \overline{AB} , cujas coordenadas são $M(x_M, y_M)$.

Figura 9 – Determinando o ponto médio.



Fonte: Andrade (2020)

De acordo com o teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{(x_M - x_A)}{(x_B - x_M)} \Leftrightarrow 1 = \frac{(x_M - x_A)}{(x_B - x_M)} \Leftrightarrow (x_B - x_M) = (x_M - x_A) \Leftrightarrow 2x_M = x_B + x_A$$

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{(y_M - y_A)}{(y_B - y_M)} \Leftrightarrow 1 = \frac{(y_M - y_A)}{(y_B - y_M)} \Leftrightarrow (y_B - y_M) = (y_M - y_A) \Leftrightarrow 2y_M = y_B + y_A$$

$$y_M = \frac{y_B + y_A}{2}$$

Assim, podemos concluir que a abscissa e a ordenada do ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento de extremidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são, respectivamente, a média aritmética das abscissas e das ordenadas dos pontos A e B, isto é:

$$M = \left(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2} \right)$$

Em relação ao problema apresentado, as coordenadas do ponto M em que a placa será instalada são dadas por:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{9 + 1}{2} = 5$$

Portanto, $M(2, 5)$.

4.1.4 Função

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ (IEZZI, 2004).

$$f \text{ é aplicação de A em B} \rightarrow \{\forall x \in A, \exists! y \in B \mid (x, y) \in f\}$$

4.1.5 Função polinomial

É função polinomial quando sua lei de formação pode ser descrita por um polinômio. Existem diferentes tipos de função polinomial, que podem ser classificadas de acordo com o grau do polinômio que descreve sua lei de formação. Por exemplo, quando o polinômio da lei de formação possui grau 1, a função é conhecida como função polinomial de grau 1, ou função afim; quando possui grau 2, a função é chamada de função polinomial de grau 2.

Exemplo: $f(x) = x + 5$ (1º grau); $g(x) = x^2 + 8x + 6$ (2º grau).

O valor numérico de uma função polinomial é encontrado quando substituímos a variável por um valor numérico, para, assim, encontrarmos um valor numérico para a função. Toda função polinomial pode ser representada no plano cartesiano, e o comportamento da função depende diretamente do grau do polinômio.

A lei geral de formação de uma função de grau n é:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, essa função é definida como polinomial de grau n quando a sua lei de formação é instituída por um polinômio de grau n .

- ✓ $x \rightarrow$ variável independente da função;
- ✓ $n \rightarrow$ grau da função (formado sempre por um número natural);
- ✓ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ e $a_0 \rightarrow$ coeficientes da função, pertencentes ao conjunto dos números reais, em que $a_n \neq 0$.

4.1.6 Função polinomial de grau 1

É uma função em que a lei de formação é um polinômio que possui grau 1. E cujo gráfico sempre será uma reta.

Particularizando os gráficos desta função evidenciaremos os quatro casos particulares que a ela se relaciona.

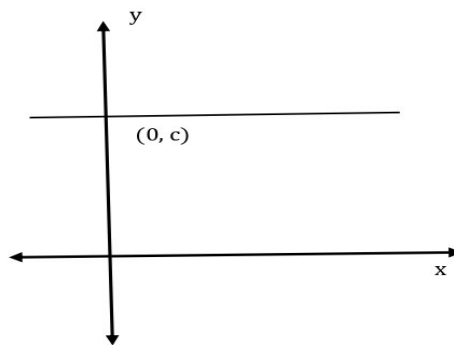
I. Função constante: uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , recebe o nome de função constante quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$, isto é:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto c$$

O gráfico da função constante é paralelo ao eixo dos x passando pelo ponto $(0, c)$. A imagem é o conjunto $\text{Im} = \{c\}$.

Figura 10 – Gráfico da Função Constante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

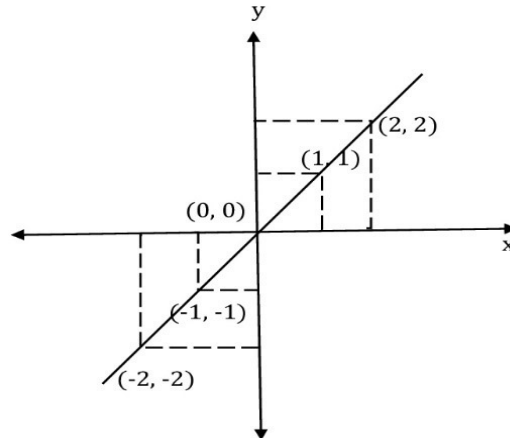
II. Função identidade: uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , recebe o nome de função identidade quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x , isto é:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes. A imagem é $\text{Im} = \mathbb{R}$.

Figura 11 – Gráfico da Função Identidade.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

III. Função linear: uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , recebe o nome de função linear quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

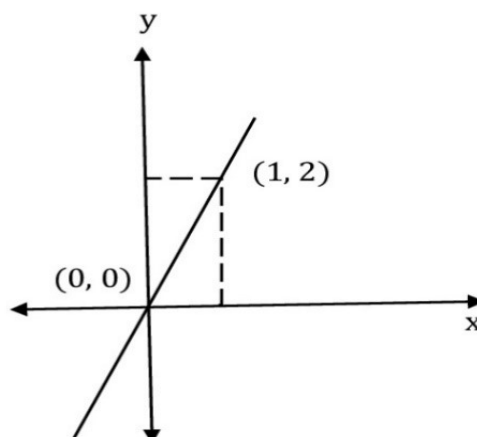
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax, a \neq 0 (*)$$

*Demonstra-se que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem. A imagem é $\text{Im} = \mathbb{R}$. De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que:

$$f(x) = f\left(\frac{y}{a}\right) = a \cdot \frac{y}{a} = y$$

Figura 12 – Gráfico da Função Linear.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

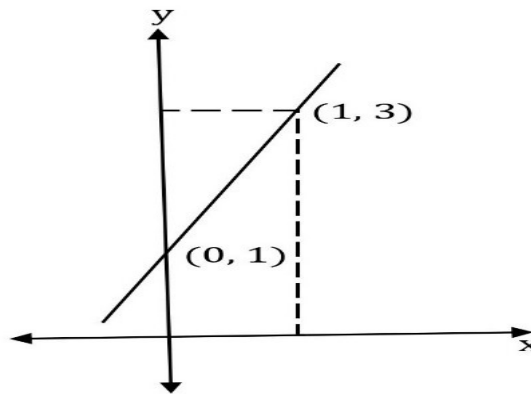
IV. Função afim: uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de função afim quando cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, isto é:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b, a \neq 0$$

Notemos que para $b = 0$ a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$, podemos então dizer que a função linear é uma particular função afim.

Figura 13 – Gráfico da Função Afim



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.1.7 Função polinomial de grau 2

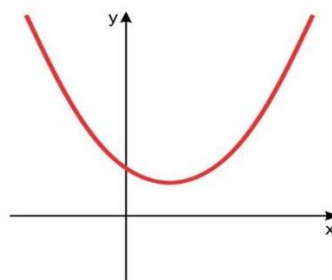
É uma função em que sua lei de formação é um polinômio que possui grau 2 (Mundo Educação, 2023). O gráfico dessa função, que é sempre uma parábola, demonstraremos mais adiante. Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de função polinomial de grau 2, ou do 2º Grau quando associa $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$.

$$\text{Isto é } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

O gráfico de uma função polinomial de grau 2 é uma parábola

Figura 14 – Gráfico da função polinomial de grau 2



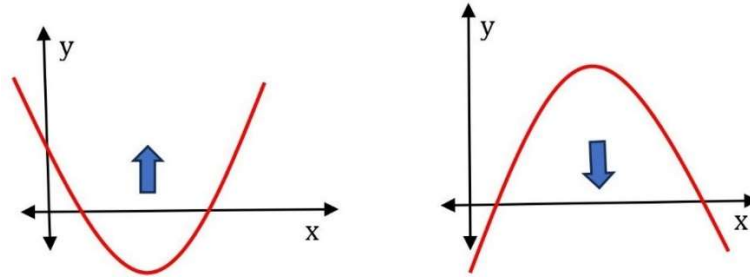
Fonte: Mundo Educação (2023)

Concavidade – A parábola representativa da função polinomial de grau 2,

$$y = ax^2 + bx + c$$

pode ter a concavidade voltada para cima ou voltada para baixo. Se $a > 0$, a concavidade voltada para cima, para $a < 0$, a concavidade fica voltada para baixo

Figura 15 – Concavidades da função polinomial de grau 2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Forma canônica – A transformação da função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma canônica é de grande valia para os casos em que, em determinadas funções polinomiais do grau 2 os valores da abscissa (os valores de x), onde a parábola intercepta o eixo dos x ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada; não são inteiros.

Para isso, faz-se necessário iniciar um estudo analítico, mais detalhado da função quadrática, transformá-la em outra forma mais conveniente a esta análise (forma canônica).

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Considerando $b^2 - 4ac$ por Δ , também conhecido por discriminante do trinômio do segundo grau temos a forma canônica.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Zeros – são raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ cujos valores de x são reais tais que $f(x) = 0$, e, portanto, as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Aplicando a forma canônica temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Máximo e mínimo – Sendo $y_M \in \text{Im}(f)$ ($Y_m \in \text{Im}(f)$), dizemos que é o valor de máximo (mínimo) da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ ($y_m \leq y$) para qualquer $y \in \text{Im}(f)$ e o valor de $x_M \in D(f)$ ($x_m \in D(f)$) tal que $y_M = f(x_M)$ ($y_m = f(x_m)$) é chamado de ponto de máximo (mínimo) da função.

Teorema:

A função polinomial de grau 2, $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor máximo (mínimo) $y = -\frac{\Delta}{4a}$ em $x = -\frac{b}{2a}$ se, e somente se, $a < 0$ ($a > 0$).

Vértice da Parábola – O ponto $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ é conhecido como vértice da parábola da função polinomial do grau 2.

Imagem – Tomemos novamente a função polinomial de grau 2 em sua forma canônica:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Ou seja:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Temos que: $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ para todo e qualquer $x \in \mathbb{R}$. Assim é preciso considerar dois casos.

1º caso:

$a > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ e, portanto:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

2º caso:

$a < 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \leq 0$ e, portanto:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Poderíamos, ainda, abordar algumas outras características da função polinomial de grau 2, a saber, eixo de simetria, gráficos, sinal, dentre outras, porém como não se trata do cerne deste trabalho, seguiremos adiante.

4.1.8 Relações trigonométricas

A Trigonometria, é o estudo da matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Nos triângulos retângulos (possuem um ângulo de 90°), as relações constituem os chamados ângulos notáveis, 30°, 45° e 60° (não somente estes), que possuem valores constantes representados pelas relações seno, cosseno e tangente.

Figura 16 - Tabela de razões trigonométricas (notáveis).

α	30°	45°	60°
$\text{sen } \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{cos } \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg } \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para cada $x \neq \frac{k\pi}{2}$ é definido $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\text{tg } x$, $\text{cotg } x$, $\text{sec } x$ e $\text{cossec } x$. É possível demonstrar que esses seis números guardam entre si certas relações denominadas relações fundamentais. Mais ainda, pode-se mostrar que a partir de um deles sempre é possível calcular os outros cinco (Iezzi, 2004).

4.1.9 Relações fundamentais da trigonometria:

Teorema: Para todo x real vale a relação:

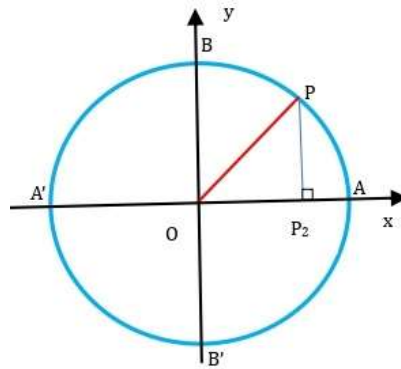
$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

Demonstração:

a) Se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B'. Então existe o triângulo OP_2P retângulo, portanto:

$$\begin{aligned} |\overline{OP_2}|^2 + |\overline{P_2P}|^2 &= |\overline{OP}|^2 \\ \text{cos}^2 x + \text{sen}^2 x &= 1 \end{aligned}$$

Figura 16 – Cosseno no Ciclo Trigonométrico com raio 1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

b) Se $x = \frac{k\pi}{2}$, pode-se verificar na tabela a seguir:

x	$\text{sen } x$	$\cos x$	$\cos^2 x + \text{sen}^2 x$
0	0	1	1
π	1	0	1
$\frac{\pi}{2}$	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1

Teorema: Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ vale a relação:

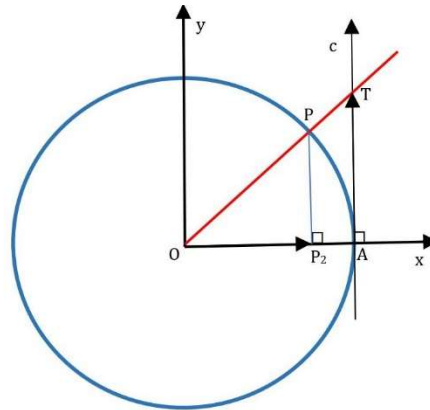
$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}$$

Demonstração

a) Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B'. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta OAT &\sim \Delta OP_2P \\ \frac{|AT|}{|OA|} &= \frac{|P_2P|}{|OP_2|} \\ | \text{tg } x | &= \frac{|\text{sen } x|}{|\cos x|} \end{aligned}$$

Figura 17 – Tangente no Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Utilizando o quadro de sinais abaixo, pode-se observar que o sinal da $tg x$ é igual ao do quociente $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$.

Quadrante	Sinal de $tg x$	Sinal de $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

b) Se $x = k\pi$, temos:

$$tg x = 0 = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

Teorema: Para todo x real, $x \neq k\pi$ vale a relação:

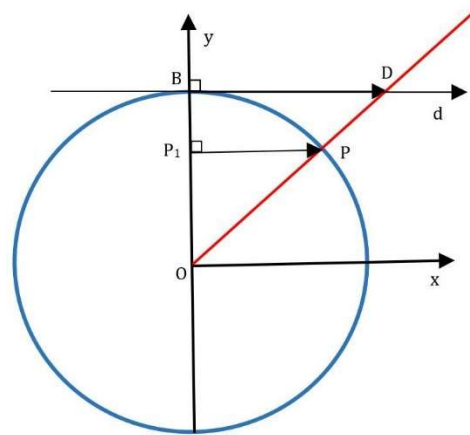
$$\text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$$

Demonstração

a) Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B'. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \triangle OBD &\sim \triangle OP_1P \\ \frac{|BD|}{|OB|} &= \frac{|P_1P|}{|OP_1|} \\ | \text{cotg } x | &= \frac{| \text{cos } x |}{| \text{sen } x |} \end{aligned}$$

Figura 18 – Cotangente no Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Utilizando o quadro de sinais abaixo, pode-se observar que o sinal da $\cotg x$ é igual ao do quociente $\frac{\cos x}{\sin x}$.

Quadrante	Sinal de $\cotg x$	Sinal de $\frac{\cos x}{\sin x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

b) Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos:

$$\cotg x = 0 = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Teorema: Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ vale a relação:

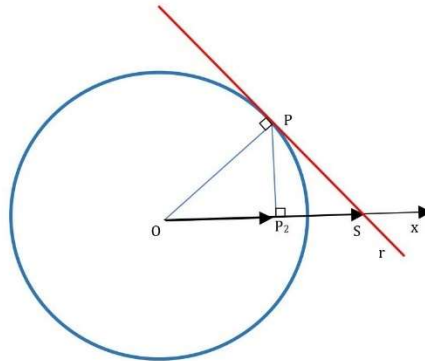
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Demonstração

a) Se $x \neq k\pi$ a imagem de x é distinta de A, B, A' e B'. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta OPS &\sim \Delta OP_2P \\ \frac{|OS|}{|OP|} &= \frac{|OP|}{|OP_2|} \\ | \sec x | &= \frac{1}{| \cos x |} \end{aligned}$$

Figura 19 – Secante no Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Utilizando o quadro de sinais abaixo, pode-se observar que o sinal da $\sec x$ é igual ao sinal de $\cos x$.

Quadrante	Sinal de $\sec x$	Sinal de $\cos x$
1º	+	+
2º	-	-
3º	-	-
4º	+	+

b) Se $x = k\pi$, então $\sec x = 1 = \cos x$ (k par), ou $\sec x = -1 = \cos x$ (k ímpar).

Teorema: Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação:

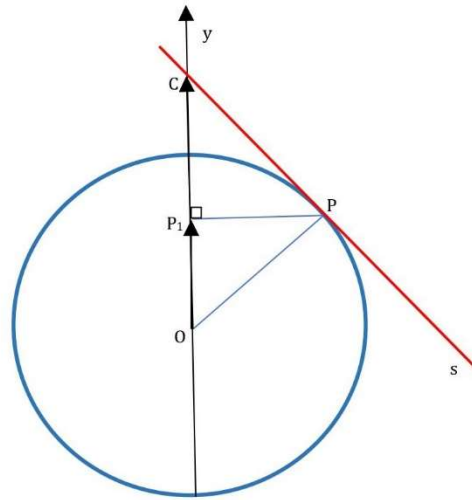
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Demonstração:

a) Se $x \neq \frac{\pi}{2}$ a imagem de x é distinta de A, B, A' e B'. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta OPC &\sim \Delta OP_1P \\ \frac{|OC|}{|OP|} &= \frac{|OP|}{|OP_1|} \\ |\operatorname{cosec} x| &= \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \end{aligned}$$

Figura 20 – Cossecante no Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Utilizando o quadro de sinais abaixo, pode-se observar que o sinal da *cossec x* é igual ao sinal de *sen x*.

Quadrante	Sinal de <i>cossec x</i>	Sinal de <i>sen x</i>
1º	+	+
2º	+	+
3º	-	-
4º	-	-

b) Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos:

$$\operatorname{cossec} x = 1 = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (\text{k par})$$

$$\operatorname{cossec} x = -1 = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (\text{k ímpar})$$

Corolário

Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\ \operatorname{tag}^2 x + 1 &= \operatorname{sec}^2 x \\ 1 + \operatorname{cotg}^2 x &= \operatorname{cossec}^2 x \\ \operatorname{cos}^2 x &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

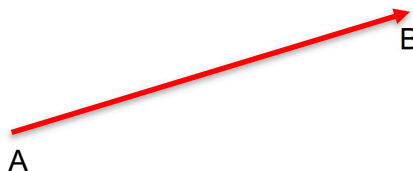
4.1.10 Vetores

Segmento orientado

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem do segmento, o segundo chamado de extremidade.

O segmento orientado de origem A e extremidade B será representado por \overline{AB} e, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.

Figura 21 – Segmento orientado AB

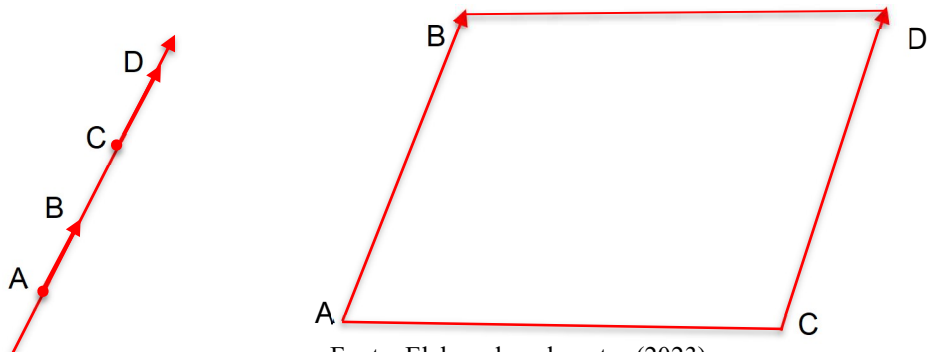


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Segmentos Equipolentes

Dois segmentos orientados \overline{AB} e \overline{CB} são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Se os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} não pertencem a mesma reta, para que \overline{AB} seja equipolente a \overline{CD} é necessário que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, isto é, ABCD deve ser um paralelogramo.

Figura 22 – Segmentos equipolentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Definição de vetor: Um vetor é determinado por um segmento orientado \overline{AB} , é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a \overline{AB} . O vetor determinado por \overline{AB} , indicamos por \vec{AB} . Dois vetores \vec{AB} e \vec{CD} são iguais se, e somente se $\vec{AB} \sim \vec{CD}$. Um mesmo vetor \vec{AB} é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, que são chamados

representantes desse vetor, e que são todos equipolentes entre si. Assim, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um destes representantes determina o mesmo vetor. (Steinbruch, 2000).

Vetor nulo

Em particular, os segmentos nulos são representantes de um único vetor, que chamamos vetor nulo, e indicamos por $\vec{0}$.

Vetores opostos

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ o vetor \overrightarrow{BA} é o oposto de \overrightarrow{AB} e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

Vetor unitário

Um vetor \vec{v} é unitário se o $|\vec{v}| = 1$.

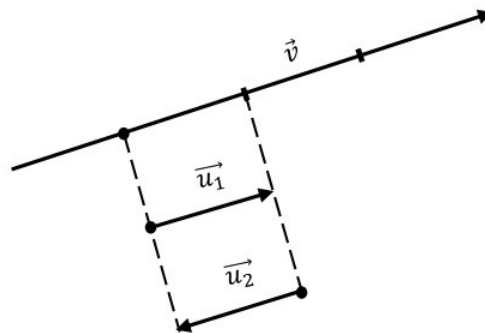
Versor

Versor de um vetor não nulo \vec{v} é o vetor unitário com mesma direção e mesmo sentido de \vec{v} .

Melhor explicando.

Se considerarmos um vetor \vec{v} de módulo 3, como na figura abaixo temos:

Figura 23 – Representação de um versor.



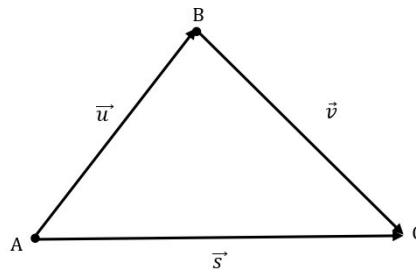
Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

Os vetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 são vetores unitários, ambos têm módulo igual a 1. Mas como podemos observar somente \vec{u}_1 tem a mesma direção e mesmo sentido de \vec{v} . Desse modo, podemos afirmar que \vec{u}_1 é versor de \vec{v} .

Adição de vetores

Tomemos os vetores \vec{u} e \vec{v} representados pelos segmentos orientados AB e BC como demonstrado na figura abaixo:

Figura 24 – Adição de vetores.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

Os pontos A e C determinam um vetor \vec{s} que é definida como a soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} , ou seja, $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Propriedades da adição:

- I. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- II. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- III. Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo vetor \vec{v} tem-se que:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

- IV. Qualquer que seja um vetor \vec{v} , somente existe um vetor $-\vec{v}$ oposto a ele, tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$.

Multiplicando um número real por um vetor

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se produto do número real k pelo vetor \vec{v} o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

- a) Módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$;
- b) Direção: a mesma de \vec{v} ;
- c) Sentido: o mesmo de \vec{v} se $k > 0$, e contrário ao de \vec{v} se $k < 0$.

Propriedades da multiplicação por um número real

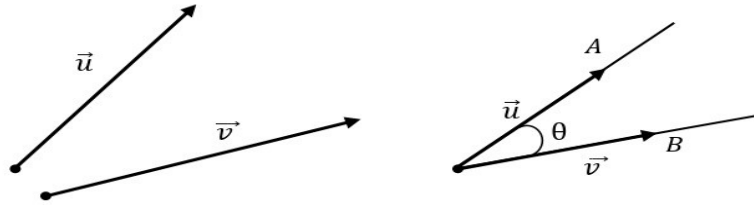
Se \vec{u} e \vec{v} são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

- I. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ - Associativa
- II. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ - distributiva em relação à adição de escalares
- III. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ - distributiva em relação à adição de vetores
- IV. $1\vec{v} = \vec{v}$ - identidade

Ângulo de dois vetores

O ângulo de dois vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos é o ângulo θ formado pelas semirretas AO e OB e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

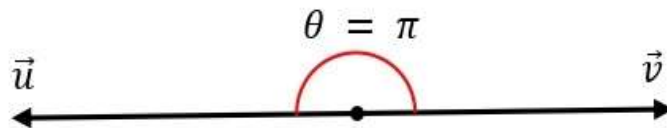
Figura 25 – Ângulo entre dois vetores.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

- a) Se $\theta = \pi$, \vec{u} e \vec{v} tem a mesma direção e sentidos contrários.

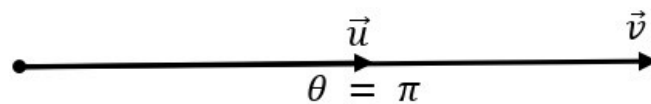
Figura 26 – Vetores Opostos.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

- b) Se $\theta = 0$, \vec{u} e \vec{v} tem a mesma direção e mesmo sentido.

Figura 27 – Vetores Colineares.

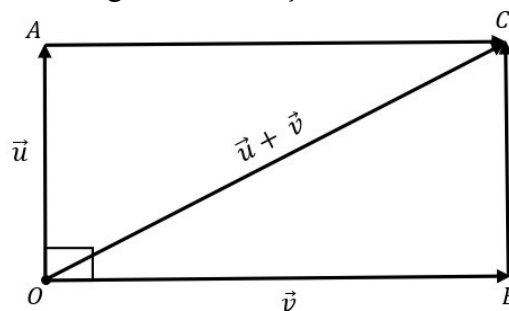


Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

- c) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, \vec{u} e \vec{v} são ortogonais e é representado por: $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- d)

Figura 28 – Adição de vetores.



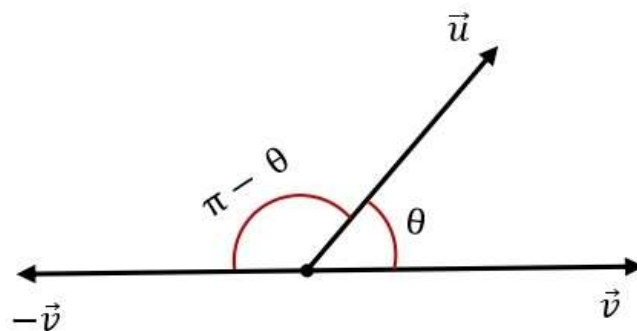
Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

No caso acima, o ΔOBC permite escrever:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

- e) O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.
- f) Se \vec{u} é ortogonal a \vec{v} e m é um número real qualquer, \vec{u} é ortogonal a $m\vec{v}$.
- g) O ângulo formado pelos vetores \vec{u} e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de \vec{u} e \vec{v} .

Figura 29 – Vetores e ângulos



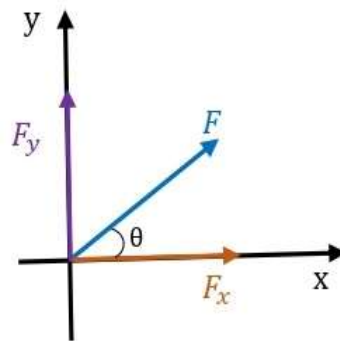
Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

4.1.11 Decomposição de vetores

A decomposição vetorial é fundamental para determinar as projeções de um vetor e suas componentes escritos sobre os eixos x e y do plano cartesiano. Os vetores são ferramentas matemáticas muito utilizadas na Física e são definidos como segmentos de reta orientados cujas grandezas vetoriais são assim representadas. Uma grandeza pode ser classificada como escalar, quando necessita apenas de um número seguido de uma unidade de medida; ou uma grandeza vetorial, neste último possui módulo, direção e sentido. A decomposição vetorial é uma das operações realizadas com vetores e pode ser definida como a determinação dos componentes de um vetor escritos sobre os eixos x e y do plano cartesiano (JÚNIOR, 2023).

A figura abaixo traz uma grandeza vetorial, com seus componentes:

Figura 30 – Decomposição Vetorial de uma força F.

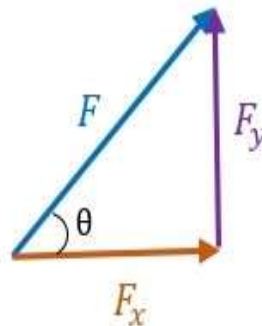


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Conhecemos os vetores F_x e F_y como componentes do vetor F projetados nos eixos x e y do plano cartesiano. A decomposição vetorial tem a funcionalidade de determinar seus valores. Para fazer isso, iremos reorganizar os vetores da figura acima mudando a posição do vetor F_y de modo a formar um triângulo retângulo.

Vejam os:

Figura 31 – Triângulo retângulo - Decomposição de forças



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tendo por base as definições de seno e cosseno e tendo o ângulo θ formado entre o vetor F e a componente do eixo x , temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot \text{sen } \theta$$

$$\text{cos } \theta = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cdot \text{cos } \theta$$

É possível escrever o vetor F como a soma vetorial de F_x e F_y . Temos que:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Considere uma força F de módulo 100N que faz um ângulo de 30° com o eixo x . Agora, vamos decompor e determinar as componentes F_x e F_y do vetor F .

Organizando os dados, temos:

$$F_x = F \cdot \cos \theta$$

$$F_x = 100 \cdot \cos 30^\circ$$

$$F_x = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_x = 50\sqrt{3}\text{N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta$$

$$F_y = 100 \cdot \sin 30^\circ$$

$$F_y = 100 \cdot 0,5$$

$$F_y = 50\text{N}$$

Vale ressaltar que se somarmos algebricamente F_x a F_y não obteremos F . Como se trata de operações vetoriais e não de operações algébricas, para obtermos o valor de F devemos somar vetorialmente suas componentes. Vejamos:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F = \sqrt{(50\sqrt{3})^2 + 50^2}$$

$$F = \sqrt{2500 \cdot 3 + 2500}$$

$$F = \sqrt{7500 + 2500}$$

$$F = \sqrt{10000}$$

$F = 100\text{N}$

4.1.12 Equação da circunferência

A equação da circunferência é amplamente estudada na geometria analítica, seja em sua forma geral ou reduzida, que com uma linguagem matemática, algébrica, descreve e explica a geometria euclidiana com seus objetos geométricos. Em particular, a equação geral é obtida quando desenvolvemos as diferenças de quadrados encontradas na equação reduzida, sendo

uma equação do tipo $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, em que $C(a, b)$ é o centro da circunferência e r é o raio dessa circunferência.

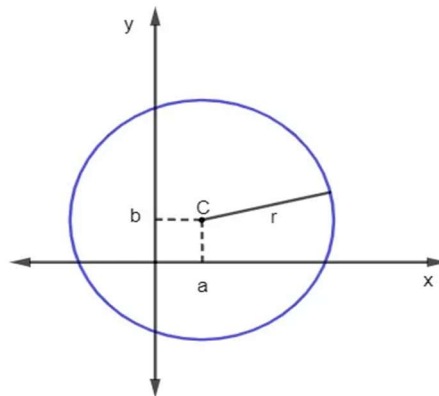
Ao Analisar o gráfico da equação da circunferência, também é possível encontrar a equação geral por meio do valor do seu centro e do seu raio.

Na geometria analítica, é comum se fazer uma análise da geometria (objetos geométricos), e buscar descrevê-los por meio de uma linguagem algébrica (equação). Com o estudo específico para a circunferência, foram desenvolvidos dois tipos de equações: a equação geral e a equação reduzida. Para a equação geral temos o seguinte:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Essa equação geral é deduzida a partir da equação reduzida. Vejamos a representação da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r no plano cartesiano:

Figura 32 – Circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r ($r > 0$)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Essa circunferência possui centro $C(a, b)$ e raio r , então a sua equação reduzida é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

É trivial perceber que estamos tratando de dois quadrados da diferença na equação e que ao desenvolvê-los encontra-se, conseqüentemente, a equação geral da circunferência:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(y - b)^2 = y^2 - 2by + b^2$$

Substituindo na equação, temos que:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

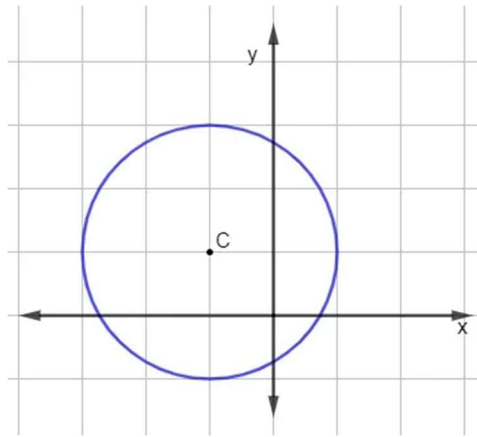
Para encontrar a equação geral de uma circunferência representada no plano cartesiano, basta seguir alguns passos.

1º passo: identificar o centro e o raio da circunferência.

2º passo: substituir na equação geral da circunferência os valores encontrados anteriormente.

Exemplo: encontre a equação geral da circunferência a seguir:

Figura 33 – Circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r ($r > 0$)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Resolução: analisando a representação da circunferência, o ponto C possui coordenadas $C(-1, 1)$ e, do centro até uma extremidade, há 2 unidades, logo o raio é igual a 2.

Agora que conhecemos o centro e o raio, temos que $a = -1$, $b = 1$ e $r = 2$. Substituindo na fórmula da equação geral:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x - 2 \cdot 1 \cdot y + (-1)^2 + 1^2 - 2^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 + 1 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

Logo, a equação geral dessa circunferência é:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.$$

Agora, é possível calcular o raio e o centro da circunferência.

Conhecendo a equação da circunferência, pode-se encontrar o centro e o raio, por exemplo, por meio do método da comparação.

Vejamos:

Dada a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0.$$

Resolução:

Como é conhecida a equação geral da circunferência: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. É necessário encontrar os valores de “a” e “b”. Por comparação tem-se que:

$$- 2ax = 8x \Leftrightarrow - 2a = 8 \Leftrightarrow (-1)(- 2a) = 8(- 1)$$

$$a = - 4$$

Tem-se também, que:

$$- 2by = - 2y \Leftrightarrow - 2b = - 2 \Leftrightarrow (-1)(-2b) = (- 2)(- 1)$$

$$b = 1$$

Uma vez conhecidos os valores de “a” e “b”, é possível obter o valor de r.

$$a^2 + b^2 - r^2 = 1 \Leftrightarrow (- 4)^2 + 1^2 - r^2 = 1 \Leftrightarrow 16 + 1 - r^2 = 1$$

$$17 - r^2 = 1 \Leftrightarrow 17 - 1 = r^2 \Leftrightarrow 16 = r^2$$

$$r = \sqrt{16}$$

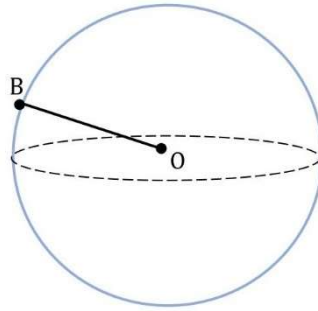
$$r = 4$$

4.1.13 Esfera

Esfera é um sólido geométrico estudado na geometria espacial, sendo classificada como um corpo redondo e é bastante presente no nosso cotidiano. Podemos vê-la na bola de futebol, nas pérolas, no globo terrestre, em alguns frutos, entre outros exemplos.

Considerando um ponto O do espaço como a origem e um segmento de medida r o qual denominamos raio, definimos que a esfera é o conjunto de pontos que estão a uma distância igual ou menor que a distância entre o raio e a origem. Chama-se *superfície* da esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r . Ela é formada pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Figura 34 – Esfera

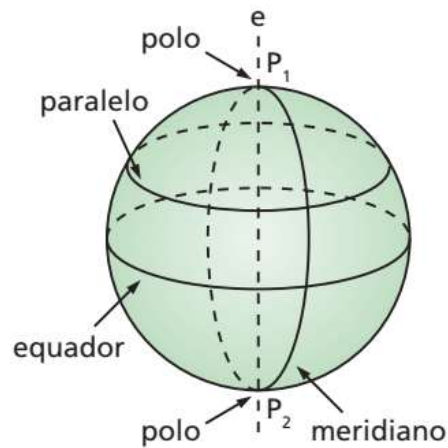


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Elementos de uma esfera

Além do raio, a esfera possui elementos importantes, como os polos (representados pelos pontos P_1 e P_2 , figura a seguir), o equador, o meridiano e os paralelos. Podemos também dividir a esfera em partes como o cunho e o fuso esférico. A área total e o volume de uma esfera são calculados por fórmulas específicas que dependem apenas do valor do raio dessa figura.

Figura 35 – Elementos de uma esfera



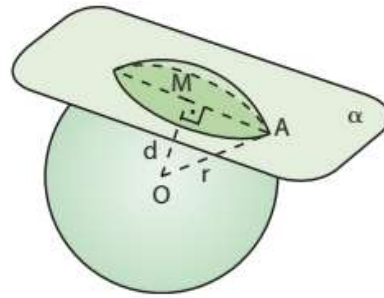
Fonte: Pompeo (2013)

Seção

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera. Sendo r o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e s o raio da seção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2$$

Figura 36 – Seção de uma esfera



Teorema de Pitágoras no $\triangle OMA$:

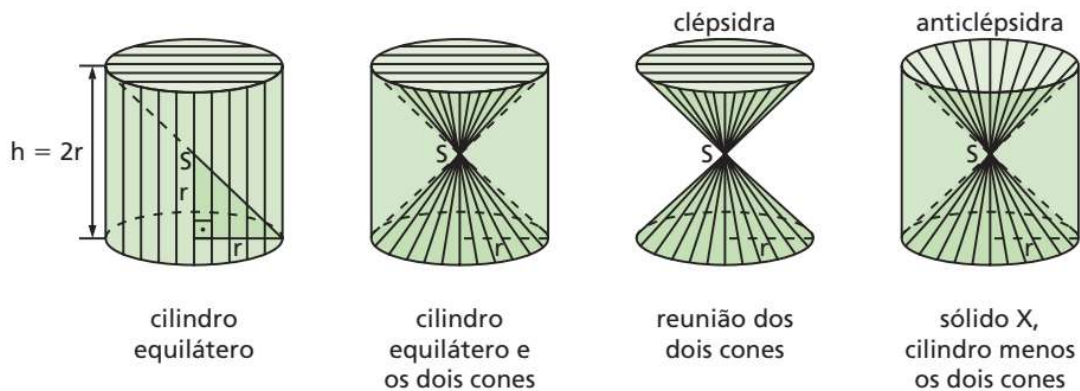
$$r^2 = d^2 + s^2.$$

Fonte: Pompeo (2013)

Volume da Esfera

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r (a altura é $2r$) e seja S o ponto médio do eixo do cilindro. Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *clépsidra*). Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido X é chamado *anticlépsidra*).

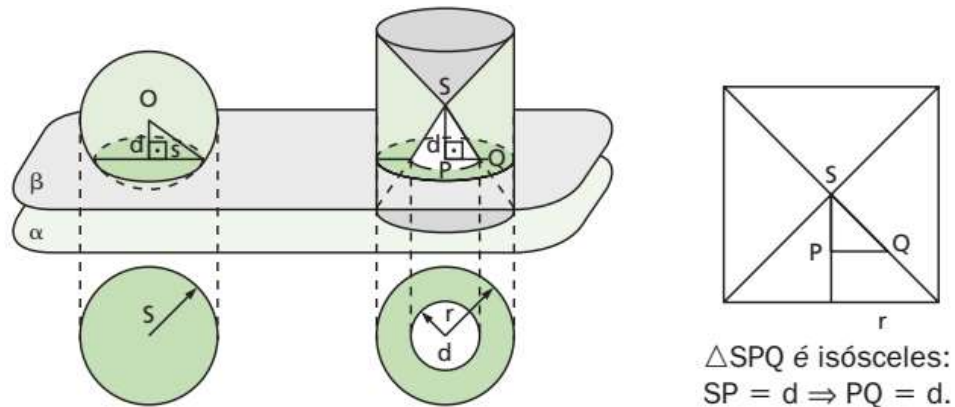
Figura 37 – Construção da Anticlépsidra



Fonte: Pompeo, 2013

Consideremos agora uma esfera de raio r e o sólido X ,

Figura 38 – Seções planas



Fonte: Pompeo (2013)

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α , que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X, estejam num mesmo semiespaço dos determinados por α . Qualquer plano secante β , paralelo a α , distando d do centro O da esfera (e do vértice S do sólido X), também secciona o sólido X. Temos:

$$\text{Área da seção na esfera (círculo)} = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

$$\text{Área da seção no sólido X (coroa circular)}: \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

As áreas das seções na esfera e no sólido X são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{sólido X}}$$

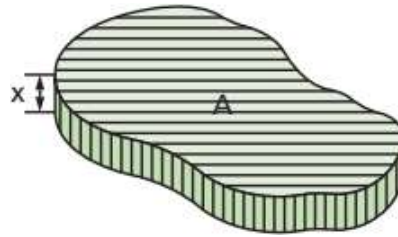
$$V_{\text{sólido X}} = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r\right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Área da Esfera

Se considerarmos uma superfície limitada de área A e sobre ela formarmos um sólido de altura x de bases “paralelas”, teremos, indicando com V , o volume do sólido (“prismas” reunidos com “cilindros”) de base A e altura x .

Figura 39 – Noção Intuitiva de área de uma superfície



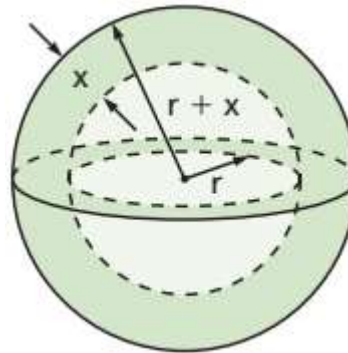
Fonte: Pompeo (2013)

$$V = A \cdot x \rightarrow A = \frac{V}{x}$$

Esta última igualdade é verificada para qualquer x . Intuitivamente, uma superfície é imaginada como uma “placa sólida” de “espessura infinitamente pequena”.

Por isso, se uma “placa sólida” de volume V_p e espessura x for tal que a expressão (função) $\frac{V_p}{x}$ tem sentido (é definida) para $x \rightarrow 0$, então: $\frac{V_p}{x}$ (para $x \rightarrow 0$) será definida como a área da placa.

Figura 40 – Dedução da Área da esfera



Fonte: Pompeo (2013)

A área da superfície de uma esfera de raio r é igual a:

$$V_p = \frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi[(r+x)^3 - r^3] = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3rx + x^2]$$

Então para $x = 0$, vem:

$$A = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3r \cdot 0 + 0^2]$$

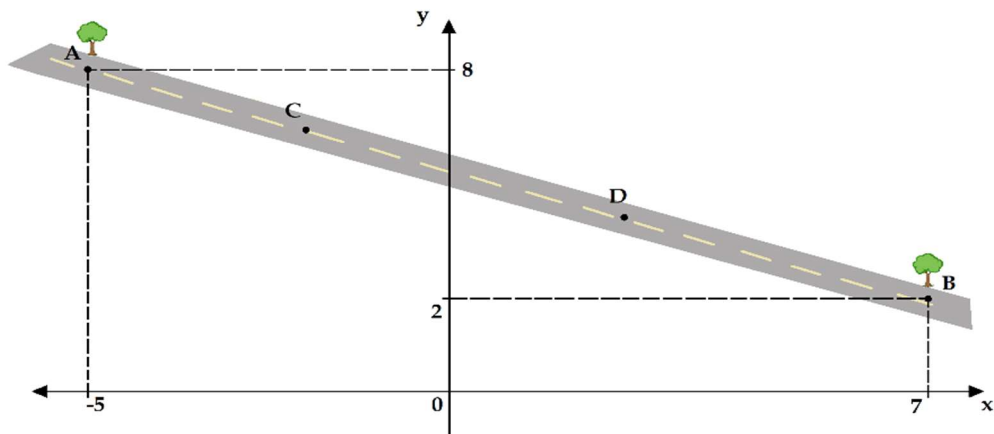
$$A = 4\pi r^2$$

5 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA

5.1 APLICAÇÃO NA TOPOGRAFIA

Na figura abaixo está representada partes de uma rua cujos extremos são as árvores A e B. Entre essas árvores, serão plantadas outras duas nos pontos C e D, de maneira que a distância entre uma árvore e outra seja a mesma.

Figura 41 – Demarcando ponto com espaçamentos iguais numa pista.



Fonte: Andrade (2020)

Trabalharemos alguns conceitos da geometria analítica na figura dada, para:

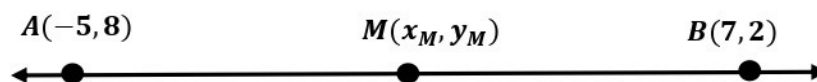
- Determinar as coordenadas dos pontos C e D.
- Levando-se em conta que na figura cada unidade corresponde a 2m, calcularemos a distância aproximada entre as árvores A e B. E entre C e D.

Para determinarmos as coordenadas dos pontos C e D, seguiremos os passos a seguir:

1º passo

Calcularemos o ponto médio entre as árvores A e B.

Figura 42 – Coordenadas do ponto médio de um segmento.



Fonte: Andrade (2020)

Vejamos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{(x_M - x_A)}{(x_B - x_M)} \Leftrightarrow 1 = \frac{(x_M - x_A)}{(x_B - x_M)} \Leftrightarrow (x_B - x_M) = (x_M - x_A) \Leftrightarrow 2x_M = x_B + x_A$$

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} \Leftrightarrow x_M = \frac{7 - 5}{2} \Leftrightarrow x_M = 1$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{(y_M - y_A)}{(y_B - y_M)} \Leftrightarrow 1 = \frac{(y_M - y_A)}{(y_B - y_M)} \Leftrightarrow (y_B - y_M) = (y_M - y_A) \Leftrightarrow 2y_M = y_B + y_A$$

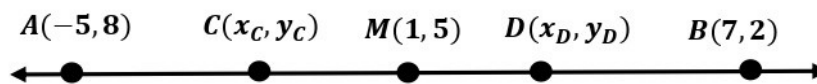
$$y_M = \frac{2 + 8}{2} \Leftrightarrow y_M = 5$$

$$M(1, 5)$$

2º passo

Agora, para que possamos atender a condição dada é necessário considerar os pontos C e D no seguimento acima:

Figura 43 – Coordenadas dos pontos C e D.



Fonte: Andrade (2020)

Como as árvores devem ser plantadas, de modo que as distâncias entre elas sejam iguais.

Temos que:

$$AC = CD = DB$$

Observe também que M é ponto médio do segmento AB e CD, simultaneamente;

$$AC = 2CM \text{ e } DB = 2MD$$

Calculando, temos:

$$AC = 2CM; DB = 2MD$$

$$AC = 2CM$$

$$(x_C - x_A) = 2(x_M - x_C) = \frac{(x_C - x_A)}{2} = (x_M - x_C)$$

$$\frac{(x_C)}{2} - \frac{(x_A)}{2} = (x_M - x_C) \Leftrightarrow \frac{(x_C)}{2} - \frac{(-5)}{2} = (1 - x_C)$$

$$\frac{(x_C)}{2} + x_C = 1 - \frac{5}{2}$$

$$\frac{3(x_C)}{2} = \frac{2 - 5}{2}$$

$$3(x_C) = -3$$

$$x_C = -1$$

$$(y_C - y_A) = 2(y_M - y_C) = \frac{(y_C - y_A)}{2} = (y_M - y_C)$$

$$\frac{(y_C)}{2} - \frac{(y_A)}{2} = (y_M - y_C) \Leftrightarrow \frac{(y_C)}{2} - \frac{8}{2} = 5 - y_C$$

$$\begin{aligned}\frac{(y_C)}{2} + y_C &= 5 + 4 \\ \frac{3y_C}{2} &= 9 \\ 3y_C &= 18 \\ y_C &= 6\end{aligned}$$

$$DB = 2MD$$

$$(x_B - x_D) = 2(x_D - x_M) = \frac{(x_B - x_D)}{2} = (x_D - x_M)$$

$$\frac{(x_B)}{2} - \frac{(x_D)}{2} = (x_D - x_M) \Leftrightarrow \frac{(7)}{2} - \frac{x_D}{2} = x_D - 1$$

$$-\frac{x_D}{2} - x_D = -\frac{7}{2} - 1$$

$$(-1)\left(-\frac{3x_D}{2}\right) = \left(-\frac{9}{2}\right)(-1)$$

$$x_D = \frac{9}{3}$$

$$x_D = 3$$

$$(y_B - y_D) = 2(y_D - y_M) = \frac{(y_B - y_D)}{2} = (y_D - y_M)$$

$$\frac{(y_B)}{2} - \frac{(y_D)}{2} = (y_D - y_M) \Leftrightarrow \frac{2}{2} - \frac{y_D}{2} = y_D - 5$$

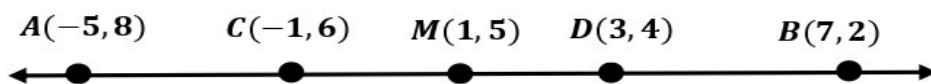
$$-\frac{y_D}{2} - y_D = -5 - 1$$

$$(-1)\left(-\frac{3y_D}{2}\right) = -6(-1)$$

$$y_D = \frac{12}{3}$$

$$y_D = 4$$

Figura 44 – Coordenadas de todos os pontos.



Fonte: Andrade (2020)

Portanto, as árvores deverão ser plantadas nas coordenadas C(-1,6) e D(3,4).

Agora, para calcularmos as distâncias entre os pontos A e B, C e D iremos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$[d(A, B)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Conhecendo as coordenadas dos pontos A, B, C e D é trivial calcularmos as medidas do seguimento \underline{AB} como também do segmento \underline{CD} .

Lembrando que para cada unidade devemos considerar 2m.

Vejamos: $A(-5, 8)$ e $B(7, 2)$;

$$[d(A, B)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(7 - (-5))^2 + (2 - 8)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(12)^2 + (-6)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{144 + 36}$$

$$d(A, B) = \sqrt{180}$$

$$d(A, B) = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 5}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(3 \cdot 2)^2 \cdot 5}$$

$$d(A, B) = 6\sqrt{5}$$

Considerando que $\sqrt{5} \approx 2,2360679775$ temos que:

$$d(A, B) \approx 6,2,24$$

$$d(A, B) \approx 13,44 \times 2$$

$$d(A, B) \approx 26,88$$

Do mesmo modo, calcularemos a distância dos pontos C e D.

Temos: $C(-1,6)$ e $D(3,4)$

$$[d(C, D)]^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

$$d(C, D) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 6)^2}$$

$$d(C, D) = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2}$$

$$d(C, D) = \sqrt{16 + 4}$$

$$d(C, D) = \sqrt{20}$$

$$d(C, D) = 2\sqrt{5}$$

$$d(C, D) = 2 \times \sqrt{5}$$

Considerando que $\sqrt{5} = 2,2360679775$ temos que:

$$d(C, D) \approx 2 \times 2,24$$

$$d(C, D) \approx 4,48$$

5.2 APLICAÇÃO NA FÍSICA - LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS (LANÇAMENTO OBLÍQUO).

Pensemos na seguinte situação: imagine que se deseja analisar o movimento de um projétil lançado em um ângulo específico em relação à horizontal. Utilizando a Geometria Analítica, pode-se descrever esse movimento de forma precisa e analisar parâmetros importantes, como altura máxima atingida, alcance horizontal e tempo de voo.

Suponha que um projétil seja lançado a partir da origem de um sistema de coordenadas cartesianas, com um ângulo de lançamento θ em relação ao eixo horizontal. A aceleração devido à gravidade age na direção vertical, com valor aproximado de **9,8 m/s²**.

Utilizando as equações paramétricas do movimento, que relacionam as coordenadas x e y do projétil com o tempo t , você pode expressar as posições x e y em termos de componentes x e y da velocidade inicial, v_0x e v_0y :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cdot x \cdot t \\y(t) &= v_0 \cdot y \cdot t - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot g \cdot t^2\end{aligned}$$

Temos que:

$v_0x = v_0 \cdot \cos(\theta)$ é a componente horizontal da velocidade inicial.

$v_0y = v_0 \cdot \sin(\theta)$ é a componente vertical da velocidade inicial.

g é a aceleração devido à gravidade.

Utilizando-se dessas equações, é possível calcular informações importantes sobre o movimento do projétil:

- **Altura máxima atingida:** O tempo em que a componente vertical da velocidade $v_0 \cdot y$ se torna zero que corresponde ao tempo de subida até a altura máxima. A altura máxima é a maior altura atingida pelo projétil durante o seu movimento. Ela pode ser calculada através do tempo em que a componente vertical da velocidade $v_0 \cdot y$ se torna zero. O valor desse tempo é igual à metade do tempo de voo total. Com o valor do tempo de altura máxima (t_{max}), podemos calcular a altura máxima (h_{max}) utilizando a equação $y(t)$:

$$h_{max} = y(t_{max}) = v_0y \cdot t_{max} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{max}^2$$

- **Alcance horizontal:** O alcance ocorre quando a componente vertical da posição y retorna ao solo, ou seja, quando $y = 0$. Substituindo $y = 0$ na equação de $y(t)$, você pode encontrar o tempo de voo total. O alcance horizontal é então calculado usando o tempo de voo total e a componente horizontal da velocidade v_0x . O alcance horizontal é

a distância percorrida pelo projétil na direção horizontal antes de retornar ao solo ($y = 0$). O tempo total de voo (T) pode ser encontrado ao resolver a equação $y(t) = 0$. Com o valor de T , o alcance (R) é calculado multiplicando a componente horizontal da velocidade v_{0x} pelo tempo total de voo:

$$R = v_{0x} \cdot T$$

- Tempo de voo: o tempo de voo total pode ser determinado ao encontrar o instante em que o projétil retorna ao solo ($y = 0$). A velocidade de impacto é a velocidade com a qual o projétil atinge o solo. Ela pode ser calculada utilizando a equação da componente vertical da velocidade v_y no momento de impacto, que ocorre quando $y = 0$:

$$v_{\text{impacto}} = v_y(t_{\text{impacto}}) = v_{0y} - g \cdot t_{\text{impacto}}$$

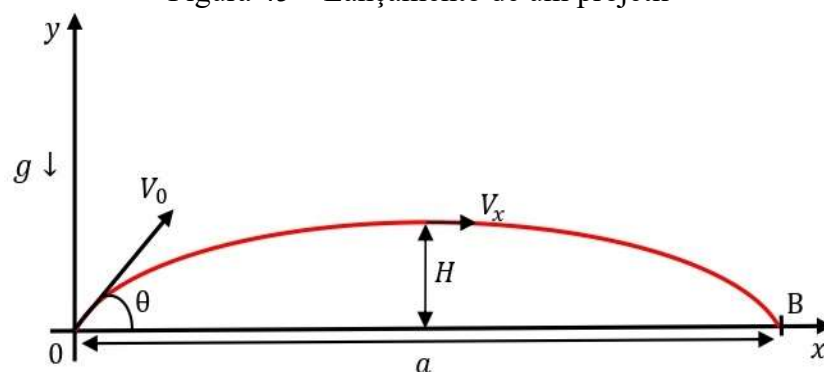
Considere a seguinte situação:

Um projétil é lançado do solo, na horizontal, com velocidade inicial de módulo $v_0 = 100$ m/s formando um ângulo θ . Não havendo resistência a considerar e a aceleração da gravidade no local de lançamento é $g \approx 10$ m/s². Considerando que $\text{sen } \theta = 0,80$ e $\text{cos } \theta = 0,60$, vamos determinar o que se pede:

- O módulo da velocidade vetorial e o módulo da aceleração vetorial no ponto mais alto da trajetória;
- O intervalo de tempo para o projétil retornar ao solo;
- A altura máxima que o projétil atingiu;
- Qual foi o alcance horizontal do projétil.

Resolvendo temos:

Figura 45 – Lançamento de um projétil



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Item a)

No ponto mais alto da trajetória a velocidade na direção vertical é nula ($V_y = 0$).

Assim, a velocidade vetorial do projétil tem módulo igual a V_x , que é dada por:

$$V_x = V_0 \cdot \cos \theta$$

$$V_x = 100 \cdot 0,60 \therefore V_x = 60 \text{ m/s}$$

A aceleração resultante do projétil em toda a trajetória é a da gravidade. Desse modo temos:

$$a_R = g \cong 10 \text{ m/s}^2$$

Item b)

O tempo de subida t_S , que corresponde ao tempo que o projétil leva para atingir o ponto mais alto, podemos calculá-lo, fazendo $V_y = 0$ na equação horária da velocidade do movimento vertical:

$$V_y = V_{0y} - gt$$

$$0 = V_{0y} - 10t$$

$$V_{0y} = 10t$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \text{sen } \theta$$

$$V_{0y} = 100 \cdot 0,80$$

$$V_{0y} = 80 \text{ m/s}^2$$

Fazendo a substituição temos:

$$10t = 80$$

$$t = 8\text{s}$$

A variação Δt , para o projétil retornar ao solo é o dobro deste valor, porque o tempo de descida é igual ao tempo de subida até a altura máxima:

$$\Delta t = 2t$$

$$\Delta t = 2 \cdot 8,0$$

$$\Delta t = 16\text{s}$$

Item c)

Calculando a altura máxima atingida, substituiremos o tempo de subida na equação horária do espaço no movimento vertical:

$$y = v_{0v} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad H = 80 \cdot 8,0 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 64$$

$$\therefore H = 320 \text{ m}$$

Obs: Utilizando o princípio de Conservação de energia poderemos chegar ao mesmo resultado. Para isso temos que, E_{MO} a energia mecânica na posição inicial e E_{MA} a energia mecânica no ponto mais alto, temos:

$$E_{MO} = E_{MA} \Leftrightarrow \frac{m \cdot V_0^2}{2} = m \cdot g \cdot H + \frac{m \cdot V_x^2}{2} \Leftrightarrow V_0^2 = 2 \cdot g \cdot H + V_x^2$$

Fazendo as substituições temos:

$$(100)^2 = 20H + (60)^2 \Leftrightarrow 10000 = 20H + 3600 \Leftrightarrow 20H = 6400$$

$$\therefore H = 320 \text{ m}$$

Item d)

Obtendo o alcance horizontal, iremos agora substituir na equação horária do espaço do movimento horizontal, o tempo t pelo intervalo de tempo total do movimento.

$$t = \Delta t = 16 \text{ s}$$

Assim:

$$x = V_x \cdot t \Leftrightarrow a = 60 \cdot 16$$

$$a = 960 \text{ m}$$

5.3 APLICAÇÃO NA ENGENHARIA - DIMENSIONAMENTO DE VIGAS EM UMA TRELIÇA E DETERMINAÇÃO DA TENSÃO EM UM CABO SUSPENSO

A geometria analítica desempenha um papel de destaque na Engenharia, representando uma ferramenta fundamental para a resolução de problemas complexos no âmbito da construção, design e análise de estruturas e sistemas. A sua relevância é notória, uma vez que permite a tradução de questões geométricas em equações matemáticas, capacitando os engenheiros a abordar desafios práticos com extrema precisão e eficácia.

Primeiramente, a geometria analítica viabiliza a representação minuciosa de objetos e sistemas no espaço tridimensional, por meio do sistema de coordenadas cartesianas. Isso se traduz em um aspecto crítico para o planejamento de edificações, pontes, rodovias e uma variedade de infraestruturas, assegurando que as dimensões sejam calculadas com rigor e que as estruturas sejam erguidas com total segurança e conformidade.

Ademais, a geometria analítica desempenha um papel crucial na análise de estruturas. Os engenheiros podem utilizar conceitos geométricos e coordenadas para calcular

tensões, deformações e outros parâmetros vitais em materiais e componentes estruturais, contribuindo para a preservação da integridade das construções ao longo do tempo.

Outra aplicação significativa recai sobre a simulação de sistemas complexos, como sistemas elétricos e mecânicos. Por meio da modelagem geométrica, os engenheiros conseguem compreender o comportamento desses sistemas e otimizar o seu desempenho, resultando em economia de recursos e redução de custos operacionais.

Além disso, a geometria analítica é imprescindível no âmbito da automação e do controle de processos industriais. Ela capacita o desenvolvimento de sistemas de controle de alta precisão para máquinas e robôs, garantindo que executem tarefas com máxima precisão e eficiência.

Em síntese, a geometria analítica representa um pilar sólido da Engenharia, conferindo aos engenheiros as ferramentas essenciais para projetar, analisar e controlar sistemas complexos de forma precisa e eficiente. Sua aplicação é abrangente e abarca desde a construção de estruturas robustas até o desenvolvimento de tecnologias de vanguarda, tornando-se um elemento indispensável para o progresso contínuo da Engenharia nas mais diversas áreas.

Exemplo 1

Problema: Dimensionamento de Vigas em uma Treliça usando Geometria Analítica.

Suponha que temos uma treliça plana composta por barras verticais e horizontais, e precisamos calcular o comprimento das vigas horizontais que conectam os nós da treliça. A treliça está representada em um sistema de coordenadas cartesianas, onde os nós da treliça são pontos no plano cartesiano.

Considere os seguintes pontos de nó na treliça:

Nó A: (0, 0)

Nó B: (6, 0)

Nó C: (0, 4)

Nó D: (6, 4)

Queremos calcular o comprimento da viga horizontal que conecta o Nó A ao Nó B.

Solução:

Neste problema, estamos usando coordenadas cartesianas para representar os pontos de nó na treliça. O conceito-chave da geometria analítica aqui é a distância entre dois pontos, que pode ser calculada usando o Teorema de Pitágoras.

Primeiro, precisamos calcular a diferença nas coordenadas x e y entre os nós A e B:

$$\Delta x = 6 - 0 = 6 \text{ unidades}$$

$$\Delta y = 0 - 0 = 0 \text{ unidades}$$

Agora, podemos usar o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento da viga horizontal AB (hipotenusa do triângulo retângulo formado pelas diferenças nas coordenadas):

$$\text{Comprimento } (AB) = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

$$\text{Comprimento } (AB) = \sqrt{(6^2 + 0^2)}$$

$$\text{Comprimento } (AB) = \sqrt{(36)} = 6 \text{ unidades}$$

Portanto, o comprimento da viga horizontal que conecta o Nó A ao Nó B é de 6 unidades.

Para determinar a tensão em um cabo suspenso, podemos usar princípios básicos de equilíbrio de forças e análise vetorial. Vamos considerar um exemplo genérico onde um cabo está suspenso entre dois pontos e sujeito a uma carga ou peso. A geometria analítica pode ser aplicada para analisar a situação do cabo suspenso de maneira mais precisa, especialmente se quisermos expressar as posições e as forças envolvidas em termos de coordenadas cartesianas.

Exemplo 2: Determinação da Tensão em um Cabo Suspenso.

Uma placa de sinalização com uma massa de 200 kg está suspensa verticalmente por um cabo a uma altura de 30m acima do solo. O cabo forma um ângulo de 40° com a vertical. Determine a tensão no cabo.

Solução:

Neste problema, estamos usando um sistema de coordenadas cartesianas onde o solo está no plano xy e a origem, ponto $(0,0)$, está no ponto de ancoragem do cabo. Podemos expressar a posição da placa em termos de coordenadas. De acordo com os dados do problema, vamos assumir que a posição da placa está diretamente abaixo do ponto de ancoragem. Portanto, a posição da placa será $(x, y) = (0, -30)$.

O Peso age verticalmente para baixo. Podemos expressar essa força como um vetor \vec{P} que possui apenas uma componente na direção y , isto é:

$$\vec{P}_y = -mg = -200 \cdot 9,8 \approx -1960 \text{ N}$$

A Tensão no cabo pode ser expressa por um vetor \vec{T} , que possui as componentes $\vec{T}_x = T \cos(\theta)$ e $\vec{T}_y = T \sin(\theta)$

A soma das forças nas direções x e y deve ser igual a zero para que o sistema esteja em equilíbrio. Ou seja:

$$\begin{cases} T_x = 0 \\ T_y - P = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, teremos:

$$T_x = T \cos(40^\circ) = 0 \text{ (não há atuação de força horizontal)}$$

$$T_y = T \sin(40^\circ)$$

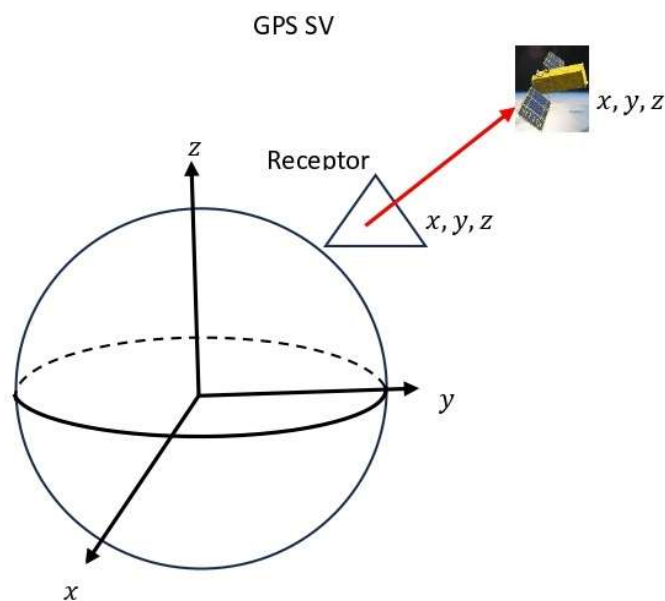
$$T_y - P = 0 \leftrightarrow T \sin(40^\circ) - 1960 = 0 \leftrightarrow T \approx 3051,47 \text{ N}$$

Portanto, a tensão no cabo é de aproximadamente 3051,47 N.

5.4 APLICAÇÃO NO GPS (SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL)

O GPS (Sistema de Posicionamento Global) é um sistema de navegação por satélite, conta com um conjunto de vinte e quatro satélites, mais quatro sobressalentes em seis planos orbitais inclinados com 55° , igualmente espaçados de 60° de latitude e com um período de 12 horas a uma altitude de aproximadamente 20200 km acima do nível do mar que permite determinar a posição precisa de um receptor em qualquer lugar do mundo. Assim, sendo possível transmitir sinais que podem ser recebidos por dispositivos receptores, como por exemplo, navegadores de carros, dispositivos de mapeamento, smartphones e outros dispositivos (Queiroz, 1982).

Figura 46 - Posicionamento GPS baseado no centro de massa da Terra



Fonte: Bernardi e Landim (2002)

O papel desempenhado pela geometria analítica é fundamental para o funcionamento do GPS que opera com Coordenadas e Posicionamento. O GPS tem como base de operação as coordenadas geográficas (latitude, longitude e, por vezes, altitude) para determinar a posição de um receptor. A geometria analítica é usada para estabelecer uma relação entre essas coordenadas e a posição tridimensional do receptor em relação aos satélites. Cálculos trigonométricos e algébricos são empregados para determinar as distâncias entre o receptor e vários satélites com base nos tempos de viagem dos sinais.

Para que haja precisão e um pleno funcionamento do GPS é necessário que, através da geometria analítica, alguns requisitos precisem ser atendidos:

1. Trilateração

Trata-se de um método geométrico utilizado para calcular a posição de um receptor baseado nas distâncias medidas entre pelo menos três satélites e o receptor. A geometria analítica entra em cena e se encarrega de criar esferas ao redor dos satélites com raios iguais às distâncias medidas. A interseção das esferas criadas, determina a localização do receptor. Esse método da geometria envolve a interseção de três circunferências, que é usada para calcular a posição de um receptor GPS. Cada um dos satélites emitem um sinal que viaja à velocidade da luz até o receptor. A distância entre o satélite e o receptor é proporcional ao tempo que o sinal leva para chegar. Ao usar os tempos de viagem para calcular as distâncias, podemos criar três circunferências com centros nos satélites e raios iguais às distâncias calculadas. A interseção dessas três circunferências determina a posição aproximada do receptor.

2. Sincronização de Tempo:

O GPS depende da sincronização precisa dos relógios nos satélites e nos receptores. A geometria analítica é usada para levar em consideração o efeito relativístico do tempo dilatado devido à velocidade dos satélites em órbita, garantindo uma sincronização precisa dos tempos para cálculos de posição precisos.

3. Geodésia e Transformações de Coordenadas:

Para obter posições precisas na superfície da Terra, é necessário considerar as variações na forma da Terra (geóide). A geometria analítica é usada para realizar transformações de coordenadas entre sistemas de coordenadas geodésicas e sistemas de coordenadas cartesianas, levando em conta as deformações da Terra. Em estudos geodésicos e

mapeamento de áreas maiores, a interseção de circunferências (ou arcos de circunferência) pode ser usada para determinar a posição de pontos em relação a marcos de referência geodésicos.

4. Erro de Posicionamento e Correção:

A geometria analítica também é usada para calcular erros de posicionamento e implementar correções. Técnicas como o Differential GPS (DGPS) usam informações de estações terrestres com posições conhecidas para calcular e corrigir erros sistemáticos no posicionamento do receptor. Em aplicações de posicionamento, como o GPS, é importante considerar erros nas medições. As circunferências podem ser usadas para representar regiões de incerteza. Ao usar técnicas de propagação de erro, as incertezas nas medições são representadas por circunferências ou elipses que indicam onde a posição real provavelmente se encontra.

5. Estações de Referência em DGPS:

O Differential GPS (DGPS) é um método para melhorar a precisão do posicionamento GPS. Estações de referência terrestres com posições conhecidas são usadas para monitorar e corrigir os sinais dos satélites. A correção é transmitida aos receptores. As circunferências são usadas para definir áreas onde o sinal do satélite e a correção terrestre se sobrepõem, melhorando a precisão do posicionamento.

6. Aplicações em Topografia:

Na topografia e cartografia, a geometria analítica é frequentemente usada para descrever curvas de nível e superfícies de terreno. Circunferências podem ser usadas para representar curvas de nível específicas ou para delinear áreas de interesse em mapas topográficos.

Trabalharemos a seguir uma aplicação de trilateração de satélites determinando a posição de um receptor.

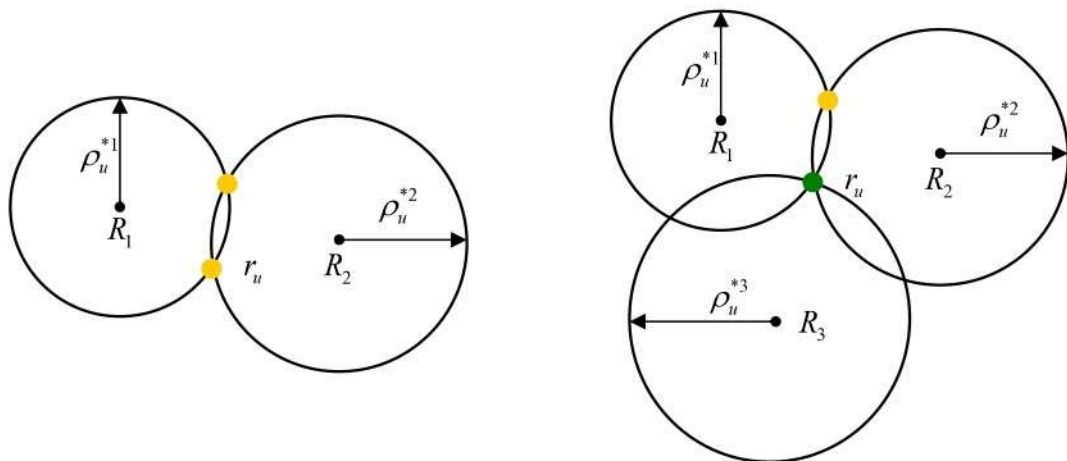
TRILATERAÇÃO NO GPS

O processo de trilateração no GPS envolve a determinação da posição de um receptor usando informações de distância medidas a partir de pelo menos três satélites. Vou mostrar como isso pode ser demonstrado algebricamente e geometricamente.

Para uma melhor compreensão desse conceito, inicialmente demonstraremos em um exemplo abaixo em duas dimensões, que, posteriormente, demonstraremos em três

dimensões. Geometricamente, na intersecção de dois círculos, cujos raios são definidos pelas pseudodistâncias, representadas por: ρ_u^{*i} entre os satélites e o utilizador r_u , obtém-se dois pontos possíveis para a posição do utilizador. Ao introduzir mais um satélite, nota-se que fica somente com um ponto possível para a posição do utilizador. Portanto, conclui-se que no caso bidimensional faz-se necessário a utilização das coordenadas de três satélites e respectivas pseudodistâncias para determinar a posição precisa do utilizador.

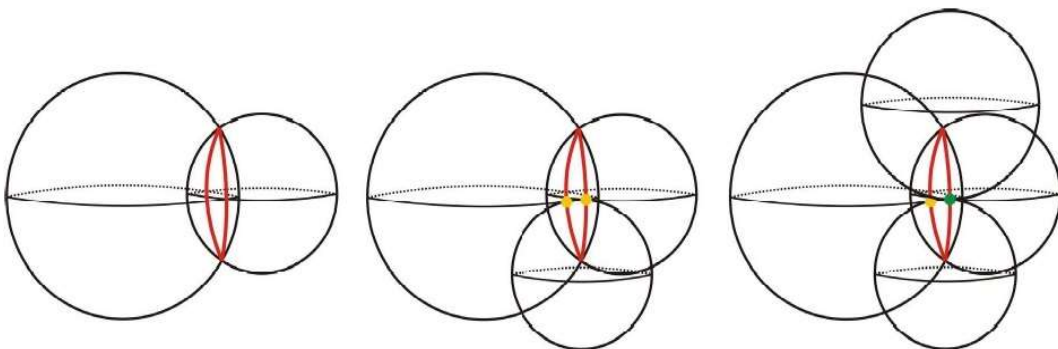
Figura 47 – Conceito bidimensional de trilateração.



Fonte: Gomes e Mendes (2006)

No caso de uma demonstração em três dimensões, semelhantemente a demonstração no caso de duas dimensões, e levando-se em conta que existe mais uma incógnita, é necessário lançar mão de um recurso a mais, ou seja inserir mais um satélite, usaremos então, quatro satélites e respectivas pseudo-distâncias para definir um ponto de precisão através de intersecções de superfícies esféricas.

Figura 48 – Conceito tridimensional de trilateração.



Fonte: Gomes e Mendes (2006)

Geometricamente, duas superfícies esféricas em intersecção define um círculo e adicionando uma outra intersecção define-se dois pontos, porém, somente o que estiver mais próximo é factível. Desse modo, em se tratando de posicionamento por GPS e considerando que há a inexistência de erros nos valores produzidos, a partir do momento em que são conhecidas pelo menos três posições dos satélites e suas pseudodistâncias, determina-se a posição do utilizador em questão. A consideração de erros inerentes ao sistema GPS vai levar a que seja necessário um mínimo de quatro satélites para se calcular uma melhor precisão quanto à posição.

Faremos uma abordagem mais aprofundada do problema da determinação da posição do utilizador, levando-se em conta medições precisas, desprezando os erros intrínsecos ao sistema GPS. Temos, então, as coordenadas do i -ésimo satélite a serem dadas pelo vetor $R_i = [X_i \ Y_i \ Z_i]^T$ e a posição do utilizador dada por $r_u = [x_u \ y_u \ z_u]^T$. As pseudo-distâncias ρ_u^*1 , ρ_u^*2 e ρ_u^*3 serão escritas na forma:

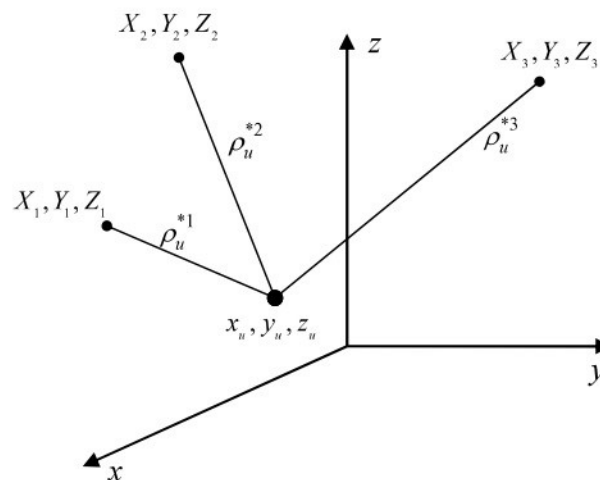
$$\rho_u^*1 = \sqrt{(X_1 - x_u)^2 + (Y_1 - y_u)^2 + (Z_1 - z_u)^2}$$

$$\rho_u^*2 = \sqrt{(X_2 - x_u)^2 + (Y_2 - y_u)^2 + (Z_2 - z_u)^2}$$

$$\rho_u^*3 = \sqrt{(X_3 - x_u)^2 + (Y_3 - y_u)^2 + (Z_3 - z_u)^2}$$

Uma vez que existem três incógnitas, x_u , y_u e z_u , e três equações possíveis de resolver o problema, e como visto acima contém equações não-lineares podem obter-se várias soluções, contudo, como já foi dito, apenas uma delas é factível, a mais próxima da superfície terrestre.

Figura 49 – Determinação da posição do utilizador.



Demonstração Algébrica:

Vamos supor que temos três satélites com coordenadas conhecidas:

$S_1(x_1, y_1, z_1)$, $S_2(x_2, y_2, z_2)$ e $S_3(x_3, y_3, z_3)$, e o receptor cujas coordenadas desconhecemos: $R(x, y, z)$.

A distância entre o receptor e o i –ésimo satélite (d_i) é proporcional ao tempo que o sinal leva para viajar do satélite ao receptor. Pode-se expressar isso como:

$$d_i = c \cdot t_i$$

onde c é a velocidade da luz e t_i é o tempo que o sinal leva para viajar do i –ésimo satélite ao receptor.

A equação geral da esfera em coordenadas tridimensionais é dada por:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = d_i^2$$

Para cada um dos três satélites, você terá três equações que formam um sistema de equações.

Ao resolver esse sistema de equações, você encontrará as coordenadas (x, y, z) do receptor. Note que pode haver duas soluções, uma das quais está mais próxima da Terra e é a posição correta.

Essa demonstração algébrica modela o problema usando equações da esfera e resolve o sistema de equações para encontrar as coordenadas do receptor.

EXEMPLO

Suponha que temos três satélites com as seguintes coordenadas e distâncias medidas até um receptor:

Satélite 1: $S_1(1,1,0)$, $d_1 = 5$

Satélite 2: $S_2(7,1,0)$, $d_2 = 3$

Satélite 3: $S_3(4,5,0)$, $d_3 = 4$

Queremos determinar as coordenadas do receptor $R(x, y, z)$.

A equação da esfera para cada satélite pode ser escrita como:

Para o Satélite 1: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5^2$

Para o Satélite 2: $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3^2$

Para o Satélite 3: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 4^2$

Construindo e resolvendo um sistema de equações, podemos encontrar as coordenadas (x, y, z) do receptor. Uma das formas mais utilizadas é resolver a primeira e a

segunda equação eliminando z e, em seguida, o sistema resultante será resolvido com a terceira equação. Vejamos:

Primeiro passo: Resolvendo a primeira e a segunda equação para eliminar z :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5^2$$

$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3^2$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

$$(x - 1)^2 - (x - 7)^2 + (y - 1)^2 - (y - 1)^2 = 5^2 - 3^2$$

Simplificando e expandindo os termos:

$$x = \frac{16}{3}$$

Segundo passo: Substituindo o valor de x nas equações:

$$\left(\frac{13}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5^2$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3^2$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 4^2$$

Resolvendo a primeira e a terceira equação para eliminar z :

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3^2$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 4^2$$

Subtraindo a segunda equação da primeira:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + (y - 5)^2 - (y - 1)^2 = 4^2 - 3^2$$

Simplificando:

$$-1 - 8y + 24 = 7 \therefore y = 2$$

Terceiro passo: Substituindo o valor de x e y em qualquer uma das equações:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (2 - 5)^2 + z^2 = 4^2$$

$$\frac{16}{9} + 9 + z^2 = 16 \therefore z = \frac{\sqrt{47}}{3}$$

Portanto, as coordenadas do receptor são:

$$R\left(\frac{16}{3}, 2, \frac{\sqrt{47}}{3}\right) \text{ ou } R(5,3; 2; 2,28)$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta uma síntese dos acontecimentos históricos relativos e alheios à atividade matemática do século XVII que contribuíram para que a descoberta da geometria analítica, atribuída exclusivamente, por diversos historiadores, à Descartes. Tal síntese orientou-se por estudos da historiografia do século XX, considerando os antecedentes históricos causais. Essa imersão de conhecimentos matemáticos, da antiguidade até a contemporaneidade, propiciou a compreensão do significado da descoberta da geometria analítica, que revelaram tendências naturais da atividade matemática a partir da terça parte do século XVII.

Nesse levantamento histórico para explicar o surgimento da geometria analítica foram descritas transformações conceituais que atravessaram os séculos e que contribuíram, na visão de Boyer, para o surgimento da geometria analítica. A epistemologia de Fleck retrata os estilos de pensamento que conduziram a atividade matemática das épocas associadas a essas transformações conceituais.

A intervenção de métodos algébricos na geometria foi uma das grandes mudanças ocorridas na atividade matemática do século XVII, em que a Introdução de Fermat e a Geometria de Descartes influenciaram o desenvolvimento da geometria para além da estrada real restrita de Euclides no seu diálogo lendário com Ptolomeu I.

Os trabalhos de Descartes e Fermat foram exitosos para a concretização do potencial da atividade matemática seiscentista ao estabelecer relações mútuas entre equações indeterminadas e linhas geométricas, favorecendo o surgimento do método das coordenadas, um dos fundamentos da geometria analítica, que também sofreu a interferência de fatores socioculturais, a exemplo da circulação de pensamento entre os matemáticos da época através de cartas.

A partir da publicação da Geometria de Descartes, na qual o método analítico passou a se destacar perante o método sintético da tradição, Fermat decidiu não publicar a Introdução, não havendo justificativa plausível conforme o pensamento de historiadores clássicos da matemática, que ao mesmo tempo colocam Fermat e Descartes como tributários nas invenções das suas geometrias.

O rompimento de Descartes com a aura estilística dominante, a qual Fermat compartilhava em grande medida, contribuiu para que o sábio de La Flèche publicasse sem temor a Geometria e Fermat, e devido ao receio em publicar a Introdução alguns historiadores da matemática atribuíram à Descartes, de forma exclusiva, a paternidade da geometria analítica.

7. REFERÊNCIAS

- ABREU, L. A. de F. A história da matemática nos livros-texto de Cajori, Eves, Boyer e Struik. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 13, n. 2, p. 280-297, jul /dez 2020.
- ASTH, R. **Geometria analítica**. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/geometria-analitica-resumo/>. Acesso em: 03 out. de 2023.
- BERNARDI, J.V.E. & LANDIM, P.M.B. **Aplicação do Sistema de Posicionamento Global (GPS) na coleta de dados**. DGA,IGCE,UNESP/Rio Claro, Lab. Geomatemática, Texto Didático 10, 31 p., 2002. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/aplicada/textodi.html>. Acesso em: 15 out. 2023.
- BOYER, Carl B. **History of Analytic Geometry**. Massachusetts: Courier Corporation, 2012a.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 2012b.
- DESCARTES, R. Discurso do Método. In: DESCARTES, R. **Os Pensadores**. São Paulo: Nova Cultural, 2000.
- DESCARTES, R. A Geometria. In: DESCARTES, R. **Obras Escolhidas**. São Paulo: Perspectiva, 2010.
- DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. **Álgebra e geometria projetiva analítica na Inglaterra dos anos 1841 – 1853**. Madrid, v. 38, p. 11-31, 2015.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5ª ed. Campinas, Editora da Unicamp. 2011.
- FERMAT, P. **Lieux Plans Et Solides**. In: FERMAT, Pierre. Paris: Gauthier Villars, 1891/1912.
- FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T. **Aulas de Física: Mecânica**, Aula 61, Lançamento oblíquo. São Paulo: Atual Editora, 2003.
- FLECK, L. **Gênese e desenvolvimento de um fato científico**. Belo Horizonte: Fabrefactum, 2010.
- GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- GOMES, A. B. B.; MENDES, R. M. B. DE P. **Técnicas avançadas para posicionamento global baseadas em GPS**. 2006. 113 f. Relatório de Trabalho Final de Curso (Graduação em Engenharia Electrotécnica e Computadores) - Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2006.

GONÇALVES, Carlos H. B.; Claudio POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. **Revista Matemática Universitária**, v. 47, p. 16-24, 2009.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar, v. 1:** conjuntos, funções. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, v.3:** trigonometria. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

JÚNIOR, J. S. da. **Decomposição vetorial**. Brasil Escola, 2023. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/decomposicao-vetorial.htm>. Acesso em: 03 de outubro de 2023.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KUADROS. **Retrato Estimado de René Descartes**. Disponível em: <https://kuadros.com/pt-br/products/retrato-estimado-de-rene-descartes-sebastien-bourdon>. Acesso em: 15 out. 2023.

MALTA, A. de D. **O surgimento da geometria analítica no século XVII:** debate histórico sobre questões referentes à sua descoberta. 2015. 155 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Belo Horizonte/MG, 2015.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Função polinomial**. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcao-polinomial.htm>. Acesso em: 15 out. 2023.

OLIVEIRA, M. C. A. de; FRAGOSO, W. da C. História da Matemática: história de uma disciplina. **Diálogo Educacional**. Curitiba: Universitária Champgnat, PUCPR, v. 11, N.3, 2011.

POMPEO, J. N.; DOLCE, O. **Fundamentos da Matemática Elementar, v. 10:** geometria espacial - posição e métrica. 7 ed. São Paulo: Atual, 2013.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SILVA, E. N.; DE SOUZA LIMA, A. C.; DE OLIVEIRA, T. S. P. Estudo da álgebra: o desenvolvimento histórico da formalização simbólica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 347–356, 2021. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2851>. Acesso em: 15 out. 2023.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

VIVIAN, L.C. **Blog recordando matemática: a matemática simples e descomplicada!** São Paulo, 2014. Disponível em:
<http://recordandomatematica.blogspot.com.br/2014/07/oparadoxo-de-zenon.html>. Acesso em:
08 out. 2023.

QUEIROZ, É. de A. **O uso do GPS como recurso pedagógico para o estudo de elementos da Geometria Analítica.** 2016. 86 f. Dissertação - (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte/MG, 2016.