INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS MACEIÓ
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALISSON DE MELO GONÇALVES

PROGRAMAÇÃO LINEAR: DA ENGENHARIA DE PRODUÇÃO À SALA DE AULA

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

ALISSON DE MELO GONÇALVES

PROGRAMAÇÃO LINEAR: DA ENGENHARIA DE PRODUÇÃO À SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento
Coorientador: Prof. Me. Hugo Santos Nunes

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
***Campus* Maceió**
Biblioteca Benevides Monte

516
G237p Gonçalves, Alisson de Melo.

Programação linear [recurso eletrônico] : da engenharia de produção à sala de aula / Alisson de Melo Gonçalves. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 2,15 MB). – 2025.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader.
Modo de acesso: Internet.
Orientação: Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento.
Coorientador: Prof. Me. Hugo Santos Nunes.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, Maceió, 2025.

1. Matemática. 2. Engenharia de produção. 3. Geogebra. 4. Método gráfico. I. Título.

Franciane Monick Gomes de França
Bibliotecária – CRB 4/1831

ALISSON DE MELO GONÇALVES

PROGRAMAÇÃO LINEAR: DA ENGENHARIA DE PRODUÇÃO À SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 16/06/2025.

BANCA EXAMINADORA:

gov.br Documento assinado digitalmente
ARLYSON ALVES DO NASCIMENTO
Data: 10/07/2025 10:03:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento (Orientador)
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

gov.br Documento assinado digitalmente
HUGO SANTOS NUNES
Data: 10/07/2025 09:03:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Hugo Santos Nunes (Coorientador)
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

gov.br Documento assinado digitalmente
ENALDO VIEIRA DE MELO
Data: 10/07/2025 09:56:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Enaldo Vieira de Melo
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

Dedico este trabalho, e todo o esforço empenhado em sua realização, a Deus, fonte de força, sabedoria e perseverança. Sem Sua presença constante em minha vida, nada disso teria sido possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido força, sabedoria e fé ao longo desta caminhada. Foi Ele quem me sustentou nos momentos de aflição e cansaço, e me honrou com mais essa conquista: a conclusão de uma nova graduação. Sem Sua presença constante, este sonho não teria sido possível.

À minha família, minha eterna gratidão. Em especial, à minha mãe, Rita de Cássia, à minha avó Eunice e à minha tia Valderez, que sempre estiveram ao meu lado, me incentivando e oferecendo todo o suporte necessário para que eu prosseguisse neste curso. O apoio, o cuidado e o amor de vocês foram fundamentais em cada etapa dessa jornada.

Em um agradecimento especial, registro minha profunda gratidão à minha esposa. Durante esses quatro anos, ela foi minha base, meu incentivo e minha maior parceira. Foi ela quem, com carinho e determinação, me inscreveu no curso de Matemática, acreditando em meu potencial. Seu apoio incondicional e sua presença firme foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

Agradeço também aos meus orientadores, que contribuíram diretamente para a concretização deste trabalho. Ao meu orientador Arlyson Alves do Nascimento, pela orientação atenta e competente, enxergando sempre todo o potencial das minhas ideias e mostrando o melhor caminho que eu pudesse trilhar. Ao professor Hugo Nunes, meu coorientador, que gentilmente disponibilizou seu tempo para colaborar com a construção deste TCC no Overleaf. E ao professor Enaldo, pelo suporte oferecido durante a aplicação da proposta didática no Ensino Médio. A colaboração de cada um de vocês foi imprescindível para o desenvolvimento e finalização deste trabalho.

"Se procurar a sabedoria como se procura a prata
e buscá-la como quem busca um tesouro escondido,
então você entenderá o que é temer o Senhor
e achará o conhecimento de Deus".
Provérbios 2:4-6

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo analisar a Programação Linear (PL) sob dois enfoques: o potencial dessa ferramenta para tomada de decisões no âmbito da Engenharia de Produção e sua inserção no Ensino Médio como ferramenta didática. Inicialmente, são apresentados os fundamentos teóricos da PO e da PL, destacando sua relevância histórica e prática para a otimização de recursos, a maximização de lucros e a tomada de decisões em ambientes produtivos. A partir disso, é explorado o método gráfico de resolução de problemas de PL com duas variáveis e a modelagem matemática envolvida nesse processo. Na segunda parte do trabalho, foi desenvolvida e aplicada uma proposta de sequência didática voltada para estudantes do 3º ano do Ensino Médio, no Colégio Inovar (Atalaia-AL), utilizando metodologias ativas e ferramentas tecnológicas como o GeoGebra e o Solver do Excel. A proposta incluiu aulas introdutórias, atividades em grupo e resolução de problemas contextualizados, com foco no desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de tomada de decisão dos alunos. A análise dos resultados revelou uma melhora significativa no desempenho dos estudantes e um aumento no interesse pela Matemática, especialmente ao perceberem a aplicabilidade da PL em situações do cotidiano. Os dados coletados por meio de atividades práticas e entrevistas com os alunos indicaram que o uso de tecnologias digitais no ensino de PL facilita a visualização dos conceitos e contribui para um aprendizado mais significativo e interativo. Conclui-se que a Programação Linear, além de ser uma ferramenta essencial na Engenharia de Produção, pode ser integrada com sucesso ao contexto escolar, desde que sejam adotadas estratégias pedagógicas adequadas, capazes de aproximar o aluno da realidade e do mundo do trabalho.

Palavras-chaves: programação linear; ensino médio; engenharia de produção; geogebra; método gráfico.

ABSTRACT

This Final Undergraduate Paper aims to analyze Linear Programming (LP) from two perspectives: its application in Production Engineering and its integration into high school as a didactic tool. Initially, the theoretical foundations of Operational Research and Linear Programming are presented, highlighting their historical and practical relevance for resource optimization, profit maximization, and decision-making in productive environments. From this basis, the graphical method for solving LP problems with two variables and the mathematical modeling involved in this process are explored. In the second part of the study, a didactic sequence was developed and implemented for 3rd-year high school students at Colégio Inovar (Atalaia-AL), using active methodologies and technological tools such as GeoGebra and Excel Solver. The proposal included introductory lessons, group activities, and the resolution of contextualized problems, focusing on developing students' logical reasoning and decision-making skills. The analysis of the results revealed a significant improvement in students' performance and an increased interest in mathematics, especially when they recognized the applicability of Linear Programming in real-life situations. The data collected through practical activities and student feedback indicated that the use of digital technologies in teaching LP facilitates the visualization of concepts and contributes to a more meaningful and interactive learning experience. It is concluded that Linear Programming, in addition to being an essential tool in Production Engineering, can be successfully integrated into the school context, provided that appropriate pedagogical strategies are adopted to bring students closer to real-world applications and professional environments.

Keywords: linear programming; high school; production engineering; geogebra; graphical method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PL	Programação Linear
PO	Pesquisa Operacional
PCP	Planejamento e Controle da Produção
EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
FEI	Faculdade de Engenharia Industrial
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Revolução Industrial marcou um ponto importante na história da humanidade, transformando os modos de produção, consumo e organização do trabalho. Com o avanço das máquinas e a consequente redução da dependência do esforço físico humano, a produção industrial foi intensificada, tornando-se cada vez mais eficiente. Essa nova dinâmica impulsionou o crescimento do comércio e consolidou o consumo como um elemento central das sociedades modernas.

À medida que a competitividade se destacava, surgiu uma busca constante por qualidade, inovação e redução de custos. Nesse cenário, tornou-se imprescindível que as empresas, tanto pequenas quanto grandes, adotassem práticas cada vez mais estratégicas de investimento, planejamento, e tomadas de decisão a fim de se manterem relevantes e sustentáveis em um mercado em constante transformação.

Perante toda essa acirrada competitividade mercadológica as organizações buscam estratégias para garantir que sua produtividade seja cada vez mais eficiente, satisfazendo as necessidades dos consumidores bem como, aumentando a lucratividade e consequentemente, diminuir os custos durante o processo produtivo. Dentre as várias atividades e estratégias competitivas adotadas pelas empresas, a otimização de seus processos como forma de reduzir os custos e padronizar seus procedimentos a fim de garantir a qualidade em todas as suas etapas garantindo uma melhoria contínua para as organizações.

Diante de todo esse cenário competitivo, a programação linear funciona como uma ferramenta na tomada de decisão, buscando diminuir desperdícios, evitar retrabalhos, buscando ser assertivo nas melhores escolhas que impactam de forma direta no produto final.

A Pesquisa Operacional é uma área que tem ganhado destaque nas engenharias e demais ciências aplicadas por oferecer soluções matematicamente embasadas para problemas complexos de tomada de decisão. Dentro desse campo, a Programação Linear se destaca como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de otimização, sendo amplamente utilizada em setores como logística, produção, distribuição de recursos e gestão estratégica. No entanto, mesmo com sua relevância prática, esse conteúdo ainda é pouco explorado de maneira aplicada no ensino médio, onde muitas vezes a matemática é apresentada de forma abstrata e descolada da realidade dos alunos.

Como a PL, por meio de ferramentas matemáticas como o método gráfico, pode ser aplicada à resolução de problemas reais de maximização e otimização e de que maneira as tecnologias digitais/GeoGebra e o Excel contribuem para o ensino e aprendizagem de Programação Linear?

Este trabalho propõe uma reflexão sobre sobre a matemática aplicada no contexto da pesquisa operacional, destacando suas influências positivas na maximização da eficiência produtiva. Serão analisados modelos matemáticos que possam otimizar o uso de recursos, avaliando o impacto na melhoria da produtividade e na redução de erros. Em um ambiente onde a qualidade e a competitividade são diferenciais cruciais, a matemática aplicada se apresenta como um instrumento indispensável para o desenvolvimento de processos produtivos mais eficientes e eficazes.

O objetivo geral se concentra em analisar a aplicação da PL, com ênfase no método gráfico, como ferramenta de resolução de problemas de otimização na Pesquisa Operacional, propondo sua adaptação para o ensino médio a fim de promover a aprendizagem significativa da matemática. E os objetivos específicos são: compreender os fundamentos teóricos da Programação Linear e sua relação com a Pesquisa Operacional; resolver modelos de Programação Linear com as ferramentasa GeoGebra e o Solver do Excel, envolvendo maximização com uso do método gráfico; Adaptar problemas resolvidos com Programação Linear para o nível do ensino médio, utilizando linguagem acessível e abordagem contextualizada.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, será apresentado o referencial teórico que fundamenta a pesquisa desenvolvida sobre Programação Linear. Inicialmente, são abordados os conceitos históricos sobre pesquisa operacional, engenharia de produção e fundamentos matemáticos que sustentam essa área, enfatizando a importância da PL na resolução de problemas do cotidiano e no desenvolvimento do raciocínio lógico.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO DA PESQUISA OPERACIONAL

A revolução industrial fez a população mundial consumir cada vez mais, com o aumento das máquinas e menor trabalho braçal, facilitando a comercialização e alavancando a produção das pequenas e grandes indústrias, e com isso, a procura pela qualidade e o menor custo foi sempre crescendo, obrigando todo grande empresário a investir, planejar e controlar.

A Pesquisa Operacional (PO) surgiu durante a Segunda Guerra Mundial como uma abordagem científica para aperfeiçoar o uso de recursos militares. Com a evolução do conflito, os exércitos britânico e norte-americano formaram equipes multidisciplinares compostas por matemáticos, engenheiros e cientistas com o objetivo de desenvolver soluções estratégicas para desafios logísticos e operacionais. Entre os problemas analisados estavam a otimização das rotas de patrulha de submarinos, estratégias eficientes para o uso de radares e a maximização da eficiência na alocação de aviões de guerra e munições. O sucesso dessas abordagens demonstrou o potencial da Pesquisa Operacional na resolução de problemas complexos, levando à sua adoção em setores civis e industriais no período pós-guerra.

De acordo com (MARINS, 2011), a pesquisa operacional é um método científico que promove ferramentas fundamentais para o uso de tomada de decisões. Na segunda guerra mundial, era necessário um raciocínio lógico rápido e imediato para tratar problemas complexos, cujas soluções poderiam impactar diretamente o curso do conflito e salvar vidas. Diante desse cenário, como eram tomadas as decisões para determinadas situações?

Segundo (LÓSS, 1981), o início da PO aconteceu no ocidente, como uma ferramenta militar para a segunda grande guerra mundial, mas essa ideia começou a ganhar força no Brasil em meados do século XX, por volta do ano de 1957 na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), quando foi criado o primeiro curso de engenharia de Produção do Brasil. A introdução de ferramentas como o método Simplex para a programação Linear contribuiu significativamente para o desenvolvimento e o aprimoramento da disciplina, ampliando sua aplicação em diversos setores industriais e acadêmicos.

A Pesquisa Operacional emergiu da necessidade de decisões eficientes na Segunda Guerra Mundial, onde equipes multidisciplinares aplicaram métodos científicos para resolver problemas militares complexos. O sucesso dessas abordagens demonstrou o potencial da PO para a tomada de decisões estratégicas em situações críticas.

A relevância da Pesquisa Operacional ultrapassou o contexto militar, encontrando potencial no ambiente empresarial pós-guerra, com o desejo por aprimorar a eficiência e a competitividade. Nesse sentido, (HILLIER; LIEBERMAN, 2013, p. 4) destacam que "a essência da pesquisa operacional é a aplicação do método científico para o processo de tomada de decisões". Essa definição cobre a transição da PO de uma ferramenta de apoio militar para uma disciplina fundamental na gestão e otimização de processos em diversos setores da economia. A introdução e o desenvolvimento de técnicas como a programação linear, exemplificada pelo método Simplex, forneceram aos tomadores de decisão ferramentas quantitativas robustas para lidar com problemas complexos de alocação de recursos, planejamento da produção, logística e muitos outros, impulsionando o crescimento e a sofisticação da indústria global.

2.2 ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Planejar é algo fundamental, não só para uma área profissional, mas sim, para tudo onde se procura ter êxito no final de um determinado projeto, e quando se tem controle disso, unisse o útil ao agradável; isso é a base inicial que o Planejamento e Controle da Produção têm a propor nas empresas.

A Engenharia de Produção é um campo multidisciplinar que visa projetar, aperfeiçoar e gerenciar sistemas integrados de produção de bens e serviços. Ela combina conhecimentos de matemática, física, estatística, economia, administração e outras áreas para otimizar processos produtivos, aumentar a eficiência organizacional e melhorar a qualidade de produtos e serviços.

De acordo com (FAÉ; RIBEIRO, 2005) a primeira faculdade a ofertar o curso de Engenharia de Produção no Brasil foi a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, que iniciou suas atividades em 1957, sob a coordenação do professor Ruy Aguiar da Silva Leme. Cerca de dez anos depois, inspirando-se nesse modelo, a Faculdade de Engenharia Industrial (FEI), localizada em São Bernardo do Campo, também passou a oferecer o curso, em 1967.

O planejamento é parte fundamental da engenharia de produção, traçar um caminho é determinar meios e ligações que um projeto irá ter ao longo de todo o seu percurso. Buscar ser eficiente nessa trajetória é trivial, pois os meios que serão empregados ao projeto irão ser cruciais para o sucesso, desta forma, planejar de forma eficiente e eficaz é a etapa decisiva de qualquer inicio.

De acordo com (CHIAVENATO, 2008) O planejamento é uma função cabal em qualquer projeto, vale salientar que nela estarão, de forma antecipada, todos os objetivos a serem alcançados e todos os meios que deverão existir para que todas as metas sejam atingidas da melhor maneira possível. Planejar está voltado para a continuidade, com retidão, evidenciando o futuro. Sem o devido planejamento, a empresa fica completamente perdida.

Segundo (MOREIRA, 2012, p. 7), “o sistema de produção é um conjunto de atividades e operações inter-relacionadas envolvidas na produção de bens (no caso de indústrias) ou serviços”, é de grande valor para um sistema de produção que todos os setores estejam interligados, para que haja uma sintonia produtiva, podendo-se aumentar ou diminuir a produção, seguindo uma linha sazonal.

2.2.1 Programação Linear e sua importancia na engenharia de produção

Para alcançar o sucesso em qualquer empreendimento, o planejamento se configura como um alicerce essencial. Quando aliado a um controle eficaz, essa sinergia potencializa resultados, convergindo eficiência e satisfação. Essa premissa fundamental reside na base do Planejamento e Controle da Produção (PCP) nas organizações. Utilizando as ferramentas adequadas, podemos diminuir os desperdícios e evitar alguns tipos de gargalos, mantendo constante a produtividade e sua qualidade. A fim de organizar e coordenar os processos de fabricação, o setor de Planejamento e Controle da Produção (PCP) precisa planejar todas as suas atividades, elaborando um plano mestre de produção com base nas informações registradas sobre o controle de estoques.

A programação da produção tem como propósito determinar quanto e quando adquirir, fabricar ou montar cada item essencial para a composição dos produtos finais definidos pelo plano, porém, como é feita essa tomada de decisão, qual o momento ideal para definir qual produto deve ser produzido, ou qual irá atender melhor à demanda do mercado? Diante dessa situação, a programação Linear integra métodos matemáticos e estatísticos para auxiliar nessa tomada de decisão.

(LACHTERMACHER, 2016, p. 06) define essa tomada de decisão de forma precisa e coerente para o setor da produção:

> Podemos entender a tomada de decisão como o processo de identificação de um problema ou de uma oportunidade e a seleção de uma linha de ação para resolvê-lo. Um problema ocorre quando o estado atual de uma situação é diferente do desejado. Já uma oportunidade ocorre quando as circunstâncias oferecem a chance de um indivíduo ou de uma organização ultrapassar ou alterar seus objetivos ou metas.

Todo o caminho e embasamento expressado é para mostrar que o PCP está totalmente atrelado à qualidade. De forma paralela, a pesquisa operacional, junto com a programação matemática, apresenta-se como uma ferramenta indispensável para a melhor tomada de decisão. Afinal, escolhas coerentes podem definir o caminho da produção.

Para que as empresas alcancem eficiência e eficácia na produção, é essencial o uso de ferramentas gerenciais, além do planejamento e controle produtivo. A qualidade, embora sem definição exata, tem seu alcance ampliado à medida que se investe em conhecimento sobre o tema, o que contribui diretamente para a satisfação do cliente. Nesse contexto, ferramentas matemáticas têm grande potencial para melhorar a qualidade nas empresas. Em seu artigo, (SANTOS; ANTONELLI, 2011, p. 16) destacam a importância da estatística como um recurso fundamental para a gestão e o controle de qualidade:

> Sobre a importância dos padrões de qualidade de apresentação do produto, a gestão da qualidade enfoca a aplicação de métodos que visem avaliar a qualidade

> percebida pelo consumidor e identificar a qualidade que ele espera de um produto, uma vez que propriedades sensoriais e de forma de apresentação do produto são aspectos priorizados pelo consumidor. Para tanto, o uso da abordagem estatística pode ser de grande valia, não apenas por facilitar a identificação de requisitos do mercado, como também por contribuir para melhorar continuamente o nível de qualidade dos produtos; incrementar a inovação, diante da dificuldade de estabelecer vantagens competitivas; e reduzir custos, entre outros desperdícios.

É notável a importância de padrões focados na qualidade, visando sempre a melhor experiência do consumidor. A abordagem estatística, nesse contexto, revela-se crucial, pois permite uma análise precisa das necessidades do mercado e possibilita melhorias contínuas no nível de qualidade. Além disso, a programação linear, estatística, contribui para a inovação, um fator essencial em um cenário de competitividade, pois ajuda a estabelecer diferenciais para o produto.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA EM PROGRAMÇÃO LINEAR

Os principais modelos da pesquisa operacional são conhecidos como Programação Matemática, uma das mais relevantes categorias de modelos quantitativos, sendo amplamente utilizada para a solução exata de problemas de otimização. (GOLDBARG, 2005). Essa modelagem busca construir e resolver modelos quantitativos expressos matematicamente.

Um dos avanços mais relevantes no campo científico desde a metade do século passado foi à introdução da programação linear. Sua influência e ampliação no uso têm sido de grande benefício para governos e organizações de diversos setores, possibilitando, diante da restrição de recursos, a otimização de custos e o aumento dos ganhos.

De acordo com (HILLIER; LIEBERMAN, 2013, p. 58) "A maior parte de toda a computação cientifica realizada em computadores é dedicada a uso da programação linear". A programação linear (PL) é amplamente utilizada na computação científica, sendo essencial para a otimização de recursos em diversas áreas, como logística, economia e engenharia. Seu impacto é significativo, pois permite minimizar custos e maximizar lucros de forma eficiente. Embora a PL represente uma parte importante do uso computacional, a computação científica abrange outras aplicações, como simulações numéricas e aprendizado de máquina.

As variáveis de decisão são os elementos fundamentais em um modelo de programação matemática que representam as escolhas ou decisões a serem tomadas para resolver um problema de otimização. Elas indicam quantidades a serem determinadas, como a quantidade de produtos a fabricar, os recursos a alocar ou os investimentos a realizar.

Em um modelo matemático, as variáveis de decisão são normalmente representadas por símbolos como $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e devem atender a restrições e otimizar uma função objetivo, seja para minimizar custos ou maximizar lucros, eficiência ou outra métrica relevante.

Em diversos problemas de otimização, é necessário encontrar a melhor forma de alcançar um determinado objetivo dentro de certas limitações. Para isso, é preciso definir claramente o que se deseja otimizar e quais são as condições que devem ser respeitadas. Enquanto o objetivo estabelece a meta a ser alcançada, as restrições representam os limites e exigências que não podem ser ignorados. Esse equilíbrio entre otimização e viabilidade é essencial para a tomada de decisões eficientes em diferentes contextos.

Dois elementos essenciais na formulação desses problemas são a função objetivo e as restrições. A função objetivo define o valor a ser otimizado, podendo representar, por exemplo, a maximização de lucros ou a minimização de custos. Já as restrições são as condições impostas ao problema, como limites de recursos, capacidade de produção ou demanda do mercado.

A função objetivo pode ser definida pela seguinte expressão:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

Pode-se observar que essa função é a soma ponderada das variáveis de decisão $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ representam os pesos ou impactos de cada variável no resultado final. A função também está sujeita a restrições, as restrições são condições que as variáveis devem obedecer. Elas são expressas como desigualdades lineares:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_22x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &\leq b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

Cada equação representa uma limitação no problema, como recursos disponíveis, capacidade de produção ou orçamento. Os coeficientes a_{ij} indicam a influência de cada variável x_j na restrição i, enquanto os valores b_j representam os limites impostos.

A modelagem matemática é uma ferramenta poderosa para resolver problemas práticos de otimização, transformando situações do mundo real em equações matemáticas. Utilizando a programação linear, é possível tomar decisões eficientes, considerando objetivos e restrições. A seguir, apresentaremos exemplos práticos que ilustram como estruturar um problema, definir sua função objetivo e restrições, e encontrar a melhor solução possível.

Exemplo 2.1. *Certa empresa fabrica 2 produtos (P_1 e P_2). O lucro unitário de P_1 é de $R\$$ 1000 e o P_2 é de $R\$$ 1800. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P_1 e de* 30 *horas para fabricar uma unidade de P_2. O tempo anual da produção disponível para isso é* 1200 *horas. A demanda esperada para cada produto é de* 40 *unidades de P_1 e* 30 *unidades de P_2. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize o lucro nesses itens?*

Modelagem do problema: Sejam x_1 e x_2, respectivamente, os produtos 1 e 2 (P_1 e P_2), essas são as variáveis de decisão. O objetivo principal é maximizar o lucro dessa empresa. Desta forma, temos que

- Lucro de $P_1 = 1000x_1$.
- Lucro de $P_2 = 1800x_2$.
- Lucro total $L = 1000x_1 + 1800x_2$.

As variáveis de restrições são:

- Disponibilidade total das horas é de 1200 horas.
- Horas do $P_1 = 20x_1$.
- Horas de $P_2 = 30x_2$.
- Total de horas $T = 20x_1 + 30x_2$.
- Restrição: $20x_1 + 30x_2 \leq 1200$.

Sendo $x_1, x_2 \geq 0$. Logo, a função objetivo que maximiza o lucro dessa empresa, considerando as suas variáveis de restrições, é dada por:

$$L = 1000x_1 + 1800x_2,$$

com restrições técnicas impostas na produção:

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 1200 \\ x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 30 \end{cases}.$$

Substituindo os valores máximos para x_1 e x_2 na função objetivo que maximiza os lucros, é possível calcular a quantidade de cada produto dentro das restrições e saber o lucro total da empresa. Assim, para $x_1 = 40$ e $x_2 = 30$, temos que

$$L = 1000(40) + 1800(30) = 94000.$$

Esse é o plano ótimo de produção, alcançando um lucro máximo para a empresa, dentro das restrições, de $R\$ \ 94000$.

Exemplo 2.2. *Uma empresa fabrica 2 produtos. Na fabricação destes produtos, 3 insumos são críticos: as quantidades de matéria-prima e a mão de obra disponíveis. Dada a grande procura, estima-se que todas as unidades a serem produzidas, dos 2 produtos, poderão ser vendidas. O objetivo da empresa é obter o maior lucro possível com a produção e a venda das unidades dos produtos 1 e 2. Utilizando os conceitos de modelagem matemática e programação linear, qual a função objetivo e as restrições desse problema?*

Tabela 1 — Materiais e insumos do problema

	Produto 1	Produto 2	Disponibilidade
Matéria Prima A	70 kg/unidade	70 kg/unidade	4900 kg
Matéria Prima B	90 kg/unidade	50 kg/unidade	4500 kg
Mão de Obra Especializada P1	2 H-h/unidade		80 H-h
Mão de Obra Especializada P2		3 H-h/unidade	180 H-h
Lucro	20 R$/unidade	60 R$/unidade	

Fonte: Adaptado de Lachtermacher (2016)

Modelagem do problema: Utilizando os dados obtidos na Tabela **??**, podemos descrever as restrições do modelo da seguinte forma:

$$\begin{cases} 70x_1 + 70x_2 \leq 4900 \\ 90x_1 + 50x_2 \leq 4500 \\ 2x_1 \leq 80 \\ 3x_2 \leq 180 \end{cases},$$

onde a restrição de não negatividade pode ser definida por $x_1, x_2 \geq 0$. Logo, a função objetivo que maximiza o lucro é dada pela seguinte expressão:

$$Z = 20x_1 + 60x_2.$$

Além do modelo de Programação Linear, este problema pode ser resolvido graficamente ou pelo método Simplex. Ambas as abordagens permitem identificar o ponto ótimo e visualizar a solução que maximiza o lucro total. Nos próximos capítulos serão abordados os dois métodos, demonstrando o potencial da programação linear na tomada de decisão.

2.4 PROGRAMAÇÃO LINEAR

A Programação Linear é uma técnica matemática de otimização aplicada em diversas áreas, como economia e engenharia. Neste capítulo, exploraremos a resolução de problemas com duas variáveis pelo método gráfico, a modelagem matemática de problemas de maximização e os critérios de viabilidade das soluções ótimas. Além disso, abordaremos a importância da Programação Linear na resolução eficiente de problemas práticos. Um problema de Programação Linear pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \text{ sob as restrições } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ao qual $x_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

2.4.1 Programação Linear e o modelo de duas variáveis

De acordo com (ANDRADE, 2004), a Pesquisa Operacional apresenta a metodologia mais avançada para resolver problemas representados por modelos matemáticos. Esses problemas podem ter inúmeras variáveis; no entanto, nessa primeira seção serão analisados apenas problemas que envolvem duas variáveis e suas soluções.

A Programação Linear em um modelo de duas variáveis é uma técnica matemática utilizada para resolver problemas de otimização, onde se busca maximizar ou minimizar uma determinada função linear sujeita a um conjunto de restrições. Esses problemas podem ser representados graficamente em um plano cartesiano, facilitando a visualização da região de soluções possíveis e a identificação da melhor solução.

Em um modelo de duas variáveis, temos uma função objetivo, que representa o valor a ser otimizado, e um conjunto de restrições, expressas como inequações lineares, que definem os limites dentro dos quais a solução deve estar. A solução ótima ocorre em um dos pontos da região viável, que é a interseção das restrições no plano.

Segundo (TAHA, 2008) um problema de programação linear que envolve apenas duas variáveis é considerado raro, mas há aplicações práticas e, de forma pedagógica, será apresentado como uma forma de entender como funciona uma PL. Essa será a base para construir um conhecimento sólido no método simplex, que será detalhado nos próximos capítulos. O próximo exemplo de aplicação foi retirado do livro Pesquisa Operacional, do autor Hamdy A. Taha (2008), que será resolvido utilizando os conceitos de maximização.

Exemplo 2.3 (Produção de tintas da Reddy Mikks)**.** *Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de* 1 *tonelada. Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é* $2t$*. Analise a tabela a seguir:*

Tabela 2 — Produção de tintas

	Tinta para exteriores	Tinta para interiores	Disponibilidade máxima diária
Matéria-prima, M1	6	4	24
Matéria-prima, M2	1	2	6
Lucro por tonelada (R$ 1.000)	5	4	

Fonte: Pesquisa Operacional (Taha, 2008)

Todo modelo de programação linear tem três itens que deve ser observados com cuidado, são eles: Variáveis de decisão; Função objetivo e as restrições. Todos esses componentes foi detalhados no capitulo anterior. As variáveis de decisão é a solução que devemos encontrar, a função objetivo será a parte da questão que precisa ser otimizada respeitando todas as restrições do problema.

Vamos determinar cada item ilustrando em tópicos, a começar pelas variáveis de decisão, que iremos denotar como x_1 e x_2, onde:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Tinta para exteriores.} \\ x_2 &= \text{Tinta para interiores.} \end{aligned}$$

Para formular a função objetivo, consideremos que a empresa deseja maximizar o lucro total diário obtido com as duas tintas. De acordo com a tabela, o lucro total diário por tonelada (em milhares de reais) é representado por z. Assim, o objetivo da empresa pode ser expresso como:

$$Z = 5x_1 + 4x_2.$$

As variáveis de restrição podem ser traduzidas da questão como o limite diário da produção, isto é, a disponibilidade máxima diária possível tanto das tintas de exteriores e interiores, podemos representar ambas nas seguintes inequações:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

De acordo com o Taha (2008), "A primeira restrição relacionada à demanda estipula que o excesso da produção diária de tinta para interiores em relação à de tinta para exteriores, não deve ultrapassar 1 tonelada". Logo, podemos representar essa informação como um limite de mercado com a seguinte expressão:

$$x_2 - x_1 \leq 1.$$

De forma análoga, a segunda restrição com relação à demanda determina que o limite diário, em toneladas, deve ser inferior a 2, logo:

$$x_2 \leq 2.$$

Como o objetivo maior dessa empresa é aumentar sua lucratividade, as variáveis de restrição não podem assumir valores negativos, pois isso representaria um prejuízo para a empresa, logo, as variáveis $x_1, x_2 \geq$. Fazendo um breve resumo de todos os dados, podemos observar:

$$\text{Maximizar } Z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeito a

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 & (I) \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 & (II) \\ x_2 - x_1 \leq 1 & (III) \\ x_2 \leq 2 & (IV) \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Para encontrar a solução ótima, é necessário calcular os valores das variáveis x_1 e x_2, atendendo a todas as as restrições de demanda e produção impostas no problema. Utilizando os conceitos de programação linear, vamos igualar a zero cada uma das variáveis de decisão em todas as restrições.

- Restrição I:

  Para $x_1 = 0$, temos:

$$6x_1 \ + \ 4x_2 = 24$$

$$6 \cdot 0 \ + \ 4x_2 = 24$$

$$x_2 = \frac{24}{4}$$

$$x_2 = \ 6$$

  Para $x_2 = 0$, temos:

$$6x_1 \ + \ 4x_2 = 24$$

$$6x_1 \ + \ 4 \cdot 0 = 24$$

$$x_1 = \frac{24}{6}$$

$$x_1 = \ 4$$

- Restrição II:

  Para $x_1 = 0$, temos:

$$x_1 \ + \ 2x_2 = 6$$

$$0 \ + \ 2x_2 = 6$$

$$x_2 = \frac{6}{2}$$

$$x_2 = 3$$

  Para $x_2 = 0$, temos:

$$x_1 \ + \ 2x_2 = 6$$

$$x_1 \ + \ 2 \cdot 0 = 6$$

$$x_1 = 6$$

- Restrição III:

Para $x_1 = 0$, temos:

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$x_2 - 0 = 1$$

$$x_2 = 1$$

Para $x_2 = 0$, temos:

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$0 - x_1 = 1$$

$$x_1 = -1$$

A restrição (IV) envolve apenas uma variável de decisão, sendo assim, sua resolução será diretamente igual a 2, portanto, $x_2 = 0$. O que gera uma reta constante, que será representada no método gráfico posteriormente.

Para determinar a solução ótima, ou seja, a solução viável desse problema, que auxilia na tomada de decisão no setor de gestão da produção, será necessário aplicar a resolução gráfica. Esse método permitirá identificar o ponto ideal dentro da região viável do gráfico, conforme será apresentado na próxima subseção.

2.5 MÉTODO GRÁFICO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

A resolução gráfica da Programação Linear é um método utilizado para encontrar a solução ótima de problemas com duas variáveis, representando geometricamente as restrições e a função objetivo. O processo envolve traçar as inequações que definem as restrições, identificando a região viável onde as soluções possíveis estão contidas. Em seguida, a função objetivo é representada por uma reta que se desloca paralelamente até alcançar o ponto extremo da região viável que maximiza ou minimiza o valor da função.

De acordo com (LOPES; GALVÃO; FOGAÇA, 2022, p. 126) "A resolução de um modelo linear através do método gráfico inicia-se com o traçado dos dois eixos representativos de um gráfico bidimensional". É necessário construir o gráfico para observar a solução viável do problema, essa solução ótima sempre ocorre em um dos vértices do polígono construído, sendo determinada pela substituição dos pontos na função objetivo. Esse método visualiza claramente o comportamento do problema, facilitando a interpretação dos resultados.

O método gráfico é uma técnica visual usada para resolver problemas de programação linear com duas variáveis reais x e y, sujeitos a restrições lineares. Ele permite encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função objetivo dentro de um conjunto viável de soluções.

A principal vantagem do método gráfico está na simplicidade e na possibilidade de visualizar geometricamente a região de soluções admissíveis. Um problema típico de programação linear pode ser escrito na forma:

- **Função Objetivo**:
$$\text{Maximizar ou Minimizar } \; Z = ax + by.$$

- **Sujeito às restrições (sistema de inequações lineares)**:
$$\begin{cases} a_i x + b_i y \leq c_i, & \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}.$$

Essas restrições delimitam uma região viável no plano $\mathbb{R}^2$, composta pelos pares ordenados (x, y) que satisfazem todas as desigualdades simultaneamente. Cada inequação do sistema é tratada da seguinte forma:

- **Converter em equação:** inicialmente transformamos cada desigualdade em igualdade:
$$a_i x + b_i y = c_i$$
Observe que isso define uma reta no plano cartesiano.

- **Determinar o semiplano:** escolhemos um ponto de teste e verificamos se ele satisfaz a inequação. Isso nos informa qual dos lados da reta é a região válida.

- **Repetir para todas as inequações.**

- **Incluir as restrições de não negatividade**: $x \geq 0$ e $y \geq 0$ garantem que a solução esteja no primeiro quadrante.

A região viável é a interseção de todos os semiplanos determinados pelas inequações. Em geral, essa região é um polígono convexo fechado (ou ilimitado) no primeiro quadrante. Esse conjunto representa todas as soluções factíveis do problema. Matematicamente, essa região é o conjunto:
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \text{ satisfaz todas as restrições}\right\}.$$

Os vértices (ou pontos extremos) da região viável são obtidos resolvendo sistemas de equações formados pelas interseções de duas retas quaisquer:
$$\begin{cases} a_i x + b_i y = c_i \\ a_j x + b_j y = c_j \end{cases} \Rightarrow \text{solução do sistema}$$

Para n restrições (sem contar $x \geq 0$ e $y \geq 0$), pode haver até $\binom{n}{2}$ interseções possíveis, mas apenas aquelas que pertencem à região viável são consideradas.

A função objetivo $Z = ax + by$ é avaliada em cada vértice da região viável:

$$Z_i = ax_i + by_i,$$

onde seleciona-se o maior (ou menor) valor, conforme o tipo de problema:

- Se for maximização, escolhe-se o maior valor de Z_i;
- Se for minimização, escolhe-se o menor valor de Z_i.

A existência de uma solução ótima está diretamente relacionada à forma da região viável e à direção das linhas de nível da função objetivo:

- Se a região viável for não vazia e limitada (polígono fechado), sempre existirá pelo menos um ponto ótimo (de máximo ou mínimo), e esse ponto estará localizado em um dos vértices da região.
- Se a região viável for ilimitada, a função objetivo pode ou não atingir um valor máximo ou mínimo. Por exemplo:
  - Se as linhas de nível da função objetivo se afastam indefinidamente dentro da região viável, não haverá solução ótima (o valor de Z pode crescer ou decrescer indefinidamente).
  - Se houver um vértice mais extremo na direção de crescimento ou decrescimento de Z, esse será o ponto ótimo.
- Em casos particulares, vários pontos da região viável podem fornecer o mesmo valor ótimo para Z. Isso ocorre quando a função objetivo é paralela a um lado da região viável. Nesse caso, todos os pontos ao longo desse lado também serão soluções ótimas.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Programação Linear). *Se um problema de PL tem uma solução ótima, ela necessariamente ocorre em pelo menos um vértice da região viável. Se a região for ilimitada e a função objetivo puder crescer/decrescer indefinidamente, o problema não terá solução ótima finita.*

Geometricamente, temos que as curvas de nível da função objetivo são retas do tipo:

$$Z = ax + by = k,$$

onde essas retas têm a mesma inclinação (coeficiente angular $-\frac{a}{b}$) e podem ser transladadas paralelamente. A solução ótima ocorre no último ponto da região viável tocado por essa família de retas, na direção que aumenta (ou diminui) o valor de Z. Em outras palavras, para resolver o problema:

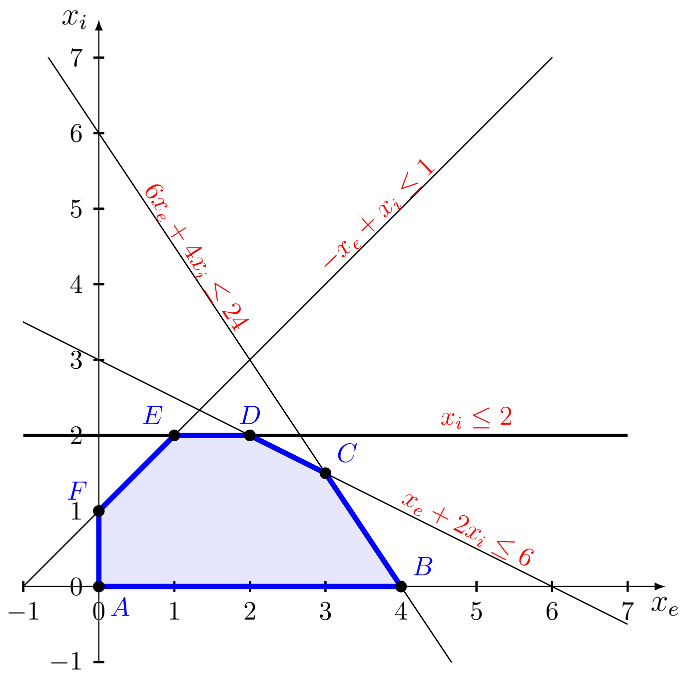
1. Desenha-se uma dessas retas para um valor arbitrário de Z (ex.: $Z = 0$).

2. Desloca-se a reta paralelamente na direção de crescimento de Z (para maximização) ou na direção oposta (para minimização), mantendo a mesma inclinação.
3. O último ponto de contato entre a reta deslocada e a região viável (ou pontos, no caso de múltiplas soluções) corresponde à solução ótima.

No Exemplo 2.3, a produção de tintas da Reddy Mikks foi limitada pela disponibilidade de insumos e matérias-primas, exigindo um cálculo detalhado das variáveis de restrição para encontrar a melhor solução. O objetivo é maximizar a produção, e a resolução gráfica desse problema proporciona uma visualização clara do espaço de soluções viáveis, facilitando a identificação do ponto ótimo que permitirá à empresa atingir sua capacidade máxima de produção.

Utilizando o método gráfico, esse processo inclui duas etapas principais. Primeiramente, determinar a região de soluções viáveis e, em seguida, determinar a solução ótima entre todos os pontos viáveis da região de soluções. Vale também ressaltar a não negatividade das variáveis de decisão x_1 e x_2, o eixo horizontal é representado por x_1 e o eixo vertical é representado por x_2. Cada reta representa uma restrição imposta no enunciado do problema.

Figura 1 – Solução gráfica.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Todos os pontos que estiverem dentro da região poligonal $ABCDEF$, fazem parte de uma solução viável, como ilustra a Figura 2 e, com isso, quaisquer pontos fora dessa região são inviáveis para uma tomada de decisão. Podemos observar que nessa região há infinitos pontos, ou seja, infinitas soluções viáveis, todavia, os pontos que proporcionam os melhores resultados produtivos, onde está a solução viável estão nos pontos de intersecção A, B, C, D, E e F, como mostra a Figura 2.

Cada ponto que delimita esse gráfico representa uma solução viável para o problema. Ao aplicar a função objetivo definida no início da resolução, é possível determinar qual desses pontos oferece o melhor resultado, permitindo otimizar a produção da empresa de forma eficiente.

Tabela 3 — Resolução gráfica

(x_1, x_2)	$z = 5x_1 + 4x_2$
$(0, 0)$	$z = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$
$(0, 1)$	$z = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$
$(1, 2)$	$z = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$
$(2, 2)$	$z = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 18$
$(3, 1.5)$	$z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1.5 = 21$
$(4, 0)$	$z = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 20$

Fonte: Elaborado pelo Autor (2025)

Observe os resultados na Tabela 3, onde a solução ótima ocorre para $x_1 = 3$ e $x_2 = 1,5$, resultando em $z = 5(3) + 4(1,5) = 21$. Isso representa uma produção diária de 3 toneladas de tinta para exteriores e 1,5 tonelada de tinta para interiores, gerando um lucro diário de $\text{R\$}\,21.000$.

De acordo com (LACHTERMACHER, 2016, p. 65), há um padrão a ser estabelecido para a maximização de uma função:

> Diremos que um problema de programação linear está em sua forma padrão se tivermos uma maximização da função-objetivo e se todas as restrições forem do tipo menor ou igual, bem como se os termos constantes e as variáveis de decisão assumirem valores não negativos.

Partindo por essa ideia, o problema do exemplo 2.2 da seção anterior, deixou uma lacuna em aberto para a solução viável por meio do método gráfico e simplex, a seguir, demonstraremos a solução gráfica desse problema.

A função objetivo do problema anterior, para maximizar o lucro dessa empresa, é dada por:

$$z = 20x_1 + 60x_2$$

Sujeito à

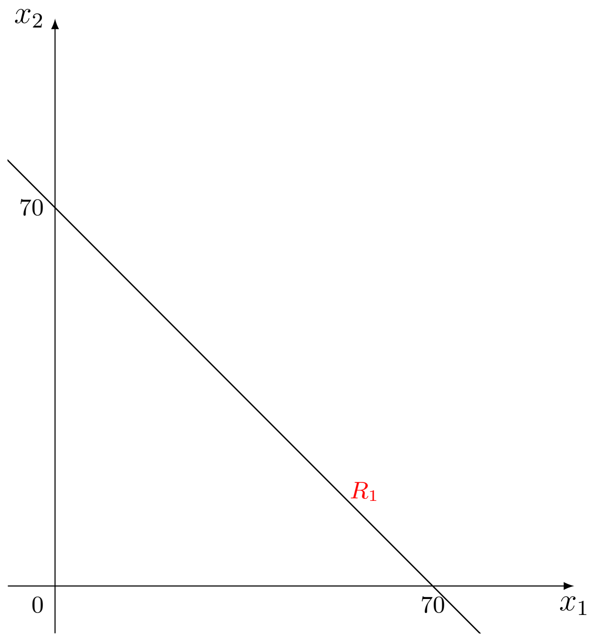
$$\begin{cases} 70x_1 + 70x_2 \leq 4900 & (I) \\ 90x_1 + 50x_2 \leq 4500 & (II) \\ 2x_1 \leq 80 & (III) \\ 3x_2 \leq 180 & (IV) \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Isolando as variáveis de decisão, podemos encontrar as retas que limitam o gráfico. Vamos considerar a primeira restrição na forma de igualdade:

$$70x_1 + 70x_2 \leq 4900.$$

Essa equação representa uma reta que passa pelos pontos $(70, 0)$ e $(0, 70)$. Assim, podemos traçá-la em nosso gráfico.

Figura 2 – Gráfico com a restrição I



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A Figura 3 representa graficamente a primeira restrição do modelo, $70x_1 + 70x_2 \leq 4900$, a qual delimita um dos limites da região viável do problema. Os pontos extremos dessa reta, $(70, 0)$ e $(0, 70)$, foram obtidos ao se atribuir zero a uma das variáveis e resolver a equação em relação à outra. Esse procedimento facilita a visualização da reta no plano cartesiano e permite, posteriormente, a definição do semiplano que satisfaz a desigualdade. A construção cuidadosa dessas representações gráficas é essencial para garantir a precisão da região solução.

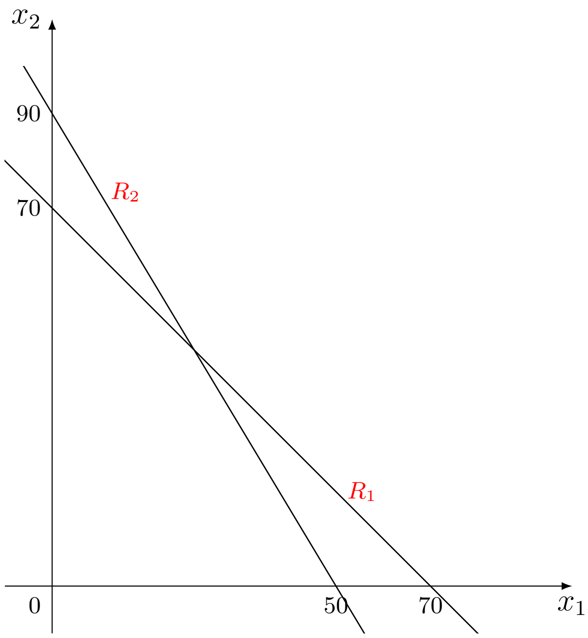
Essa abordagem será repetida para todas as restrições do problema, permitindo a sobreposição dos semiplanos e, com isso, a identificação da região viável — isto é, o conjunto de todas as soluções que atendem simultaneamente às condições impostas. A próxima etapa consiste na inserção da segunda restrição, $(90x_1 + 50x_2 \leq 4500)$, que será representada graficamente na Figura 4. Ao sobrepor os dois primeiros semiplanos, começa-se a esboçar a fronteira da região viável, que será concluída nas figuras subsequentes com as demais restrições do modelo.

Ao fazer mesmo procedimento com a segunda restrição, obtemos a seguinte expressão:

$$90x_1 + 50x_2 \leq 4500.$$

Essa segunda equação representa uma reta que passa nos pontos $(50, 0)$ e $(0, 90)$, traçando no gráfico:

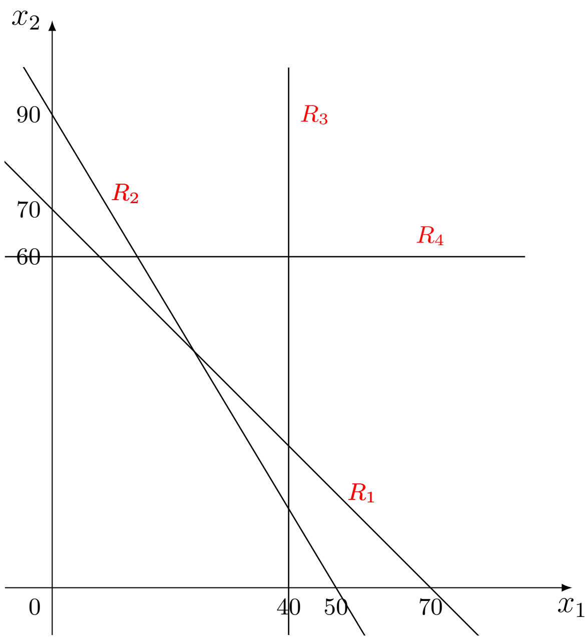
Figura 3 – Gráfico com a restrição II



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

As restrições (III) e (IV) são retas constantes que, visualmente no gráfico, cortam os eixos x_1 e x_2, podemos observar logo a seguir.

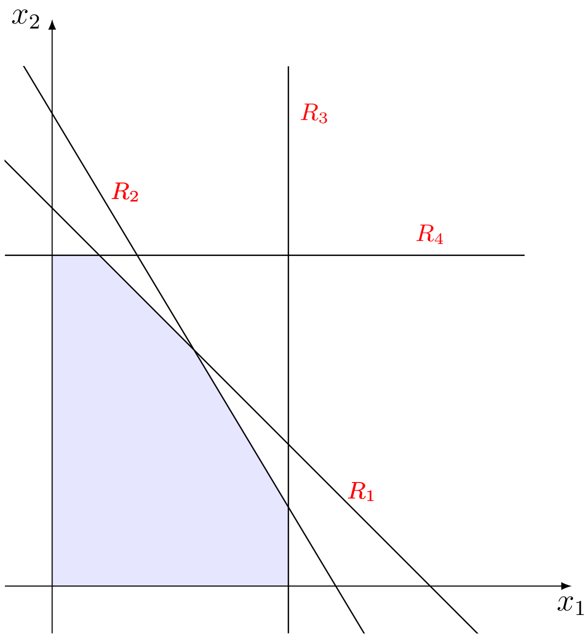
Figura 4 – Gráficos com todas as restrições



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Após traçarmos todas as restrições, obtemos o chamado Espaço Solução, que corresponde ao conjunto de todos os pontos que podem ser candidatos ao ponto ótimo. Em outras palavras, é a região formada pelos pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições do modelo.

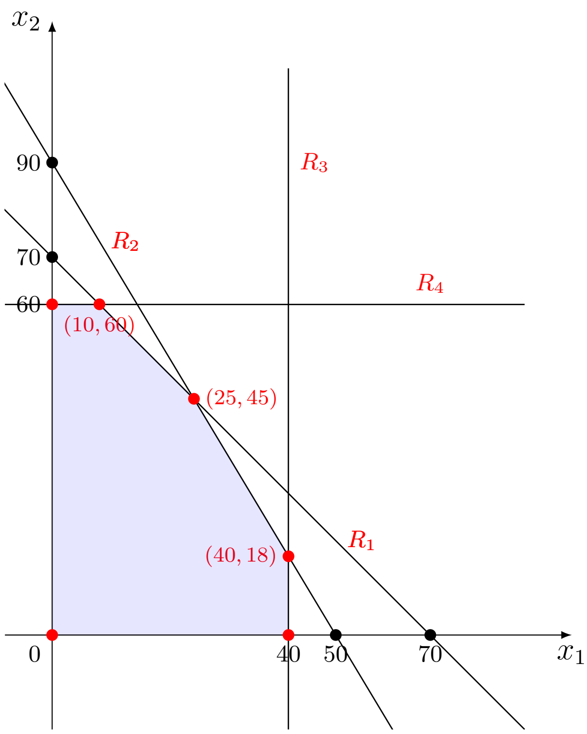
Figura 5 – Gráfico com a região da solução viável



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Ao analisar todos os pontos que limitam o gráfico com a região viável, ilustrada na figura 6, pode-se destacar as coordenadas desses pontos, como mostra o gráfico a seguir.

Figura 6 – Gráfico com as interseções



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Substituindo os valores dessas coordenadas nas variáveis de decisão mencionadas na função objetivo, encontraremos a solução viável desse problema.

Tabela 4 — Resolução gráfica 2

(x_1, x_2)	$z = 20x_1 + 60x_2$
$(0, 0)$	$z = 20 \cdot 0 + 60 \cdot 0 = 0$
$(0, 60)$	$z = 20 \cdot 0 + 60 \cdot 60 = 3600$
$(10, 60)$	$z = 20 \cdot 10 + 60 \cdot 60 = 3800$
$(25, 45)$	$z = 20 \cdot 25 + 60 \cdot 45 = 3200$
$(40, 18)$	$z = 20 \cdot 40 + 60 \cdot 18 = 1880$
$(40, 0)$	$z = 20 \cdot 40 + 60 \cdot 0 = 800$

Fonte: Elaborado pelo Autor (2025)

Em uma tomada de decisão que exige um alto rigor de precisão, para que alcance a maior produtividade da empresa, visando a maior eficiência lucrativa e reduzindo os custos, a solução gráfica nos permite visualizar que o ponto da coordenada $(10, 60)$ proporciona a maior lucratividade.

Até este ponto do trabalho, foi apresentada uma construção teórica detalhada sobre Programação Linear, partindo desde seus fundamentos históricos e aplicações na Engenharia de Produção até a modelagem matemática de problemas reais. Foram explorados os principais elementos que compõem um modelo de PL, como variáveis de decisão, função objetivo e restrições, além de se demonstrar, por meio de exemplos, como a formalização matemática permite alcançar soluções ótimas com clareza e precisão.

A partir desses fundamentos, foi possível evidenciar o papel do método gráfico como uma ferramenta acessível e eficaz na resolução de problemas com duas variáveis. A construção da região viável, a identificação dos vértices e a aplicação da função objetivo sobre esses pontos mostraram, de maneira visual, como a PL contribui para a tomada de decisões fundamentadas em critérios quantitativos. Esses elementos formam a base teórica que sustenta a proposta didática apresentada no capítulo seguinte, onde a Programação Linear será transposta para o ambiente escolar, com o objetivo de promover uma aprendizagem contextualizada e significativa para os alunos do Ensino Médio.

3 PROGRAMAÇÃO LINEAR COMO FERRAMENTA EDUCACIONAL NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, será explorado o potencial da Programação Linear como recurso pedagógico no Ensino Médio, mostrando sua importância para além da matemática formal. Essa abordagem revela uma ferramenta valiosa na formação dos estudantes, ao integrá-los a processos de tomada de decisão baseados na otimização de recursos e no atendimento a restrições bem definidas. Ao trabalharem com situações-problema que exigem modelagem matemática e análise de resultados, os alunos desenvolvem habilidades essenciais como o raciocínio lógico, o pensamento analítico e a capacidade de resolver desafios complexos de forma estruturada. Dessa forma, a Programação Linear não apenas contribui para a consolidação dos conteúdos curriculares, mas também aproxima os estudantes da realidade prática, estimulando uma postura crítica, estratégica e consciente diante das decisões que precisarão tomar ao longo da vida.

De acordo com (PAIVA, 2008) pode-se destacar o potencial da Programação Linear na resolução de problemas do cotidiano, enfatizando sua contribuição no desenvolvimento da capacidade de tomada de decisão durante a formação escolar dos alunos. Essa aplicação formal da matemática promove o desenvolvimento do raciocínio lógico, preparando os estudantes para os desafios do mercado de trabalho e incentivando uma postura analítica frente a situações que exigem escolhas estratégicas e bem fundamentadas.

Por outro lado, (NETO, 2010) propôs a inserção da Pesquisa Operacional no Ensino Médio, mas, ao deparar-se com a escassez de materiais didáticos voltados para essa finalidade, passou a orientar seus alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), em Ilhéus – Bahia, a elaborar apostilas de Programação Linear direcionadas à aplicação nesse nível de ensino. O objetivo do autor era viabilizar a introdução de conteúdos relacionados à Pesquisa Operacional no currículo escolar, promovendo a aproximação dos estudantes com essa área da matemática aplicada.

É notável que a base para a aplicação da Programação Linear no Ensino Médio é a resolução de problemas de forma eficiente. (POLYA, 1994, p. 94) faz uma definição sobre a resolução de problemas no prefácio de seu livro *"A arte de resolver problemas"*:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

A proposta de resolução de problemas apresentada por Polya mostra que os conhecimentos adquiridos em matemática devem ser utilizados como base para enfrentar novos desafios. Para isso, recomenda-se a aplicação de uma sequência sistematizada de procedimentos, que orientam o estudante na construção de soluções de forma estruturada e reflexiva.

Entretanto, faz-se necessário uma sequência didática bem organizada para implementar de forma eficaz todo esse conhecimento sobre Programação Linear no Ensino Médio. Pensando nisso, um dos primeiros autores a falar sobre sequência didática foi (ZABALA, 1998, p. 18), considerando como: "Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos, tanto pelos professores como pelos alunos".

A proposta visa criar um ambiente propício ao desenvolvimento da aprendizagem, no qual o aluno interage com o objeto de estudo de maneira investigativa, sendo desafiado a buscar soluções para os problemas apresentados. Pensando nessa perspectiva, para os alunos terem alguns recursos, visando aperfeiçoar essa busca investigativa, será introduzido previamente conceitos básicos dos softwares GeoGebra e do Solver no Excel.

3.1 METODOLOGIA

Neste trabalho, foi utilizada a revisão bibliográfica como abordagem metodológica principal, conforme definição de (FONSECA, 2002), para quem a metodologia compreende o estudo da organização e das estratégias adotadas na construção do conhecimento. Além disso, a pesquisa apresenta caráter qualitativo, com elementos de pesquisa participante, uma vez que o autor esteve diretamente envolvido na aplicação da proposta didática. O locus da pesquisa foi uma sala de aula maker do Colégio Inovar, localizado no município de Atalaia, Alagoas, onde foram desenvolvidas atividades práticas com estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Como instrumentos de coleta de dados, foram utilizados observações em sala, registros gráficos produzidos pelos alunos, aplicações de atividades em grupo e um questionário final aplicado por meio do Google Forms, no qual os discentes relataram suas percepções sobre o uso das ferramentas GeoGebra e Excel. A análise dos dados ocorreu de forma empírica e interpretativa, com base nas respostas dos alunos e nos resultados obtidos durante a resolução dos problemas, permitindo avaliar o impacto da proposta sobre o processo de ensino e aprendizagem da Programação Linear.

Com o objetivo de tornar o ensino de Programação Linear mais significativo, esta proposta didática foi elaborada para uma turma do 3º ano do Ensino Médio, priorizando a resolução de problemas reais por meio de ferramentas tecnológicas acessíveis e interativas. A proposta está fundamentada em uma sequência didática que busca integrar teoria e prática, estimulando o raciocínio lógico, a autonomia na aprendizagem e a capacidade de tomada de decisão dos alunos.

Essa sequência didática será construída com base em três etapas:

1. Aula introdutória sobre Programação Linear;
2. Introdução aos softwares GeoGebra e Excel, que vão auxiliar na resolução de problemas de Programação Linear;
3. Formação de duplas ou grupos para solucionar diversos problemas de Programação Linear.

A aula introdutória será o primeiro contato dos alunos com a ideia de Programação Linear, tendo em vista que eles já têm uma abstração de conteúdos matemáticos que são base para essa área, como sistemas lineares, geometria analítica, entre outros, utilizando a questão do livro do ensino médio (DINIZ; SMOLE, 2004).

A segunda etapa da sequência consiste na introdução ao uso de tecnologias digitais, com foco no software GeoGebra e em noções básicas do Microsoft Excel. Os estudantes serão inicialmente familiarizados com o ambiente do GeoGebra, explorando suas funcionalidades gráficas, de modo a compreenderem a representação geométrica das restrições e das regiões viáveis em problemas de Programação Linear.

A terceira proposta é a parte prática de tudo que os alunos aprenderam. Essa etapa consiste na aplicação de cinco questões retiradas do livro *"Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões"* e uma questão modelada com problemas da região local.

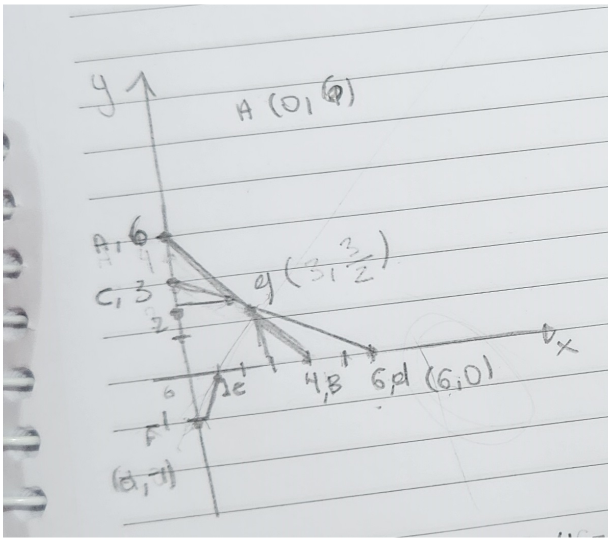
3.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, são apresentados e analisados os resultados obtidos a partir da aplicação prática da proposta didática sobre Programação Linear, desenvolvida com estudantes do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Inovar, localizado no município de Atalaia-AL. A atividade teve como objetivo principal verificar o potencial do ensino dessa temática por meio de metodologias ativas, com o uso de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra e o Excel (com o recurso Solver), promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada. A seguir, descrevem-se as etapas da aplicação, as percepções observadas em sala de aula, o desempenho dos alunos frente aos desafios propostos e as reflexões pedagógicas decorrentes da experiência.

Inicialmente, foi introduzido um breve panorama histórico e metodológico sobre Programação Linear. Durante essa aula introdutória, os alunos foram convidados a se posicionar como gestores, refletindo sobre a importância de tomar decisões que podem determinar o sucesso ou o fracasso de uma empresa. Com esse ponto de partida, foi proposta uma atividade prática envolvendo duas restrições, na qual os alunos deveriam resolver o problema utilizando apenas os conceitos trabalhados em sala, sem o auxílio de recursos tecnológicos.

Ao observar um êxito, foi proposto que os alunos realizassem o Exemplo 3.1, resolvido anteriormente na seção de programação linear no Capitulo 3. Ao se depararem com um problema envolvendo quatro restrições, vários alunos apresentaram dificuldades, em busca da solução viável, entre eles: A falta de um papel milimétrico para a construção do gráfico, vários cálculos para isolar as variáveis, calcular as coordenadas dos vértices do polígono da região viável que não estão nos eixos x e y, etc. A imagem a seguir mostra um esboço criado por um dos discentes.

Figura 7 – Rascunho desenvolvido por um aluno.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Podemos observar as dificuldades citadas no paragrafo anterior, e, analisando o gráfico construído no método gráfico, é notório a discrepância do polígono construído entre as quatro variáveis mencionadas no problema para o polígono construído em sala de aula na primeira experiência dos alunos com PL.

3.2.1 GeoGebra e Excel como recurso didático

De acordo com (STEINMACHER *et al.*, 2011) o GeoGebra é um software que permite a construção dinâmica de elementos geométricos em um plano cartesiano, suportando também a inserção direta de equações e coordenadas, feitas em tempo real. Caires também destaca que uma das aplicações didáticas mais importantes do GeoGebra é a sua capacidade de representar geometricamente e algebricamente o mesmo objeto, com interatividade. Por essas características, o GeoGebra se mostra uma ferramenta excelente para o ensino e aprendizagem de funções matemáticas, pois permite visualizar dinamicamente os resultados em uma tela de computador.

É notório observar o potencial do GeoGebra no ensino da matemática. O destaque para a construção dinâmica de elementos geométricos e, principalmente, a interação entre representações geométricas e algébricas são pontos cruciais. Isso significa que os alunos não apenas veem um gráfico, mas também entendem como ele se relaciona com a equação que o descreve, e vice-versa. Essa capacidade de manipular e visualizar as mudanças em tempo real é um grande diferencial, especialmente no estudo de programação linear. O GeoGebra tira a matemática do abstrato, permitindo que os estudantes experimentem e descubram conceitos por si mesmos. É uma ferramenta que realmente fomenta uma compreensão mais profunda e intuitiva, indo muito além da mera memorização de fórmulas.

Segundo (ABREU, 2002), o Microsoft Excel é uma ferramenta acessível, de fácil utilização e que favorece a aprendizagem interativa. Com base nessa perspectiva, optou-se por utilizar esse software na presente pesquisa como recurso didático para o ensino de Programação Linear. Apesar de estar amplamente disponível nos computadores, muitos alunos ainda desconhecem suas funcionalidades aplicadas à matemática, o que reforça a importância de explorá-lo como uma ferramenta rica para a construção do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades analíticas.

(CAMARGO, 2014) apresentou uma proposta de PL utilizando o GeoGebra e Excel para facilitar o entendimento dos alunos a respeito da solução ótima do método gráfico, A autora, ao longo de seu trabalho, realizou uma profunda revisão do arcabouço teórico da Programação Linear, com especial atenção ao método gráfico, que se mostra visualmente intuitivo. Além disso, ela examinou a relevância da inclusão da PL no currículo da educação básica, alinhando-se implicitamente com os preceitos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, por extensão, com a futura Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao propor uma metodologia que conecta a teoria à prática.

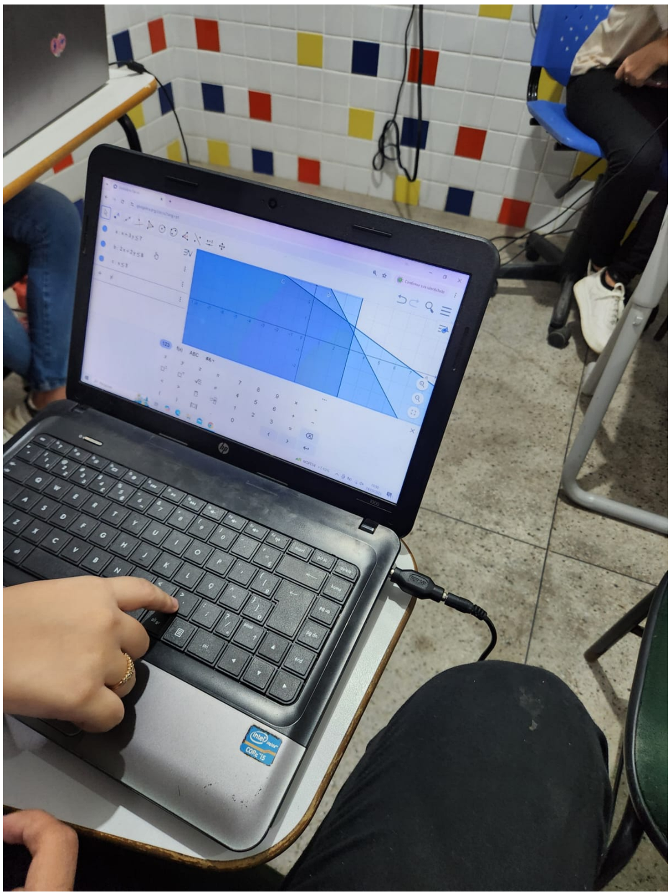
O principal objetivo da pesquisa de (CAMARGO, 2014) foi, portanto, propor uma metodologia eficaz para a inserção da Programação Linear no Ensino Médio, utilizando a resolução gráfica como eixo central para facilitar o aprendizado. Mais especificamente, a autora buscou analisar a viabilidade de se integrar a PL à grade curricular, desenvolver um material didático ou uma sequência de aulas que utilizasse o método gráfico como ferramenta didática primária, e demonstrar a aplicabilidade da PL na resolução de problemas reais, fazendo uma ponte entre os conceitos teóricos e as situações práticas.

Inicialmente, os alunos resolveram um problema de Programação Linear utilizando apenas os conhecimentos adquiridos em sala de aula, com o apoio dos conteúdos teóricos previamente trabalhado, sem nenhum recurso tecnológico. Em um segundo momento, tiveram a oportunidade de aprender a utilizar o GeoGebra e o Solver do Excel, para construir o gráfico das restrições e da função objetivo, construir uma tabela dinâmica, aplicando ambas as ferramentas na resolução do mesmo exemplo apresentado no Capítulo 3.

Após a análise do problema por meio do software GeoGebra, foram feitas orientações pedagógicas com o objetivo de auxiliar os alunos na compreensão da representação gráfica das inequações. A proposta era que eles entendessem como cada restrição delimitava uma região no plano cartesiano, de modo que pudessem identificar visualmente a área viável, ou seja, o conjunto de todos os pares ordenados que satisfazem simultaneamente as condições impostas pelo problema.

Essa etapa marcou a transição do entendimento teórico para a aplicação prática assistida por tecnologia, permitindo aos alunos visualizar de forma concreta como as inequações influenciam o espaço de soluções. A exploração guiada dos semiplanos proporcionou maior clareza no raciocínio geométrico e contribuiu para consolidar os conceitos de viabilidade e otimização.

Figura 8 – Construção dos semiplanos no GeoGebra.

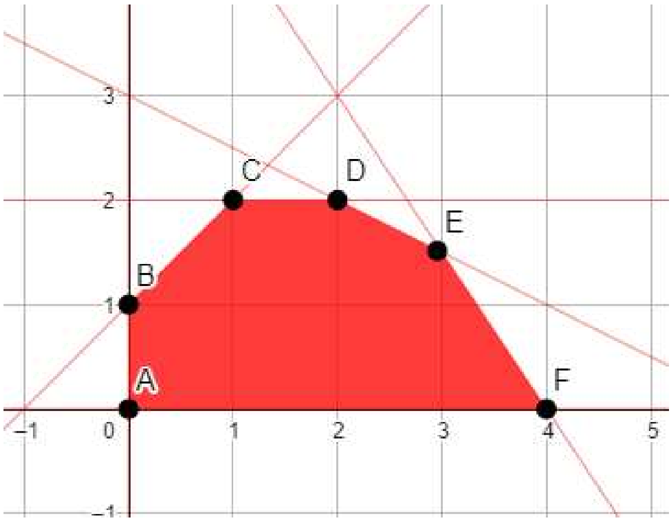


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Em seguida, foi realizada a interseção de todos os semiplanos representados pelas inequações do problema, evidenciando a região viável no plano cartesiano. Com o auxílio da ferramenta “polígono” do GeoGebra, os alunos puderam delimitar visualmente todos os vértices que definem os limites dessa região. Esses vértices representam as possíveis soluções do sistema de restrições, e sobre eles foi aplicada a função objetivo, a fim de calcular os respectivos valores e identificar qual deles fornece a melhor decisão a ser tomada para a resolução do problema proposto.

Essa etapa visual de delimitação da região viável foi fundamental para que os alunos compreendessem, de forma intuitiva, o conceito de conjunto solução. Ao manusearem o GeoGebra para identificar os vértices e, posteriormente, aplicar a função objetivo em cada um deles, os estudantes puderam perceber com clareza como a solução ótima está diretamente relacionada à geometria do problema. Esse processo fortaleceu a percepção dos alunos sobre a importância da interpretação gráfica nas decisões matemáticas, além de promover uma maior autonomia na análise dos resultados, uma vez que muitos conseguiram, por conta própria, validar suas hipóteses com base nas representações visuais e nos cálculos realizados.

Figura 9 – Resolução gráfica no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

De forma análoga, os alunos também utilizaram o Excel para estruturar o problema de Programação Linear em uma tabela dinâmica. Nessa etapa, eles inseriram os coeficientes das restrições e da função objetivo conforme o modelo matemático previamente construído. Com os dados organizados, aplicaram o recurso Solver para encontrar a solução ótima do problema. Esse procedimento permitiu aos estudantes comparar os resultados obtidos com os que haviam encontrado anteriormente por meio do GeoGebra, reforçando a compreensão sobre a coerência entre os métodos gráfico e algébrico, além de evidenciar como diferentes ferramentas tecnológicas podem ser complementares na resolução de problemas matemáticos.

Figura 10 – Ferramenta Solver do Excel.

	X	Y
	5	4
Variaveis	3	1,5
Função Objetivo	21	

Restrinções	X	Y	LE	LD	
	6	4	24	24	(I)
	1	2	6	6	(II)
	-1	1	-1,5	1	(III)
		1	1,5	2	(IV)

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Ao obterem o mesmo resultado em ambas as ferramentas, os alunos puderam reconhecer o potencial das tecnologias digitais no estudo da Programação Linear. Essa constatação não apenas validou os procedimentos realizados, como também ampliou significativamente a compreensão dos conceitos envolvidos, contribuindo de forma expressiva para o aprofundamento do conhecimento de todos sobre o tema. E para corroborar tal afirmação, foi feita ao final de todas as atividades uma breve entrevista no google forms, onde os estudantes puderam relatar a experiência e dar um feedback de tudo que foi realizado.

3.2.2 Analise dos resultados

A terceira etapa das aulas de Programação linear, listada na metodologia, consiste em pôr em pratica todo o conhecimento adquirido pelos alunos e desafia-los a resolver, de forma gráfica e algébrica, problemas de maximização em PL. As questões que compõe a lista foi retirada do livro "Pesquisa operacional na tomada de decisões".

Questão 1 - Obtenha graficamente a solução ótima para o problema abaixo por meio do calculo da programação linear.

Maximize $f(x, y) = 4x + 3y$ **Sujeito a:**

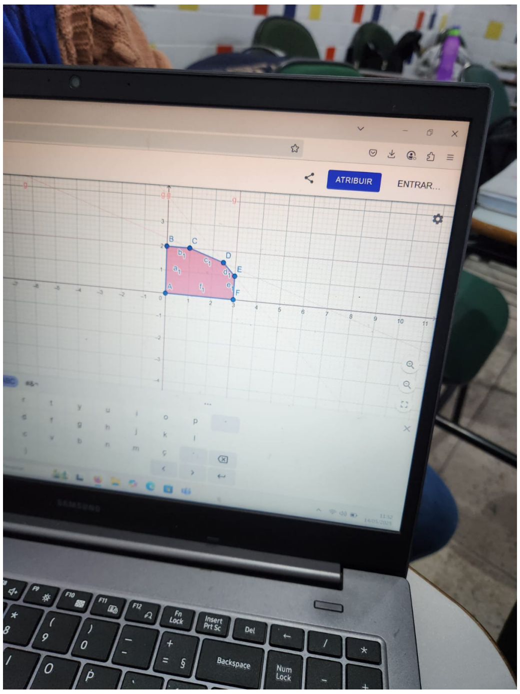
$$\begin{aligned} x + 3y &\leq 7 \\ 2x + 2y &\leq 8 \\ x &\leq 3 \\ y &\leq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

As primeiras questões da atividade foram elaboradas de forma direta, com o objetivo de levar os alunos a aplicarem os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores. Um exemplo disso é a primeira questão, que propõe um problema de maximização em Programação Linear, no qual os estudantes devem representar graficamente as restrições e identificar a solução ótima a partir da função objetivo.

A resolução da primeira questão permitiu observar o quanto os alunos estavam aptos a aplicar os conceitos estudados de forma autônoma. Ao identificarem corretamente a região viável no plano cartesiano e avaliarem a função objetivo nos vértices dessa região, muitos demonstraram domínio sobre a representação gráfica das restrições e a importância de interpretar geometricamente os resultados. A clareza com que relacionaram os coeficientes da função objetivo com a maximização do lucro indica que a proposta didática atingiu seu propósito, evidenciando que o ensino por meio de problemas bem estruturados, mesmo sem contextualização direta, já é capaz de desenvolver competências essenciais, como o raciocínio lógico e a capacidade de tomar decisões fundamentadas em critérios matemáticos.

A Figura 12 ilustra a construção gráfica da região viável e dos vértices do problema proposto, permitindo uma visualização clara da solução ótima. A utilização do GeoGebra nesse contexto reforçou a compreensão dos alunos sobre a aplicação prática da Programação Linear, ao evidenciar graficamente os impactos das restrições sobre as possíveis decisões.

Figura 11 – Resolução gráfica da Questão 1 no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Contudo, essas questões não estimulam a criatividade e evidenciam o poder da tomada de decisão, propostos desde o início desse trabalho. Pensando nessa hipótese, foi feito uma contextualização de uma questão, baseados no dia a dia dos estudantes, em situações problema que eles podem se deparar em seu cotidiano, impondo-os a tomar uma decisão que impactará diretamente os rendimentos de uma empresa. É o caso da questão a seguir.

Questão 2 - Uma pizzaria irá preparar dois tipos de pizzas especiais para o final do ano e o empresário contratou um engenheiro de produção para maximizar seus lucros. Analise a tabela abaixo que informa, de forma detalhada, todos os estoques de produção:

- Pizza Família (Tipo 1): 3 fatias de queijo, 1 fatia de lombo, 2 massas
- Pizza Premium (Tipo 2): 2 fatias de queijo, 2 fatias de lombo, 1 massa

Estoque disponível:

- Queijo: 90 fatias
- Lombo: 60 fatias
- Massa: 56 unidades

Restrições adicionais:

- Máximo de 25 pizzas Família por dia
- Máximo de 20 pizzas Premium por dia

Lucros:

- R$ 25 por pizza Família
- R$ 30 por pizza Premium

Modelo matemático:
Maximize: $z = 25x + 30y$
Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &\leq 90 \\
x + 2y &\leq 60 \\
2x + y &\leq 56 \\
x &\leq 25 \\
y &\leq 20 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Quantas pizzas de cada tipo a pizzaria deve preparar por dia para obter o maior lucro possível, respeitando os limites de ingredientes e produção?

Durante a resolução do problema, alguns alunos propuseram diferentes formas de representá-lo matematicamente, levantando hipóteses variadas sobre como estruturá-lo. Diante disso, foi necessário intervir com orientações pontuais, explicando como identificar corretamente as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo. A partir dessas orientações, foi possível traduzir a situação-problema em expressões matemáticas, formalizando as restrições envolvidas no contexto apresentado. Então, definimos que a variável de decisão (Pizza do tipo 1) seria representada por x, e a segunda variável (Pizza do tipo 2) seria representada por y.

Em seguida, foi definida a função objetivo, onde vários alunos conseguiram identificar sem muitos problemas, por se tratar da maximização do lucro, todos rapidamente correlacionaram os valores de cada tipo de pizza proporcionados em suas respectivas vendas.

Ao interpretar todo o problema, eles conseguiram construir todo o sistema composto por restrições da seguinte forma:

Função objetivo Maximizar

$$z = 25x + 30y$$

Sujeito a,

$$
\begin{cases}
3x + 2y \leq 90 & (I) \\
x + 2y \leq 60 & (II) \\
2x + y \leq 56 & (III) \\
x \leq 25 & (IV) \\
y \leq 20 & (V) \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

Igualando a zero cada uma das restrições para obter as retas que limitam a região viável, vamos obter:

- Restrição I:

  Para $x = 0$, temos:

$$3x + 2y = 90$$

$$3 \cdot 0 + 2y = 90$$

$$y = 45$$

  Para $y = 0$, temos:

$$3x + 2y = 90$$

$$3x + 2 \cdot y = 90$$

$$x = 30$$

- Restrição II:

  Para $x = 0$, temos:

$$x + 2y = 60$$

$$0 + 2y = 60$$

$$y = 30$$

  Para $y = 0$, temos:

$$x + 2y = 60$$

$$x + 2 \cdot y = 60$$

$$x = 60$$

- Restrição III:

  Para $x = 0$, temos:

$$2x + y = 56$$

$$2 \cdot 0 + y = 56$$

$$y = 56$$

Para $y = 0$, temos:

$$2x + y = 56$$

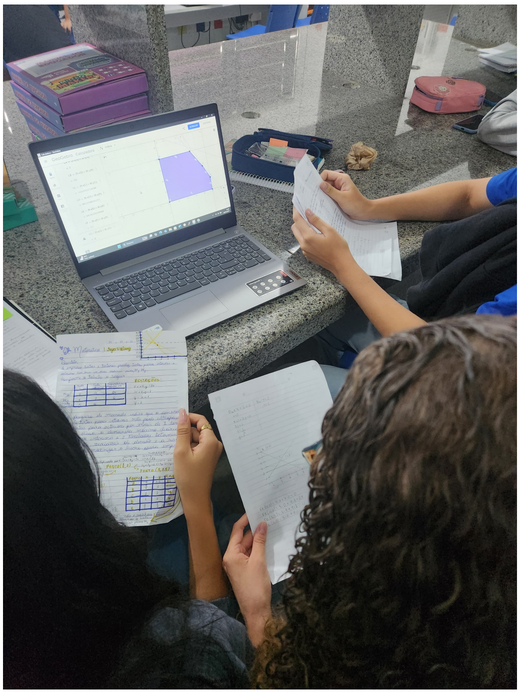
$$2x + 0 = 56$$

$$x = 28$$

As restrições IV e V envolve apenas uma variável de decisão, logo ambas são retas constantes no gráfico que gera a região viável desse problema.

Ao inserirem todas as informações no GeoGebra, os alunos conseguiram representar graficamente o problema da pizzaria e identificar a solução ótima. A visualização do ponto que proporciona a melhor escolha, ou seja, aquele que maximiza o lucro da empresa, permitiu compreender, de forma concreta, qual decisão deve ser tomada para tornar o negócio mais viável e eficiente do ponto de vista econômico. Após feita a análise no GeoGebra, eles também utilizaram o recurso do solver do Excel para confirmar os resultados obtidos.

Figura 12 – Resolução gráfica da Questão 2 (Pizzaria).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Após todas as aulas e atividades sobre PL com a turma do ensino médio, foi proposta uma pequena entrevista com os alunos, na qual eles puderam relatar suas experiências ao longo do processo de ensino e aprendizagem, e como as ferramentas tecnológicas impactaram positivamente todo o desenvolvimento. Houve vários feedbacks positivos com relação às aulas, à facilidade de aplicação do recurso GeoGebra e Excel. Parte dos comentários de alguns alunos fez sanar de forma positiva a crítica que (NETO, 2010) relatou como um problema no ensino de

PL em turmas do ensino médio, com a integração dos recursos tecnológicos em sala de aula, esse problema foi superado, demonstrando que a utilização adequada de ferramentas digitais pode transformar e enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

(NETO, 2010), ao propor a inserção da Pesquisa Operacional no ensino médio, identificou como principal obstáculo a ausência de materiais didáticos voltados para esse nível de ensino. Diante disso, passou a orientar seus alunos de Licenciatura em Matemática na elaboração de apostilas de Programação Linear adaptadas à realidade escolar, com o objetivo de tornar possível a introdução desses conteúdos e aproximar os estudantes da matemática aplicada. Em consonância com essa proposta, o uso de ferramentas tecnológicas nas aulas, como o GeoGebra, mostrou-se altamente eficaz. O relato de uma aluna reforça esse impacto positivo:

> "O GeoGebra é muito mais intuitivo, parece um jogo, o que facilita muito, já que estamos acostumados com esse tipo de design. Além de trazer as informações necessárias para a resolução de forma prática, facilitando o entendimento dos dados utilizados para resolver as questões. E também resolve o mesmo problema de várias formas sem precisar mudar as configurações, como no Excel."

Esse depoimento evidencia que, além de suprir a carência de materiais mencionada por Salles, as tecnologias utilizadas contribuíram para tornar o conteúdo mais atrativo, interativo e compreensível, promovendo um aprendizado mais significativo e alinhado ao cotidiano dos estudantes.

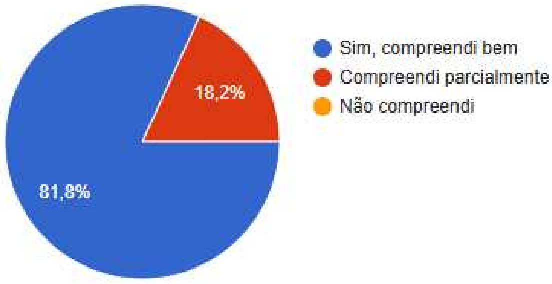
Durante a entrevista, foi feita uma pergunta para investigar se os alunos já haviam ouvido falar sobre Programação Linear antes da realização das atividades propostas. As respostas foram categorizadas em três opções: *Sim, Não e Não me lembro.* O gráfico a seguir ilustra a distribuição dessas respostas, permitindo uma análise do nível de familiaridade prévia dos estudantes com o tema.

Figura 13 – Análise investigativa sobre o conhecimento prévio em PL

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Podemos observar que grande parte dos alunos teve seu primeiro contato com PL a partir dessa aula, e ao final de todas as aulas, todos os discentes obtiveram um bom resultado em aprendizagem, como mostra o próximo gráfico.

Figura 14 – Análise investigativa sobre o desempenho dos alunos



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Citado anteriormente, (PAIVA, 2008, p. 17-18) destaca o potencial da Programação Linear (PL) na resolução de problemas do cotidiano, ressaltando sua importância no desenvolvimento da capacidade de tomada de decisão durante a formação escolar. Segundo o autor, essa aplicação formal da matemática estimula o raciocínio lógico e prepara os estudantes para os desafios do mercado de trabalho, promovendo uma postura mais analítica diante de situações que exigem escolhas estratégicas.

A experiência prática com as aulas de PL no 3º ano do ensino médio confirmou essa perspectiva: os alunos obtiveram um desempenho satisfatório nas atividades propostas, demonstrando compreensão e autonomia na resolução de problemas. Em uma das perguntas realizadas na entrevista *"Você se sentiu mais motivado(a) a aprender Matemática utilizando essas ferramentas tecnológicas?"* mais de 90% dos estudantes responderam positivamente, revelando um aumento significativo no interesse pela disciplina. Além disso, quando questionados se *"os problemas resolvidos nas atividades mostram como a Matemática pode ser aplicada no mundo real"*, a maioria respondeu que sim, o que corrobora a afirmação de Paiva sobre o papel da PL na formação do pensamento lógico e na valorização da matemática como ferramenta útil e aplicável à vida cotidiana.

Além dos avanços observados nas resoluções gráficas e algébricas, os depoimentos coletados ao final da sequência didática reforçam o impacto positivo da utilização de tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem da Programação Linear. A maioria dos estudantes relatou que o uso do GeoGebra contribuiu significativamente para a visualização das soluções, facilitando a compreensão das restrições e da região viável. Como afirma um dos alunos: *"Com certeza, além de mostrar os gráficos, traz informações muito claras, o que facilitou muito a resolução do problema de forma prática." Outro complementa: "Ajudou sim, com muita clareza e mostra uma ilustração completa."*

No comparativo entre o GeoGebra e o Excel, o primeiro foi amplamente preferido por sua interface visual e intuitiva, permitindo uma maior interação com os elementos gráficos da modelagem matemática. Um aluno destacou: *"Preferi usar o GeoGebra porque ele facilita a visualização gráfica das restrições e da região viável, tornando mais fácil identificar a solução ótima."* Entretanto, também foi registrada a opinião de que o Excel é "mais simples e direto", o que demonstra que diferentes perfis de aprendizagem podem se beneficiar de recursos distintos.

Outro ponto relevante foi a percepção dos alunos sobre a aplicabilidade da matemática. A Programação Linear, inserida em problemas contextualizados, despertou o interesse pela disciplina e fortaleceu o entendimento da matemática como ferramenta para resolver problemas do cotidiano. Conforme expressado por um aluno: *"Sim, os problemas mostram como a Matemática pode ser usada para resolver situações reais, como otimizar recursos e tomar decisões de forma eficiente."* Essa compreensão foi ampliada pela simulação de cenários empresariais, como os casos da pizzaria ou da fábrica, que aproximaram os conteúdos escolares do universo profissional.

Por fim, as falas dos discentes revelaram entusiasmo com o caráter prático e lógico da Programação Linear, especialmente ao relacioná-la com o uso da tecnologia. Um depoimento resume essa percepção de forma clara: *"O quão simples um problema matemático pode ser resolvido usando a tecnologia a favor da dificuldade."* Tais evidências demonstram que a proposta didática atingiu seu objetivo de promover uma aprendizagem significativa, utilizando ferramentas digitais como pontes entre a abstração matemática e a realidade dos alunos.

A partir dos resultados positivos observados durante a aplicação prática, é importante destacar o potencial da Programação Linear como um instrumento interdisciplinar. Ao envolver contextos reais de produção, logística, alimentação e gestão, os problemas propostos em sala dialogam com conteúdos da Física, Economia e Geografia, favorecendo uma aprendizagem mais contextualizada. Essa abordagem pode ser ainda mais potente quando aliada à cultura maker, já que ambientes como a sala de aula utilizada, equipada com recursos de tecnologia e espaço colaborativo, estimulam o protagonismo discente, o trabalho em equipe e a resolução criativa de problemas.

Outro aspecto relevante refere-se à formação docente. A inserção de conteúdos como a Programação Linear no Ensino Médio exige que o professor esteja familiarizado não apenas com o conteúdo matemático, mas também com o uso de ferramentas digitais e metodologias ativas. A experiência relatada neste trabalho aponta para a necessidade de formação continuada que contemple o uso pedagógico do GeoGebra, Excel e outras tecnologias voltadas à modelagem matemática, o que pode ser tema de futuras pesquisas ou projetos de extensão em parceria com instituições de ensino.

4 CONCLUSÃO OU CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como propósito central investigar a aplicação da Programação Linear (PL) tanto no contexto da Engenharia de Produção ilustrando seu potencial na tomada de decisão, quanto como recurso didático no Ensino Médio. Inicialmente, foi possível compreender como a PL, inserida no campo da Pesquisa Operacional, constitui uma ferramenta estratégica fundamental para a tomada de decisões em ambientes produtivos, contribuindo para a maximização de lucros, redução de custos e utilização eficiente de recursos. A análise dos fundamentos teóricos, bem como a resolução de problemas práticos com o uso do método gráfico, evidenciou a robustez dessa técnica para solucionar questões complexas de forma lógica e objetiva.

No espaço educacional, o trabalho demonstrou que a Programação Linear pode ser explorada de forma significativa com estudantes do Ensino Médio, desde que sejam utilizadas metodologias ativas e recursos tecnológicos adequados. A proposta de sequência didática elaborada e aplicada com alunos do 3º ano do Colégio Inovar, em Atalaia-AL, mostrou-se eficiente ao proporcionar aos estudantes não apenas o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de modelagem matemática, mas também o engajamento em situações que representam desafios reais de tomada de decisão. A utilização do GeoGebra e do Solver do Excel como ferramentas pedagógicas permitiu maior compreensão dos conceitos e visualização dos resultados, facilitando essa construção do conhecimento, raciocínio lógico, abrindo novos horizontes e promovendo a construção de um aprendizado mais contextualizado, dinâmico e interativo.

Os resultados obtidos com a aplicação prática da proposta confirmaram o potencial da Programação Linear como conteúdo matemático relevante e aplicável, capaz de contribuir para a formação crítica e autônoma dos estudantes. Ao final das atividades, observou-se uma melhora significativa no desempenho dos alunos, bem como um aumento na motivação e no interesse pela Matemática, especialmente por perceberem sua utilidade em situações do cotidiano e em cenários profissionais.

Assim, conclui-se que a integração entre teoria e prática, aliada ao uso consciente de tecnologias educacionais, pode transformar o ensino da Matemática, tornando-o mais atrativo e significativo. A Programação Linear, nesse sentido, representa uma oportunidade de trazer para a sala de aula uma Matemática viva, útil e aplicada, que dialoga com a realidade dos alunos e prepara-os para os desafios do mundo contemporâneo.

REFERÊNCIAS

ABREU, M. A. M. **Metodologia de ensino de matemática**. Florianópolis: LED, 2002.

ANDRADE, E. L. de. **Introdução À Pesquisa Operacional**: Métodos e modelos para análise de decisão . 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

CAMARGO, R. S. S. **Introdução à programação linear no Ensino Médio utilizando a resolução gráfica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, Brasília, mar 2014.

CHIAVENATO, I. **Planejamento e controle da produção**. [*S.l.*]: Manole, 2008.

DINIZ, M. I.; SMOLE, K. S. **Matemática**: Ensino médio. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

FAÉ, C. S.; RIBEIRO, J. L. D. Um retrato da engenharia de produção no brasil. **Revista Gestão Industrial**, v. 1, n. 3, 2005.

FONSECA, J. J. S. da. **Apostila de metodologia da pesquisa científica**. [*S.l.*]: João José Saraiva da Fonseca, 2002.

GOLDBARG, M. **Otimização combinatória e programação linear**. 2. ed. [*S.l.*]: Elsevier Brasil, 2005. v. 2.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. [*S.l.*]: McGraw Hill Brasil, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na tomada de decisões**. 5. ed. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2016.

LOPES, A. L. M.; GALVÃO, A. L. M. d. V.; FOGAÇA, M. **Pesquisa operacional**: livro didático. [*S.l.*]: UnisulVirtual, 2022.

LÓSS, Z. E. O desenvolvimento da pesquisa operacional no brasil. **PTS**, v. 10, p. 81, 1981.

MARINS, F. A. S. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, 2011.

MOREIRA, D. A. **Administração da produção e operações**. 2. ed. São Paulo: Cengage Universitario, 2012.

NETO, L. L. S. Pesquisa operacional no ensino médio. **Synergismus scyentifica UTFPR**, v. 4, n. 2, 2010.

PAIVA, S. M. de A. **A programação linear no ensino secundário**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Portucalense (Portugal), 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um enfoque do método matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1994. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo.

SANTOS, A. B.; ANTONELLI, S. C. Aplicação da abordagem estatística no contexto da gestão da qualidade: um survey b com indústrias de alimentos de são paulo. **Gestão & Produção**, SciELO Brasil, v. 18, p. 509–524, 2011.

STEINMACHER, I. F. *et al.* Uso do geogebra no ensino de matemática: Avaliação de usabilidade e de aprendizado. **Encontro Nacional de Informática e Educaçao (II ENINED)**, 2011.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. [*S.l.*]: São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. [*S.l.*]: Editora Artmed, 1998.