Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas
***Campus* Maceió**
Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Roberto Nilton Bento da Silva

Quatérnions de rotação e como usa-lós

Maceió
2023

ROBERTO NILTON BENTO DA SILVA

Quatérnions de rotação e como usá-los

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Hugo Santos Nunes

MACEIÓ - AL
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
Campus Maceió
Biblioteca Benevides Monte

S586q Silva, Roberto Nilton Bento da.
Quatérnions de rotação e como usá-los / Roberto Nilton Bento da Silva. - Maceió, 2023.
67 f. : il.

Orientação: Prof. Me. Hugo Santos Nunes.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió. Maceió, 2023.

Arquivo no formato digital em PDF do trabalho acadêmico.

1. Matemática. 2. Quatérnions. 3. Rotação. 4. Números complexos. I. Título.

CDD:512.788

Nalva Maria Amaral
Bibliotecária – CRB-4/989

ROBERTO NILTON BENTO DA SILVA

Quatérnions de rotação e como usá-los

Monografia submetida ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 24 / 04 / 2023

BANCA EXAMINADORA

Hugo Santos Nunes

Prof. Me. Hugo Santos Nunes (Orientador)
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Arlyson Alves do Nascimento

Prof. Dr. Arlyson A. Nascimento (Coorientador)
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Elaine Cristine de Souza Silva

Profa. Dra. Elaine Cristine de Souza Silva
Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Aos meus queridos amigos e professores que estiveram comigo durante toda caminhada, a minha namorada que sempre esteve ao meu lado e especialmente a meu grande amigo que me deu apoio e motivação desde o início do curso.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais por jamais terem desistido de mim, a meus amigos por todo apoio que me deram, aos meus professores que contribuíram para o meu conhecimento, ao meu grande orientador que foi muito importante, principalmente na conclusão curso de matemática. Agradeço a meus familiares, especialmente a minha amada tia que sempre esteve ao meu lado.

"Todas as medidas do mundo não valem um único teorema que produza um progresso significativo em nossa maior ciência."

Carl Friedrich Gauss

Resumo

Os quatérnions de rotação são uma ferramenta matemática utilizada para representar rotações em três dimensões, que podem ser comparados com os números complexos, mas com uma dimensão extra. Eles possuem propriedades úteis como a capacidade de descrever rotações em torno de qualquer eixo e a habilidade de combinar rotações usando multiplicação. Por isso, são amplamente utilizados em aplicações como jogos de computador, animação e robótica. Neste trabalho, será apresentado uma introdução sobre os quatérnions de rotação, como eles são similares aos números complexos e como eles podem ser utilizados em cálculos de rotação.

Palavras-chave: Quatérnions. Rotação. Números complexos. Aplicações.

Abstract

Rotation quaternions are a mathematical tool used to represent 3D rotations and can be compared to complex numbers, but with an extra dimension. They possess useful properties such as the ability to describe rotations around any axis and the ability to combine rotations using multiplication. Therefore, they are widely used in applications such as computer games, animation, and robotics. In this work, we will provide an introduction to rotation quaternions, how they are similar to complex numbers, and how they can be used in rotation calculations.

Keywords: Quaternions. Rotation. Complex numbers. Applications.

Lista de Figuras

Sumário

1 Metodologia

Trata-se de uma pesquisa com a natureza aplicada, tendo em vista que busca contribuições na ciência com aplicação prática. Além disso, se trata de uma abordagem qualitativa, bem como seus objetivos são exploratórios, porque busca um estudo aprofundado do problema e construções de hipóteses. Quanto ao procedimento técnico tem-se uma pesquisa bibliográfica elaborada através de materiais já desenvolvidos por outros autores.

No processo de levantamento bibliográfico foram realizadas buscas nos sites Google Acadêmico e SciELO utilizando, a princípio, as seguintes combinações palavras chaves "Quatérnios" and "rotações", o resultado foi insatisfatório por possuir uma variedade muito grande artigos, então em seguida acrescentamos mais algumas descrições ("Quatérnios" or "Quaternions") and "rotações" and "aplicações" e deste modo, foi possível restringir bem os dados e obter resultados que se encaixavam na procura. Logo em seguida iremos ler os resumos dos artigos e selecionar os que se encaixarem melhor no objetivo da pesquisa, após essa etapa de seleção será feito a leitura completa dos artigos para que posteriormente seja feita a escrita dos resultados encontrados. Apesar de termos encontrado bons materiais nacionais, eles não eram completos e não apresentavam as aplicações que buscávamos, isso nos levou a procurar na língua inglesa, além de verificar a referência usada pelos autores em seus trabalhos, consequentemente, conseguimos um livro completo para finalizar a pesquisa.

De forma análoga, para fundamentar a história e evolução dos Quatérnios, foi realizada uma nova pesquisa bibliográfica utilizando os mesmo sites com as seguintes combinações de palavras "história" and ("Quatérnios" or "Quaternions"), através disso alguns resultados foram obtidos e ao escolher alguns artigos que atendiam as necessidades da pesquisa. Além disso, as referências dos artigos escolhidos foram levadas em consideração, de modo que escolhemos os livros que eram comuns a maioria delas, assim esses livros se tornaram a nossa principal referência da pesquisa.

2 Introdução

A rotação é uma das transformações geométricas mais comuns e importantes em diversos campos da ciência e da engenharia, desde a animação de personagens em jogos e filmes até a orientação de satélites em órbita. Um dos principais conceitos matemáticos por trás da rotação é o uso de quatérnions de rotação, uma extensão dos números complexos que permite a representação de rotações tridimensionais de maneira mais eficiente e elegante. Sendo assim, primeiramente se faz necessário contextualizar a história dos números complexos, um vez que eles foram os responsáveis por originar esse novo conjunto.

No princípio, equações que apresentassem o conjunto solução contendo raízes negativas eram simplesmente descartadas e consideradas impossíveis. Durante um longo tempo esse problema foi deixado de lado pelos estudiosos da matemática, visto que naquele período uma raiz negativa como solução não fazia sentido algum. Apenas quando alguns matemáticos tentaram solucionar equações de terceiro grau que a ideia dos números complexos ganhou notoriedade na matemática. Diante do estudo de radicais negativos ficou claro que o conjunto dos números reais era insuficiente para solucionar algumas equações algébricas, era necessário um novo conjunto para suprir as limitações dos números reais.

O estudo dos números imaginários sempre foi tratado com preconceito, bem como questionado sobre sua possível existência, tendo em vista que quando um problema apresentava um radical negativo já era o suficiente para ser considerado insolúvel, sem ter muita importância. Essa era a forma a qual os números imaginários eram tratados. No século XII, Bhaskara afirmou que não há raiz quadrada de um número negativo, pois ele não é um quadrado, o que mostra estudos realizados por Bhaskara em seu tempo. Além da crítica feita por Bhaskara, muitos outros matemáticos continuavam a rejeitar a ideia, como por exemplo Nicolas Chuquet fez uma observação análoga sobre a impossibilidade da existência de tais números.

Scipione Del Ferro foi o primeiro a resolver a equação do 3° grau por volta de 1526, mas nunca publicou nada. Ele comunicou a sua solução apenas a Annibale Della Nave e Antonio Fior seu grande amigo. Alguns anos mais tarde, Nicolò Fontana de Brescia, também conhecido como Tartaglia, anuncia ter descoberto uma solução algébrica para equações cúbicas do tipo $x^3 - px^2 = n$. Após esse acontecimento, Fiore decide desafiá-lo para um duelo matemático que consistia em resolver problemas propostos entre os dois. Naquela época, era comum os matemáticos promoverem desafios entre si, pois quando venciam ganhavam fama. Porém, Tartaglia desconfiava que Fiore possuía alguma solução de equações do 3° grau, visto que sua lista continha problemas dessa natureza. No fim dessa batalha quem saiu vitorioso foi Tartaglia que acabou vencendo por seu grande talento e esforço.

Logo em seguida a história dos imaginários teve continuidade com um brilhante matemático daquela época, Girolamo Cardano, que a princípio não demonstrava muito interesse por equações cúbicas, porque ele acreditava na declaração feita por Luca Pacioli que "Não existe uma solução geral para equações cúbicas", até que ele recebeu a notícia da existência de um matemático que possuía uma regra para solucioná-las. Esse matemático era Tartaglia e com o intuito de acrescentar esse conhecimento no livro em que estava escrevendo, Cardano pede que revele seu método, no entanto, esse era um segredo que ele não queria revelar. Tartaglia pretendia publicar a solução em um futuro livro. Insatisfeito por Tartaglia recusar seu pedido, Cardano o acusa de mesquinho e desinteressado pela evolução da humanidade, isso ocasionou um desentendimento entre eles. Após algum tempo Cardano propõe um acordo à Tartaglia para que revelasse o método de solucionar equações cúbicas com a condição de que Cardano nunca divulgasse a regra. Diante dessa proposta, Tartaglia com o desejo de obter mais notoriedade e benefícios, aceita o acordo e revela sua fórmula. Para a sua infelicidade, o contrato não é honrado e o segredo das equações cúbicas é revelado na obra de Cardano, bem como é acrescentada a prova, pois Tartaglia criou a fórmula, mas não a demonstrou. Cardano coloca essa descoberta em seu livro "Ars Magna", que posteriormente foi estudado por Bombelli.

> Apesar destes traços pessoais nada dignificantes, Cardano legou à posteridade um livro que, à época, era sem dúvida o maior compêndio algébrico existente: a ARTIS MAGNAE SIVE DE REGULIS ALGEBRAICIS, mais conhecida por Ars Magna, publicada em Nurenberg, na Alemanha, em 1545. O nome de Cardano também chegou até nós na expressão "eixo cardan", utilizado nos automóveis, embora a invenção não tenha sido dele. (GARBI, 2010, p. 34).

Diante da revelação do método de como resolver equações cúbicas, muitos matemáticos passaram a usar esse método, consequentemente, o problema das raízes negativas voltava a aparecer, assim os números imaginários ganharam destaque em seu estudo por vários matemáticos daquele tempo. Rafael Bombelli escreveu um livro onde fala sobre a expressão sofisticada de Cardano, diante desse problema ele decide estudar a fundo essa expressão e considera a possibilidade da existência da expressão na forma $a+\sqrt{-b}$. Além disso, enuncia a regra do produto, bem como afirma ter encontrado uma espécie de raiz cúbica diferente das outras. Ele foi o primeiro a inventar regras para trabalhar com esses números. Infelizmente, Bombelli não possuía uma boa notação para apresentar suas equações, ele utilizava p (plus) para indicar a soma e m (minus) para representar a subtração. A partir do progresso feito por Bombelli, muitos matemáticos começaram a utilizar sua ideia para resolver equações do terceiro grau, no entanto, os números complexos ainda não eram aceitos por todos os matemáticos.

René Descartes, matemático e filósofo que viveu por volta de (1596-1650), contribuiu na matemática com brilhantes ideias, e uma delas foi associar álgebra e geometria. Pressionado por seus amigos para que divulgasse suas ideias, ele acaba publicando o tratado "Le Discours de la méthode" onde associa os números imaginários como uma impossibilidade geométrica, podendo ser visto na construção geométrica. Descartes foi o responsável por criar o termo Números Imaginários, sendo assim chamados pelos matemáticos por um longo tempo. Segundo Milies s.d., John Wallis foi um famoso matemático inglês que questionou a existência dos números imaginários. Tendo em vista a seguinte indagação: como é possível um número negativo multiplicado por si mesmo resultar em outro negativo. Essa situação parece ser impossível, é admitida nas operações de números complexos, porém quando se trata dos números reais ela não é válida. Apesar de sua crítica, Wallis foi o primeiro a tentar legitimar os complexos através de uma "interpretação gráfica".

Abraham de Moivre foi um grande matemático francês o qual ficou conhecido após desenvolver uma fórmula que ganhou o seu próprio nome, o Teorema de Moivre, em que relaciona números complexos à trigonometria. Deste modo, podemos destacar a sua grande contribuição através da criação da fórmula da potência para números complexos, bem como a fórmula para determinar as suas raízes sendo amplamente conhecidas como a primeira e a segunda fórmula de Moivre respectivamente.

O famoso matemático Leonhard Euler também contribuiu significativamente no estudo dos números complexos, sendo ele responsável por criar a representação $\sqrt{-1} = i$, definiu as operações de adição e multiplicação, bem como mostrou que os complexos gozavam de todas as propriedades de um corpo. Euler também foi responsável por relacionar os números complexos à trigonometria de modo que pudessem ser escritos de outra forma, sendo conhecida como forma polar dos números complexos. Além de outras ideias que só foram aceitas, posteriormente, quando Gauss deu prosseguimento a esses estudos.

Finalmente, quando Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mostrou suas contribuições que de fato o conjunto dos Números Complexos foi aceito, além de ganhar destaque na matemática. Segundo Garbi (2011), Gauss apresentou a demonstração do que ficou conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra como sua tese de doutorado no ano de 1798. Esse teorema diz que "toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz". Vale ressaltar que ele também foi responsável por nomear o conjunto de Números Complexos, sendo aqueles que a princípio eram chamados pejorativamente de Números Imaginários.

A partir da realização de estudos mais aprofundados sobre números complexos, os matemáticos notaram uma propriedade muito importante. Multiplicações sucessivas da unidade imaginária i por si mesma causou um resultado curioso. Deste modo, uma sequência é formada a partir do produto de i por 1, isto é, $\{1, i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots\}$ e quando interpretada no plano complexo teríamos pontos distribuídos de modo que formassem um círculo de raio unitário, ou seja, cada multiplicação de um número complexo pela unidade i correspondia a uma rotação de 90° no plano. Esse resultado despertou o interesse de muitos matemáticos no estudo de números complexos, sendo um deles o brilhante matemático irlandês, William Rowan Hamilton.

Hamilton pensou na possibilidade de expandir os números complexos para o espaço, tendo em vista a importante propriedade proveniente dos números complexos, pois o seu objetivo era utilizar a mesma propriedade no espaço. Nesse sentido, Hamilton foi em busca da construção dos quatérnions que são conhecidos por esse nome atualmente, bem como é o conjunto representado pela letra $\mathbb{H}$. No entanto, a construção dos quatérnions não foi imediata, Hamilton dedicou muitos anos de sua vida elaborando essa teoria. A sua primeira ideia foi acrescentar uma segunda unidade imaginária denotada por j, tal que $j^2 = -1$, sendo $j \neq i$, semelhante a unidade i. Isso originou os chamados tripletos representados por $a + bi + cj$, embora tenha se empenhado por muitos anos trabalhando com os tripletos sobre a sua construção e interpretação geométrica, ele não teve sucesso, então abandonou essa ideia. Após alguns anos quando Hamilton caminhava com sua esposa sobre uma ponte em Dublin, Hamilton teve a ideia que permitiu a construção dos quatérnions, em vez de utilizar um número com três coordenadas eles decidiu adicionar mais uma unidade imaginária chamada de k, consequentemente, temos um número de quatro dimensões. Hamilton passou o resto de sua vida estudando quatérnions e buscando aplicações para eles.

De fato, Hamilton estava certo, é possível utilizar quatérnions para rotacionar pontos ou vetores no espaço por meio dos quatérnions de rotação. Neste trabalho, vamos construir os quatérnions e por fim utilizar a sua poderosa aplicação para mostrar como girar pontos ao redor de um eixo arbitrário. Vale destacar que os quatérnions possuem grandes aplicações em muitas áreas, como na computação gráfica no desenvolvimento de jogos, avião, robótica, medicina etc.

3 Números Complexos

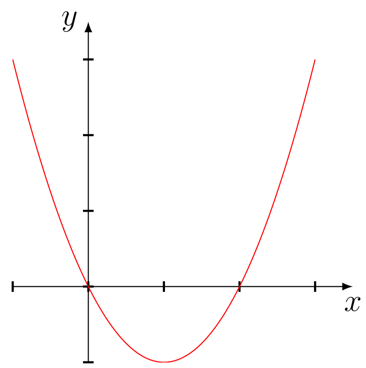
3.1 A necessidade de Números Complexos

Para qualquer número real $x \in \mathbb{R}$, é sempre verdade que $x^2 \geq 0$. Assim, soluções para equações como $x^2 = -1$ nunca são possíveis quando se consideram apenas números reais. Pode parecer que não é grande coisa, até percebermos que isso nos proíbe de encontrar raízes para um polinômio tão simples como $x^2 + 1$. Como raízes de polinômios são cruciais em vários campos da Matemática, os matemáticos desejaram expandir sua noção de um número para incluir soluções para $x^2 + 1 = 0$. Ao fazer isso, os números complexos foram criados e a Matemática como a conhecemos nunca mais foi a mesma. Sabemos que as duas raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e resolver equações quadráticas é algo que os matemáticos são capazes de fazer desde a época dos babilônios. Quando $b^2 - 4ac > 0$, essas duas raízes são reais e distintas; graficamente, elas estão onde a curva $y = ax^2 + bx + c$ corta o eixo x.

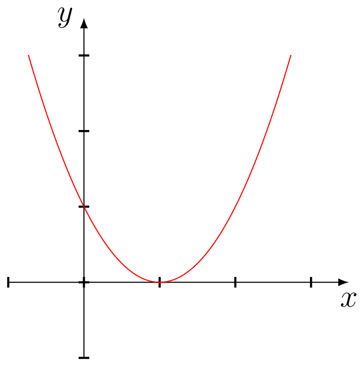
Figura 1: Raízes reais e distintas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando $b^2 - 4ac = 0$, então temos uma raiz real e aqui a curva toca o eixo x apenas uma vez.

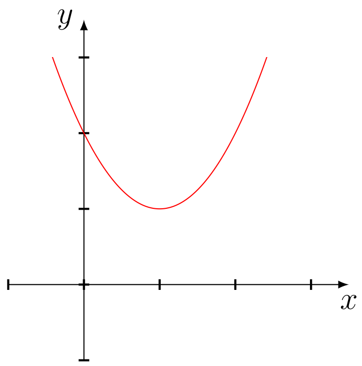
Figura 2: Raízes reais e iguais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas o que acontece quando $b^2 - 4ac < 0$? Então, não há soluções reais para a equação como nenhum quadrado real para dar o $b^2 - 4ac$ negativo. Do ponto de vista gráfico, a curva $y = ax^2 + bx + c$ encontra-se inteiramente acima ou abaixo do eixo x.

Figura 3: Raízes complexas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos perceber que os matemáticos se sentem confortáveis com essas raízes quando $b^2 - 4ac < 0$. Durante a Renascença, esse tipo de função quadrática teria sido considerada insolúvel ou suas raízes seriam chamadas de imaginárias (o termo "imaginário" foi usado pela primeira vez pelo matemático francês René Descartes (1596-1650). Embora seja mais conhecido como um filósofo, Descartes fez muitas contribuições importantes para a matemática e ajudou a fundar a geometria coordenada - daí a nomenclatura coordenadas cartesianas). Se imaginarmos que $\sqrt{-1}$ existe, e que ele se comporta (adiciona e multiplica) da mesma forma que outros números, então as duas raízes do quadrático podem ser escritas na forma

$$x = A \pm B\sqrt{-1}$$

onde

$$A = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad B = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{são números reais.}$$

Mas que significado essas raízes podem ter? Foi esse ponto filosófico que preocupou os matemáticos até o início do século XIX, quando esses números "imaginários" começaram a se provar tão úteis (especialmente na obra de Cauchy e Gauss) que essencialmente as preocupações filosóficas simplesmente foram esquecidas.

Notação 1. *De agora em diante, escreveremos i para* $\sqrt{-1}$. *Essa é a notação padrão entre os matemáticos, embora muitos livros, particularmente aqueles escritos para engenheiros e físicos, usem* j *em vez disso.*

Observação 3.1. *Essa notação foi introduzida pela primeira vez pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Muito de nossa notação moderna se deve a ele, incluindo e e* π. *Euler foi um gigante na matemática do século XVIII e o matemático mais prolífico de todos os tempos. Suas contribuições mais importantes foram na análise (por exemplo, em séries infinitas, cálculo de variações). O estudo da topologia remonta provavelmente à sua solução do problema da ponte de Königsberg.*

3.1.1 Construindo números complexos

Como não existe solução real para a equação $x^2 + 1 = 0$, os matemáticos simplesmente criaram um objeto que tinha essa propriedade e o chamaram de número imaginário i. Assim, i é um número não real tal que $i^2 = -1$. Para tornar i relevante para o conjunto existente de números reais $\mathbb{R}$, os matemáticos precisavam colocar este i em um conjunto que parecia ser maior que o próprio $\mathbb{R}$, mas ainda seguia muitas das mesmas regras algébricas de $\mathbb{R}$. Anteriormente, os conjuntos numéricos que os matemáticos consideravam eram apenas o conjunto dos números naturais. Para que a operação de subtração fizesse sentido, estenderam e obtiveram o conjunto dos números inteiros. Para que a operação de divisão também fizesse sentido, estenderam e obtiveram o conjunto dos números racionais. Nesse conjunto a equação $x^2 = 2$, por exemplo, não fazia sentido, pois as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não pertencem ao conjunto $\mathbb{Q}$, então criaram o conjunto dos números irracionais, indicados por $\mathbb{I}$. Finalmente, da união dos racionais com os irracionais, surgiu o conjunto dos números reais:

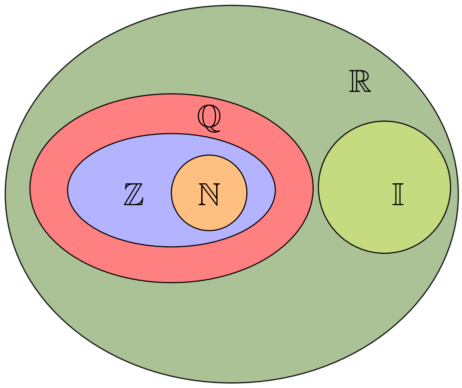
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Desse modo, podemos representar as relações

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

no seguinte diagrama de Venn.

Figura 4: Diagrama de Venn representando o conjunto dos números reais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas como explicado anteriormente, foi preciso novamente estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado conjunto dos números complexos, que também podem ser somados, multiplicados e extraídos à raiz quadrada de um número negativo.

Definição 3.1. *Definimos o conjunto dos números complexos, denotados por $\mathbb{C}$, como:*

$$\mathbb{C} = \big\{a + bi \ \mid \ a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Um número complexo isolado é simplesmente um número real a adicionado a outro número real b multiplicado por esse novo número imaginário i. A partir de sua definição, fica claro que $\mathbb{C}$ parece conter duas cópias dos números reais $\mathbb{R}$; um dos quais fica por si só e o outro está ligado a i. Se escrevermos $z = a + bi$, teremos as seguintes definições.

Observação 3.2. *Vale ressaltar que os números complexos também podem ser representados na notação $z = a + ib$, sendo uma boa notação, principalmente, quando usamos a forma polar dos números complexos, pois essa notação evita enganos como: $z = \rho\big(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta i)\big)$, tendo em vista que o ângulo do seno pode ser confundido com um número imaginário. Deste modo, como não iremos utilizar a forma polar dos números complexos iremos adotar $z = a + bi$.*

Definição 3.2 (Número complexo)**.** *Um número complexo z é qualquer expressão da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária que satisfaz $i^2 = -1$.*

Definição 3.3. *Dado um número complexo, temos:*

(i) A ***parte real*** *de z é a porção do número complexo não ligada ao i. Assim, é dado por:*

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a + bi) = a.$$

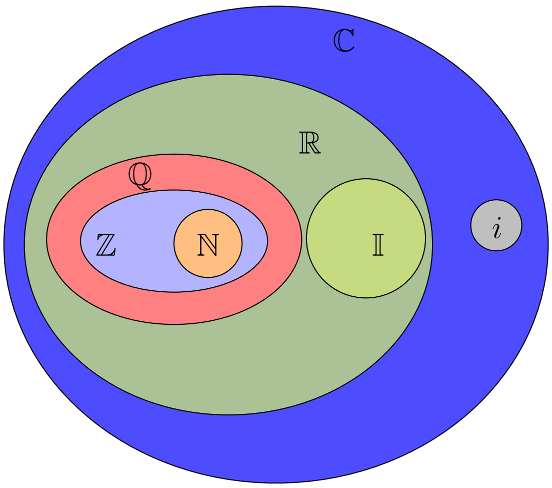
(ii) A ***parte imaginária*** *de z é a porção do número complexo que é anexado ao i. Assim, é dado por:*

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a + bi) = b.$$

Observação 3.3. *Em particular, a parte imaginária não inclui o termo i imaginário. É importante notar que se z é um número complexo, então suas partes real e imaginária são ambos números reais. Como os números complexos eram vistos como uma extensão do conjunto dos números reais, é natural acreditar que $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Claro, para provar essa inclusão do subconjunto, devemos mostrar que se $x \in \mathbb{R}$, então $x \in \mathbb{C}$. De fato, se $x \in \mathbb{R}$, então $x = x + 0i \in \mathbb{C}$. Assim, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. De fato, temos a seguinte série de inclusões de subconjuntos:*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Figura 5: Diagrama de Venn representando o conjunto dos números complexos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um par ordenado representa um ponto no plano complexo, a cada ponto $P(a, b)$ do plano, podemos associar um único número complexo $z = a + bi$. Quando um número complexo apresentar sua parte real $\mathrm{Re}(z)$ igual a zero podemos dizer que é um número imaginário puro e quando sua parte imaginária $\mathrm{Im}(z)$ for igual a zero podemos dizer que é um número real.

Observação 3.4. *O termo "número complexo" deve-se ao matemático alemão Carl Gauss (1777-1855). Gauss é considerado por muitos o maior matemático de todos os tempos. Ele fez contribuições importantes para quase todas as áreas da matemática, da teoria dos números à geometria não-euclidiana, à astronomia e ao magnetismo. Seu nome precede uma riqueza de teoremas e definições em toda a matemática.*

3.2 Aritmética Complexa

Acima, vimos que $\mathbb{C}$ é uma extensão de $\mathbb{R}$ no sentido de que $\mathbb{R}$ pode ser visto como um subconjunto de $\mathbb{C}$. Devemos, no entanto, também munir $\mathbb{C}$ de uma estrutura algébrica que seja compatível com a estrutura algébrica de $\mathbb{R}$. De fato, a aritmética complexa é definida exatamente como seria de esperar, com a condição adicional de que $i^2 = -1$. Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, podemos definir aritmética complexa da seguinte maneira.

Definição 3.4 (Igualdade). *Dois números complexos são iguais quando suas partes reais e imaginárias forem respectivamente iguais.*

Observação 3.5. *Considere $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos, temos:*

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ (a + bi) &= (c + di) \\ z_1 &= z_2 \iff a = c \text{ e } b = d \end{aligned}$$

Definição 3.5 (Adição). *Na soma de números complexos é somado parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.*

Observação 3.6. *Seja $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$ dois números complexos, temos:*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + bi + c + di \\ &= (a + c) + (bi + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i. \end{aligned}$$

Definição 3.6 (Subtração). *Na subtração de números complexos operamos a parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.*

Observação 3.7. *Considere $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos, então:*

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$
\begin{aligned}
&= a + bi - c - di \\
&= (a - c) + (bi - di) \\
&= (a - c) + (b - d)i.
\end{aligned}
$$

Definição 3.7 (Multiplicação). *A multiplicação de números complexos é definida por* $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$*, onde* z_1 *e* z_2 *são complexos quaisquer.*

Observação 3.8. *Deve-se aplicar a propriedade distributiva.*

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac + adi + bci - bd \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i.
\end{aligned}
$$

Definição 3.8 (Conjugado). *Dado um número complexo* $z = a + bi$*, chama-se* $\bar{z} = a - bi$ *de conjugado de* z*. Ou seja, para obter o conjugado de um número complexo basta trocar o sinal da unidade imaginária, portanto:*

$$z = a + ib \iff \bar{z} = a - bi.$$

Definição 3.9 (Divisão). *Dado dois números complexos, sendo o denominador não nulo, a divisão é definida pelo produto do conjugado do denominador sobre numerador e denominador simultaneamente, portanto:*

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2}{z_1}\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1}.$$

Observação 3.9. *Considere* $z_1 = a + bi \neq 0$ *e* $z_2 = c + di$ *dois números complexos:*

$$
\begin{aligned}
\frac{z_2}{z_1} &= \frac{a + bi}{c + di}\frac{c - di}{c - di} \\
&= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c)^2 - (di)^2} \\
&= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} \\
&= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.
\end{aligned}
$$

Teorema 3.1. *A operação de adição em* $\mathbb{C}$ *verifica as seguintes propriedades:*

(A_1) Propriedade associativa

(A_2) Propriedade comutativa

(A_3) Existência de elemento neutro

(A_4) Existência de elemento inverso

Demonstração.

(A_1) Seja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ três números complexos quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= a + bi + \Big[(c + di) + \big(e + fi\big)\Big] \\ &= a + bi + \Big[(c + e) + \big(d + f\big)i\Big] \\ &= \big(a + (c + e)\big) + \Big(b + \big(d + f\big)\Big)i \\ &= \big((a + c) + e\big) + \big((b + d) + f\big)i \\ &= \big[(a + c) + (b + d)i\big] + e + fi \\ &= \big[(a + bi) + (c + di)\big] + \big(e + fi\big) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

(A_2) Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \\ &= (c + di) + (a + bi) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

(A_3) Seja $z_1 = a + bi$ um número complexo. Existe um $n = x + yi$ tal que:

$$\begin{aligned} z_1 + n &= z_1 \\ (a + bi) + (x + yi) &= a + bi \\ (a + x) + (b + y)i &= a + bi. \end{aligned}$$

Pela definição de igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} a + x = a \Rightarrow x = 0 \\ b + y = b \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Portanto, $n = 0 + 0i = 0$.

(A_4) Para cada número complexo $z_1 = a + bi$, existe um inverso $-z_1 = g + hi$:

$$\begin{aligned} z_1 + (-z_1) &= n \\ (a + bi) + (g + hi) &= 0 + 0i \\ (a + g) + (b + h)i &= 0 + 0i \end{aligned}$$

Pela definição de igualdade de números complexos, temos: $a + g = 0 \Rightarrow g = -a$ e $b + h = 0 \Rightarrow h = -b$. Portanto, $-z_1 = -a - bi$.

□

Teorema 3.2. *A operação de multiplicação em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:*

(M_1) Propriedade associativa

(M_2) Propriedade comutativa

(M_3) Existência de elemento neutro

(M_4) Existência de elemento inverso

Demonstração.

(M_1) Seja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ três números complexos quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [(a + bi)(c + di)](e + fi) \\ &= (ac + adi + bci + bdi^2)(e + fi) \\ &= (ac + adi + bci - bd)(e + fi) \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) \\ &= (ac - bd)e + f(ad - bd)i + e(ad + bc)i + f(ad + bc)i^2 \\ &= (ac - bd)e + f(ac - bd)i + e(ad + bc)i - f(ad + bc) \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i \\ &= (ace - adf - bde - bcf) + (ade + acf + bce - bdf)i \\ &= ace - adf + adei + acfi - bde - bcf + bcei - bdfi \\ &= a(ce - df) + a(cf + de)i + b(ce - df)i + b(cf + de)i^2 \\ &= (a + bi)(ce - df) + (a + bi)(cf + de)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a+bi)[(ce-df)+(cf+de)i] \\
&= (a+bi)(ce+cfi+edi-df) \\
&= (a+bi)(ce+cfi+edi+dfi^2) \\
&= (a+bi)[(c+di)(e+fi)] \\
&= z_1(z_2z_3).
\end{aligned}$$

(M_2) Seja $z_1 = a+bi$ e $z_2 = x+yi$ dois números complexos quaisquer, temos:

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (a+ib)(x+iy) \\
&= ax+ayi+bxi+byi^2 \\
&= ax+ayi+bxi-by \\
&= (ax-by)+(ay+bx)i \\
&= ax+byi^2+ayi+bxi \\
&= ax+ayi+bxi+byi^2 \\
&= a(x+yi)+bi(x+yi) \\
&= (x+yi)(a+bi) \\
&= z_2z_1.
\end{aligned}$$

(M_3) Existe um número complexo $p = (r+si)$ tal que:

$$\begin{aligned}
z_1p &= z_1 \\
(a+bi)(r+si) &= a+bi \\
(ar-bs)+(as+br)i &= a+bi.
\end{aligned}$$

Pela definição de igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} ar-bs = a \\ as+br = b. \end{cases}$$

Temos a primeira igualdade:

$$\begin{aligned}
ar-bs &= a \\
ar-a &= bs \\
a(r-1) &= bs.
\end{aligned}$$

e a segunda igualdade:

$$\begin{aligned} as + br &= b \\ br - b &= -as \\ b(r-1) &= -as. \end{aligned}$$

Podemos montar um sistema. Multiplicando a primeira equação por a e a segunda por b, temos:

$$\begin{cases} a^2(r-1) &= \quad abs \\ b^2(r-1) &= -abs. \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$(a^2 + b^2)(r-1) = 0.$$

Assim, $a^2 + b^2 = 0$ ou $r - 1 = 0$, como $a^2 + b^2$ só pode resultar em um número positivo, então $a^2 + b^2 \neq 0$, portanto $r = 1$. Assim:

$$ar - bs = a \Rightarrow a - bs = a \Rightarrow -bs = 0 \Rightarrow s = 0.$$

Portanto, $z_1 = 1 + 0i = 1$.

(M_4) Para cada número complexo $z_1 = (a + bi) \neq 0$, existe um número complexo inverso $z_1^{-1} = c + di$:

$$\begin{aligned} z_1 z_1^{-1} &= p \\ (a+bi)(c+di) &= 1 + 0i \\ ac + adi + bci + bdi^2 &= 1 + 0i \\ (ac - bd) + (adi + bci) &= 1 + 0i \\ (ac - bd) + (ad + bc)i &= 1 + 0i. \end{aligned}$$

Pela definição de igualdade podemos montar um sistema:

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Vamos multiplicar a primeira equação do sistema por a e a segunda por b. Em seguida ao somar ambas equações, temos:

$$\begin{cases} a^2c - abd = a \\ b^2c + abd = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (a^2 + b^2)c = a \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Substituindo c no sistema (1):

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{a^2+b^2} & - & bd & = & 1 \\ \dfrac{ab}{a^2+b^2} & + & ad & = & 0. \end{cases} \tag{3}$$

Isolando o valor de d na segunda equação do sistema (3):

$$\begin{aligned} -ad &= \frac{ab}{a^2+b^2} \\ d &= \frac{-ab}{a(a^2+b^2)} \\ d &= \frac{-b}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Substituindo d na primeira equação do sistema (3):

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2+b^2} - b\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) &= 1 \\ \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} &= 1 \\ \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, como $z_1^{-1} = c + di$, temos $z_1^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$.

□

Teorema 3.3. *A combinação entre a propriedade de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$ verifica a seguinte propriedade:*

(D_1) Distributividade:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Demonstração. Seja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ três números complexos.

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ &= (a+bi)[(c+di) + (e+fi)] \\ &= (a+bi)[c+di+e+fi] \\ &= (a+bi)[(c+e) + (di+fi)] \\ &= (a+bi)[(c+e) + (d+f)i] \\ &= (a+bi)(c+e) + (a+bi)(d+f)i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ac + ae + bci + bei + (ad + af + ibd + ibf)i \\
&= ac + ae + bci + bei + adi + afi - bd - bf \\
&= (ac + ae - bd - bf) + (adi + afi + bci + bei) \\
&= (ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i \\
&= [a(c + e) - b(d + f)] + [a(d + f) + b(c + e)]i \\
&= a(c + e) + b(d + f)i^2 + a(d + f)i + b(c + e)i \\
&= a(c + e) + b(c + e)i + a(d + f)i + b(d + f)i^2 \\
&= (a + bi)(c + e) + (ai + bi^2)(d + f) \\
&= (a + bi)(c + e) + (a + bi)i(d + f) \\
&= z_1z_2 + z_1z_3.
\end{aligned}
$$

□

As operações aritméticas acima em $\mathbb{C}$ dão a ele uma estrutura algébrica que é muito semelhante a $\mathbb{R}$, mas também utiliza o fato de que $i^2 = -1$. Observe que as definições acima também mostram que $\mathbb{C}$ goza de boas propriedades algébricas, como ser fechado sob adição, multiplicação, inversas aditivas e inversas multiplicativas. Na verdade, $\mathbb{C}$, assim como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, é um corpo.

3.3 A geometria do plano complexo

3.3.1 O Plano Complexo

A partir de sua definição, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ pode ser visto como algo semelhante ao produto de duas cópias de $\mathbb{R}$, uma para sua parte real e outra para sua parte imaginária. Isso implica que, se formos atribuir algum tipo de geometria aos números complexos, devemos olhar para o plano real $\mathbb{R}^2$ como inspiração. O plano real $\mathbb{R}^2$ é dado por:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Geometricamente, interpretamos isso como um plano bidimensional, onde os elementos individuais do plano podem ser dados em termos de suas coordenadas x e y. Como os números complexos são definidos por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

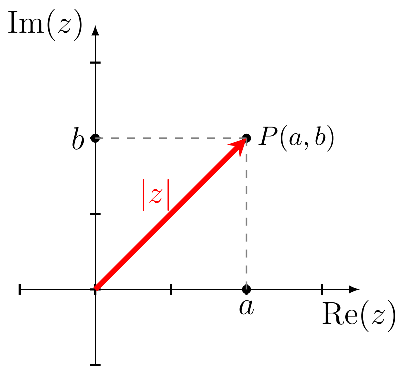
podemos pensar na parte real a do número complexo como a coordenada x e a parte imaginária b como a coordenada y. Assim, o plano complexo é o plano bidimensional com dois eixos, um eixo horizontal real e um eixo vertical imaginário. Posicionamos o número complexo $a + bi$ para ter a coordenada a no eixo real e b no eixo imaginário. Assim, se pensarmos no plano complexo como $\mathbb{R}^2$, então o número complexo $a + bi$ deve ser pensado como (a, b). Esse conjunto de eixos recebe o nome de plano de Argand-Gauss ou simplesmente plano complexo. O ponto é a representação do número complexo $z = a + bi$ no plano, sendo denotado como afixo ou imagem, bem como é formado por duas coordenadas com uma parte imaginária e uma complexa.

Podemos ainda interpretar algumas das álgebras acima dos números complexos nesta nova lente geométrica. Damos alguns exemplos abaixo.

- $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então a soma $z_1 + z_2$ é o ponto no plano que, juntamente com z_1, z_2 e 0 são os vértices de um paralelogramo.
- $z \in \mathbb{C}$, então seu conjugado complexo $\overline{z}$ é simplesmente a reflexão do ponto z em torno do eixo real.

Observe que se z for real, então ele está no eixo real e, portanto, refletir sobre esse eixo não mudará o ponto; esta é a manifestação geométrica do fato de que se z é real, então $\overline{z} = z$.

Figura 6: Plano complexo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.2 Módulo de um número complexo

Na geometria convencional em $\mathbb{R}^2$, podemos calcular a distância entre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e a origem $(0, 0)$ por

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se traduzirmos isso em termos do plano complexo, então a distância entre um número complexo $z = a + bi$ e o número complexo $0 + 0i$ é

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Isso inspira a seguinte definição:

Proposição 3.1. *Dado um número complexo $z = a + bi$, sendo a e b dois números reais, o módulo do número complexo é a distância entre a origem O e o afixo de z. Denotamos como $|z|$ ou ϱ o módulo de um número complexo.*

$$|z| = \varrho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Demonstração. Tomando os pontos $O(0,0)$ e $P(a,b)$, temos então:

$$\begin{aligned} d_{OP}^2 &= (a-0)^2 + (b-0)^2 \\ d_{OP} &= \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} \\ d_{OP} &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4. *A operação do módulo de um número complexo pode verificar as seguintes propriedades:*

(a) $|z_1| = |\overline{z_1}|$

(b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(c) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(d) $|z_1^n| = |z_1|^n$

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demonstração.

(a) Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos quaisquer, então:

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \\ \overline{z_1} &= a - bi \Rightarrow \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |z_1| &= |\overline{z_1}|. \end{aligned}$$

(b) Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos quaisquer, então:

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i \\
|z_1z_2| &= \sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2} \\
&= \sqrt{a^2-2abcd+b^2d^2+b^2c^2+2abcd+a^2d^2} \\
&= \sqrt{c^2(a^2+b^2)+d^2(a^2+b^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \\
&= |z_1||z_2|.
\end{aligned}$$

(c) Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$ dois números complexos quaisquer, então:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|\frac{a+bi}{c+di}\right| \\
&= \left|\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right| \\
&= \left|\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+(di)^2}\right| \\
&= \left|\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right| \\
&= \sqrt{\frac{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2+2acbd+b^2d^2+b^2c^2-2bcad+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)d^2}{(c^2+d^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)}} \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}.
\end{aligned}$$

(d) Seja $z_1 = a + bi$ um número complexo qualquer, então vamos utilizar a segunda propriedade de módulo para fazer a demonstração, veja:

$$\begin{aligned} |z_1^n| &= |z_1 z_1 \ldots z_n| \\ &= |z_1||z_1| \ldots |z_n| \\ &= |z_1|^n. \end{aligned}$$

(e) Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, onde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que a propriedade da desigualdade triangular também é válida para os complexos. Então, temos que $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)i \\ |z_1 + z_2| &= \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}. \end{aligned}$$

Agora vamos substituir os valores encontrados na desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\ \left(\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}\right)^2 &\leq \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 \\ (a + c)^2 + (b + d)^2 &\leq a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} + c^2 + d^2 \\ 2ac + 2bd &\leq 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\ 2(ac + bd) &\leq 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\ ac + bd &\leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\ (ac + bd)^2 &\leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Podemos ver que isso é exatamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz sendo válida para números reais, e como sabemos que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ podemos afirmar que a desigualdade triangular também é verdadeira para os números complexos, assim concluímos a demonstração.

□

3.4 Rotações no plano

Sabemos que a buscar por soluções de equações do terceiro grau motivou um nova pergunta: como resolver equações como $x^2 + 36 = 0$? Isto é, como trabalhar com as raízes negativas. A partir disso, a história dos números imaginários começou, inicialmente, sem grande valor, mas no final acabou recebendo o seu devido reconhecimento. Agora vamos a analisar a ideia que motivou Hamilton a procurar aplicações de rotações no espaço.

3.4.1 Potência da unidade imaginária

Como já definido anteriormente, tem-se que $i^2 = -1$, mas e se elevarmos a unidade imaginária a outros valores. Deste modo, temos:

$$\begin{aligned}
i^0 &= 1 \\
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 i = (-1)i = -i \\
i^4 &= i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Podemos resumir da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
i^{4n} &= 1 \\
i^{4n+1} &= i \\
i^{4n+2} &= -1 \\
i^{4n+3} &= -i
\end{aligned}$$

onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Portanto, temos a seguinte sequência:

Tabela 1: Potências crescentes de i.

i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7
1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir das potências de i notamos a existência da sequência $\big(1, i, -1, -i, 1, \ldots\big)$, onde temos quatro resultados possíveis dependentes do expoente. Observe atentamente e perceba que essa sequência caracteriza a rotação de um ponto no sentindo anti-horário. De um ponto para o outro temos uma rotação de $90°$ sobre o plano complexo, bem como temos que o aumento da potência resulta na rotação do ponto, isto é, o produto pela unidade imaginária i é equivalente a girar o ponto em $90°$. Analisamos o caso das potências crescente e positivas, mas o que acontece quando as potências são negativas? vamos verificar.

$$
\begin{aligned}
i^0 &= 1 \\
i^{-1} &= \frac{1}{i} = \frac{1(i)}{i(i)} = -i \\
i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \\
i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1(i)}{-i(i)} = i \\
i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1 \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Logo, a seguinte sequência é formada:

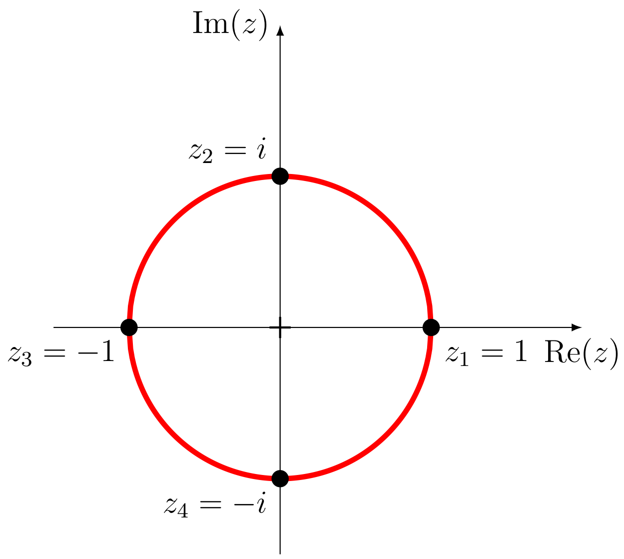
Tabela 2: Potências decrescentes de i.

i^0	i^{-1}	i^{-2}	i^{-3}	i^{-4}	i^{-5}	i^{-6}	i^{-7}
1	$-i$	-1	i	1	$-i$	-1	i

Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma análoga encontramos um ciclo que se inicia no ponto $(1, 0)$, mas com uma diferença, temos rotações no sentido horário.

Figura 7: Rotações da unidade imaginária.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas o que acontece se tomarmos um número complexo diferente da unidade para realizar o produto? Vamos verificar. Considere o número complexo $z_1 = 1 + 2i$, vamos rotacioná-lo no plano complexo através de multiplicações sucessivas por i. Primeiramente, vamos multiplicar z_1 por i, então:

$$iz_1 = i(1 + 2i) = i + 2i^2 = i - 2 = z_2.$$

Agora multiplicaremos z_2 por i:

$$iz_2 = i(-2 + i) = -2i + i^2 = -1 - 2i = z_3.$$

Multiplicando z_3 por i:

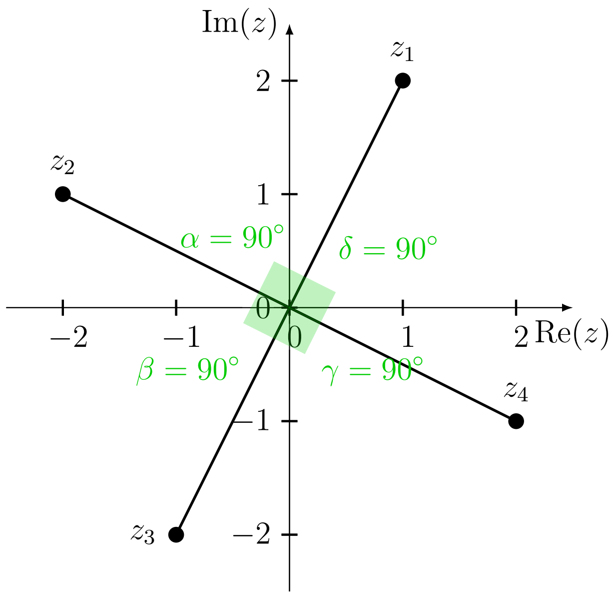
$$iz_3 = i(-1 - 2i) = -i - 2i^2 = -i + 2 = z_4.$$

Por último realizamos o produto de z_4 por i:

$$iz_4 = i(-i + 2) = -i^2 + 2i = 1 + 2i = z_1.$$

Deste modo, foi realizado uma volta completa do plano complexo no sentido anti-horário. Além disso, é fácil ver que o ângulo formado entre um complexo e resultado do mesmo após a sua multiplicação por i é sempre $90°$. Veja o gráfico abaixo:

Figura 8: Rotações sucessivas no plano.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos rotacionar o mesmo número complexo no sentido horário, basta agora multiplicamos por i^{-1}. Mas, como $i^{-1} = -i$, vamos realizar multiplicações sucessivas por $-i$. Primeiro vamos multiplicar z_1 por $-i$:

$$-iz_1 = -i(1 + 2i) = -i - 2i^2 = -i + 2 = z_4.$$

Agora multiplicaremos z_4 por $-i$:

$$-iz_4 = -i(-i + 2) = i^2 - 2i = -1 - 2i = z_3.$$

Multiplicando z_3 por $-i$:

$$-iz_3 = -i(-1 - 2i) = i + 2i^2 = i - 2 = z_2.$$

Por último realizamos o produto de z_2 por $-i$:

$$-iz_2 = -i(i - 2) = -i^2 + 2i = 1 + 2i = z_1.$$

De modo análogo realizamos uma rotação partindo de z_1, mas no sentido horário. As rotações no sentido horário e anti-horário nos mostra o poder dos números complexos no plano, mas será que também funciona no espaço? Esse foi o questionamento de Hamilton, de modo que o levou a descobrir um novo conjunto.

É possível girar um ponto no plano de Argand-Gauss através do produto entre números complexos, pois dado dois números complexos sendo um de norma unitária responsável por funcionar com um rotor e o outro um número complexo não nulo que será o ponto que desejaremos mover. No entanto, esse trabalho busca apenas apresentar a ideia intuitiva que motivou a descoberta dos quatérnions, isto é, as rotações no plano complexo. Vale ressaltar que também é possível realizar rotações de números complexos por meio de matrizes.

4 Quatérnions

A descoberta dos números complexos solucionou várias questões que intrigava os matemáticos, mas ainda existiam problemas em aberto, principalmente sobre a representação de números complexos no espaço. Deste modo, Hamilton apresentava grande interesse sobre o assunto, então ele teve a ideia de tentar representar os números complexos como pares ordenados, o seu objetivo era construir uma representação no espaço tridimensional. A sua primeira tentativa foi a construção dos tripletos, onde acrescentou mais um elemento j a estrutura dos número complexos, onde $j^2 = -1$, semelhante unidade imaginária i. Deste modo, temos que um tripleto seria representado como:

$$a + bi + cj, \text{ onde: } i^2 = j^2 = -1.$$

Ao construir a estrutura dos tripletos algumas questões aparecem, como seria a sua interpretação? As propriedades provenientes dos números complexos ainda seriam conservadas? Hamilton buscou respostas para essas perguntas.

> Em 1830, Hamilton fez seu primeiro teste, ao tentar definir uma multiplicação de tripletos, de modo que seu produto pudesse ser interpretado via rotações no espaço, baseando-se nas ideias de Warren em "Um tratado sobre a Representação Geométrica de Raízes Quadradas de Quantidades Negativas". (OLIVEIRA, 2015, p. 17).

Verificou-se que as propriedades com relação à adição eram conservadas, igualmente aos números complexos. Mas, quando Hamilton define a multiplicação alguns problemas aparecem, como a aparição do termo ij. Hamilton passou vários anos tentando resolver o problema do produto nos tripletos. Após muitas tentativas sem sucesso, Hamilton ainda não tinha descoberto a peça chave para solucionar a multiplicação de tripletos. No entanto, no dia 16 de outubro de 1843, Hamilton caminhava com sua esposa sobre a ponte do Royal Canal em Dublin, quando teve um estalo de genialidade, ele descobriu a fórmula fundamental para a definição da multiplicação de quatérnions. Como um ato de felicidade ele gravou a fórmula com um canivete em uma pedra da ponte de Brougham. Chamou os seus números complexos de quatro dimensões de quatérnions, sendo assim apresentou a todos uma estrutura algébrica não comutativa.

Sir William Rowan Hamilton foi um brilhante matemático irlandês que viveu por volta de (1805-1865), também foi astrônomo e físico responsável pela descoberta de um novo conjunto, bem como definiu a álgebra dos quatérnions dedicando-se pelo resto de sua vida em buscar aplicações de sua descoberta na área da mecânica, geometria e física.

Vale ressaltar que os quatérnions fazem partem de um conjunto chamado Hipercomplexo. Chamamos de Números Hipercomplexos o conjunto que representa os números da forma $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \cdots + a_n i_n$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ são unidades imaginárias diferentes entre si. Deste modo, os elementos do conjunto dos números hipercomplexos podem ter uma ou mais unidades imaginárias. Também podemos citar alguns de seus subconjuntos como por exemplo os Quatérnions $\mathbb{H}$, Octônions $\mathbb{O}$ e Sedênions $\mathbb{S}$. Além disso, podemos dizer que o conjunto dos números complexos é um caso particular dos Hipercomplexos, sendo um número que possui apenas uma unidade imaginária.

Definição 4.1. *O conjunto dos quatérnions pode ser denotado por $\mathbb{H}$ e definido como*

$$\mathbb{H} = \left\{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

em que i, j e k são tais que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

O produto de números complexos permite que a comutatividade seja preservada, no entanto, quando se trata de quatérnions a comutatividade do produto é perdida. Agora vamos explorar o produto entre as unidades imaginárias dos quatérnions.

$$\begin{aligned} jk &= i \\ ji &= -k \\ ij &= k \\ ik &= -j \\ ki &= j \\ kj &= -i \end{aligned}$$

Temos também algumas outras equivalências obtidas através do produto entre quaternions, observe:

$$ki \;=\; -ik \;=\; j$$

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \end{aligned}$$

Demonstração. A partir da definição temos que:

(i) $ijk = -1 \Rightarrow i(ijk) = i(-1) \Rightarrow i^2jk = -i \Rightarrow jk = i$.

(ii) $jk = i \Rightarrow j(jk) = j(i) \Rightarrow j^2k = ji \Rightarrow -k = ji \Rightarrow ji = -k$.

(iii) $ijk = -1 \Rightarrow (ijk)k = (-1)k \Rightarrow ijk^2 = -k \Rightarrow -ij = -k \Rightarrow ij = k$.

(iv) $ij = k \Rightarrow i(ij) = i(k) \Rightarrow i^2j = ik \Rightarrow -j = ik \Rightarrow ik = -j$.

(v) $ij = k \Rightarrow (ij)i = (k)i \Rightarrow i(ji) = ki \Rightarrow i(-k) = ki \Rightarrow -ik = ki \Rightarrow -(-j) = ki \Rightarrow j = ki \Rightarrow ki = j$.

(vi) $ij = k \Rightarrow (ij)j = (k)j \Rightarrow ij^2 = kj \Rightarrow -i = kj \Rightarrow kj = -i$.

(vii) $ij = k \Rightarrow (ij)i = (k)i \Rightarrow i(ji) = ki \Rightarrow i(-k) = ki \Rightarrow -ik = ki$.

(viii) $j = ki \Rightarrow i(j) = i(ki) \Rightarrow ij = (ik)i \Rightarrow ij = -ji$.

(ix) $k = ij \Rightarrow j(k) = j(ij) \Rightarrow jk = (ji)j \Rightarrow jk = -kj$.

□

Tabela 3: Tábua do produto entre unidades imaginárias

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1 Operações entre Quatérnions

Notação 2. *Vamos denotar os quatérnions da seguinte forma:*

$$q = q_0 + \vec{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = \big(q_0, \vec{q}\big).$$

A composição de um quatérnio $q \in \mathbb{R}^4$ é dada por $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ são escalares quaisquer e i, j e k são as unidades imaginárias que compõem a parte vetorial, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. Além disso, algumas operações entre quatérnions podem resultar em cálculos extensos, portanto, com o efeito de minimizar expressões, em alguns casos iremos adotar a notação de par ordenado dos quatérnions denotado por $q = \big(q_0, \vec{q}\big)$.

4.1.1 Igualdade entre quatérnions

Definição 4.2 (Quatérnions iguais). *Tomando dois quatérnions quaisquer $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ e $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$. Para que um quatérnio seja igual a outro, é necessário que as coordenadas de ambos quatérnions sejam iguais. Ou seja, $q = p$ se, e somente se $q_0 = p_0$, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2$ e $q_3 = p_3$.*

Definição 4.3 (Quatérnio puro). *Chamamos um quatérnio de puro quando sua parte real for nula. Portanto:*

$$p = p_1 i + p_2 j + p_3 k = \big(0, \vec{p}\big).$$

Onde: $i, j, k \in \mathbb{H}$ e os escalares p_1, p_2, $p_3 \in \mathbb{R}$.

Definição 4.4 (Quatérnio real). *Um quatérnio é dito real quando sua parte vetorial é nula e a escalar diferente de zero. Portanto:*

$$q = q_0 = \big(q_0, 0\big).$$

4.1.2 Adição entre quatérnions

Definição 4.5 (Adição). *A adição de quatérnions é dada pela soma da parte escalar com parte escalar e parte vetorial com parte vetorial.*

$$q + p = \big(q_0 + p_0\big) + \big(\vec{q} + \vec{p}\big)$$

sendo $q = q_0 + \vec{q}$ e $p = p_0 + \vec{p}$ quatérnions quaisquer.

Na soma de quatérnios as propriedades da comutatividade e associatividade são preservadas, bem como a existência do elemento neutro e elemento simétrico.

Teorema 4.1. *A operação de adição em $\mathbb{H}$ verifica as seguintes propriedades:*

(A_1) Propriedade associativa

(A_2) Propriedade comutativa

(A_3) Existência de elemento neutro

(A_4) Existência de elemento inverso

Demonstração.

(A_1) Seja $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k$ três quatérnios quaisquer, temos:

$$\begin{aligned}
q + (p + r) &= q_0 + \vec{q} + \big(p_0 + \vec{p} + r_0 + \vec{r}\big) \\
&= q_0 + q_1i + q_2j + q_3k + \Big[\big(p_0 + p_1i + p_2j + p_3k\big) + \big(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k\big)\Big] \\
&= q_0 + q_1i + q_2j + q_3k + \Big[\big(p_0 + r_0\big) + \big(p_1 + r_1\big)i + \big(p_2 + r_2\big)j + \big(p_3 + r_3\big)k\Big] \\
&= \big[q_0 + p_0 + r_0\big] + \big[q_1 + p_1 + r_1\big]i + \big[q_2 + p_2 + r_2\big]j + \big[q_3 + p_3 + r_3\big]k \\
&= \Big[\big(q_0 + p_0\big) + r_0\Big] + \Big[\big(q_1 + p_1\big) + r_1\Big]i + \Big[\big(q_2 + p_2\big) + r_2\Big]j \\
&\quad + \Big[\big(q_3 + p_3\big) + r_3\Big]k \\
&= \big(q_0 + p_0\big) + \big(q_1 + p_1\big)i + \big(q_2 + p_2\big)j + \big(q_3 + p_3\big)k + r_0 + r_1i \\
&\quad + r_2j + r_3k \\
&= (q + p) + r.
\end{aligned}$$

(A_2) Seja $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k$ dois quatérnions quaisquer, temos:

$$\begin{aligned}
p + r &= p_0 + \vec{p} + r_0 + \vec{r} \\
&= p_0 + p_1i + p_2j + p_3k + r_0 + r_1i + r_2j + r_3k \\
&= \big(p_0 + r_0\big) + \big(p_1 + r_1\big)i + \big(p_2 + r_2\big)j + \big(p_3 + r_3\big)k \\
&= \big(r_0 + p_0\big) + \big(r_1 + p_1\big)i + \big(r_2 + p_2\big)j + \big(r_3 + p_3\big)k \\
&= \big(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k\big) + \big(p_0 + p_1i + p_2j + p_3k\big) \\
&= r + p.
\end{aligned}$$

(A_3) Seja $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $g = g_0 + g_1 i + g_2 j + g_3 k$ dois quatérnios quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} p + g &= p + \vec{p} + g + \vec{g} \\ &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k + g_0 + g_1 i + g_2 j + g_3 k \\ &= \big(p_0 + g_0\big) + \big(p_1 + g_1\big)i + \big(p_2 + g_2\big)j + \big(p_3 + g_3\big)k \\ &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k. \end{aligned}$$

Pela definição de igualdade de quatérnions, temos que um quatérnio é igual a outro quando todas as suas componentes forem iguais as componentes do outro quatérnio:

$$\begin{cases} p_0 + g_0 = p_0 \Rightarrow q_0 = 0 \\ p_1 + g_1 = p_1 \Rightarrow q_1 = 0 \\ p_2 + g_2 = p_2 \Rightarrow q_2 = 0 \\ p_3 + g_3 = p_3 \Rightarrow q_3 = 0. \end{cases}$$

Portanto, temos que o elemento neutro é $q = 0 + 0i + 0j + 0k$.

(A_4) Seja $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ dois quatérnions quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} p + q &= 0 \\ p &= -q \\ p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k &= -q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k. \end{aligned}$$

De forma análoga a demonstração anterior, temos que o inverso aditivo do quatérnio é $p = -q$, ou seja $-p = -p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$.

□

4.1.3 Multiplicação de quatérnions

O produto entre quatérnions é uma combinação entre produto escalar e produto vetorial, denotados respectivamente por $\vec{p} \cdot \vec{q}$ e $\vec{p} \times \vec{q}$. Através dessa multiplicação será possível girar um ponto ao redor desse quatérnio que funciona com um rotor. Deste modo, o produto é uma operação fundamental que precisa está bem definida.

Definição 4.6 (Multiplicação de quatérnions por um escalar)**.** *Seja α um escalar qualquer e $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ um quatérnio, então temos que o produto de um quatérnio por* *um escalar pode ser definido da seguinte maneira:*

$$\alpha q = \alpha q_0 + \alpha q_1 i + \alpha q_2 j + \alpha q_3 k.$$

Definição 4.7 (Multiplicação entre quatérninos)**.** *Seja p e q dois quatérnions quaisquer, onde $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, então o produto é definido por:*

$$pq = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}.$$

Em que escalares $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$ e $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$. Temos que a parte imaginária corresponde a $\vec{p} = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$.

Observação 4.1. *Devemos utilizar a distributividade no produto entre quatérnions. A partir disso, podemos verificar que tanto o produto escalar, quanto o produto vetorial surgem naturalmente.*

$$\begin{aligned}
pq &= \big(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k\big)\big(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\big) \\
&= p_0 q_0 + p_0 q_1 i + p_0 q_2 j + p_0 q_3 k \\
&\quad + p_1 q_0 i + p_1 q_1 i^2 + p_1 q_2 ij + p_1 q_3 ik \\
&\quad + p_2 q_0 j + p_2 q_1 ji + p_2 q_2 j^2 + p_2 q_3 jk \\
&\quad + p_3 q_0 k + p_3 q_1 ki + p_3 q_2 kj + p_3 q_3 k^2 \\
&= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \\
&\quad + p_0 q_1 i + p_1 q_0 i + p_0 q_2 j + p_2 q_0 j + p_0 q_3 k + p_3 q_0 k \\
&\quad + p_1 q_2 k - p_1 q_3 j - p_2 q_1 k + p_2 q_3 i + p_3 q_1 j - p_3 q_2 i \\
&= p_0 q_0 - \big(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3\big) \\
&\quad + p_0\big(q_1 i + q_2 j + q_3 k\big) + q_0\big(p_1 i + p_2 j + p_3 k\big) j \\
&\quad + \Big[\big(p_2 q_3 - p_3 q_2\big) i + \big(p_3 q_1 - p_1 q_3\big) j + \big(p_1 q_2 - p_2 q_1\big) k\Big].
\end{aligned}$$

Ao efetuar o produto vetorial com as componentes do quatérnio, temos:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{p} \times \vec{q} &= p_2 q_3 i + p_3 q_1 j + p_1 q_2 k - p_2 q_1 k - p_3 q_2 i - p_1 q_3 j \\
&= \big(p_2 q_3 i - p_3 q_2 i\big) + \big(p_3 q_1 j - p_1 q_3 j\big) + \big(p_1 q_2 k - p_2 q_1 k\big)
\end{aligned}$$

$$= \big(p_2q_3 - p_3q_2\big)i + \big(p_3q_1 - p_1q_3\big)j + \big(p_1q_2 - p_2q_1\big)k.$$

Agora que verificamos o surgimento do produto escalar e produto vetorial podemos substituir o valor algébrico por suas respectivas notações:

$$\begin{aligned} pq &= p_0q_0 - \big(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3\big) \\ &\quad + p_0\big(q_1i + q_2j + q_3k\big) + q_0\big(p_1i + p_2j + p_3k\big)j \\ &\quad + \Big[\big(p_2q_3 - p_3q_2\big)i + \big(p_3q_1 - p_1q_3\big)j + \big(p_1q_2 - p_2q_1\big)k\Big] \\ &= p_0q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q} + p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}. \end{aligned}$$

Definição 4.8 (Multiplicação entre quatérnions puros)**.** *Seja p e q dois quatérnions puros, onde $p = p_1i + p_2j + p_3k$ e $q = q_1i + q_2j + q_3k$, então o produto é definido por:*

$$pq = -\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{p}\times\vec{q}.$$

Observação 4.2. *Analogamente ao caso geral do produto de quatérnions podemos verificar o produto entre quatérnions puros.*

$$\begin{aligned} pq &= \big(p_1i + p_2j + p_3k\big)\big(q_1i + q_2j + q_3k\big) \\ &= p_1q_1i^2 + p_1q_2ij + p_1q_3ik + p_2q_1ji + p_2q_2j^2 + p_2q_3jk + p_3q_1ki + p_3q_2kj \\ &\quad + p_3q_3k^2 \\ &= -p_1q_1 + p_1q_2k - p_1q_3j - p_2q_1k + p_2q_2 + p_2q_3i + p_3q_1j - p_3q_2i - p_3q_3 \\ &= \big(-p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3\big) + \big(p_2q_3 - p_3q_2\big)i + \big(p_3q_1 - p_1q_3\big)j + \big(p_1q_2 - p_2q_1\big)k \\ &= -\big(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3\big) + \big(p_2q_3 - p_3q_2\big)i + \big(p_3q_1 - p_1q_3\big)j + \big(p_1q_2 - p_2q_1\big)k \\ &= -p\cdot q + \big(p_2q_3 - p_3q_2\big)i + \big(p_3q_1 - p_1q_3\big)j + \big(p_1q_2 - p_2q_1\big)k \\ &= -\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{p}\times\vec{q}. \end{aligned}$$

Observação 4.3. *Perceba que o produto entre quatérnions puros não resulta em um novo quatérnio puro. Ou seja, ele não é fechado para o produto.*

Definição 4.9 (Multiplicação de um quatérnio qualquer por um puro)**.** *Seja q um quatérnio qualquer e p quatérnions puros, onde $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $p = p_1i + p_2j + p_3k$, então o produto é definido por:*

$$qp = -\vec{q}\cdot\vec{p} + q_0\vec{p} + \vec{q}\times\vec{p}.$$

Em que o escalar $q_0 \in \mathbb{R}$ e $\vec{q}, \vec{p} \in \mathbb{H}$.

Observação 4.4. *Através das definições anteriores podemos verificar o seguinte produto.*

Note que $p_0 = 0$*, então:*

$$\begin{aligned} qp &= \big(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\big)\big(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k\big) \\ &= q_0 p_0 - \vec{q}\cdot\vec{p} + q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{p} \\ &= -\vec{q}\cdot\vec{p} + q_0\vec{p} + \vec{q}\times\vec{p}. \end{aligned}$$

Tabela 4: Produto entre quatérnions.

$(p_0,\vec{p})(q_0,\vec{q}) = [p_0 q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q},\ p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}]$
$(0,\vec{p})(0,\vec{q}) = [-\vec{p}\cdot\vec{q},\ \vec{p}\times\vec{q}]$
$(p_0,\vec{p})(0,\vec{q}) = [-\vec{p}\cdot\vec{q},\ p_0\vec{q} + \vec{p}\times\vec{q}]$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 4.5. *Perceba que a notação de par ordenado separa o quatérnio em parte escalar e vetorial da seguinte forma:*

$$\big(p_0,\vec{p}\big)\big(q_0,\vec{q}\big) = [\underbrace{p_0 q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q}}_{Escalar},\ \underbrace{p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}}_{Vetorial}].$$

4.1.4 Conjugado de um quatérnio

Definição 4.10 (Conjugado de um quatérnio)**.** *Seja* $q \in \mathbb{H}$*, então definimos que o seu conjugado é dado por* $\overline{q}$*.*

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k.$$

Vale ressaltar que no caso específico dos quatérnions de rotação o conjugado é igual ao inverso do quatérnio. De fato, veremos posteriormente que, nesse caso, onde $\overline{q} = q^{-1}$ é verdadeiro. A noção de conjugado no conjunto dos quatérnions é semelhante aos números complexos, visto que conservamos o sinal da parte real e trocamos o sinal das parte imaginária que é composta por i, j e k.

Observação 4.6. *Considere* $q = \big(q_0,\vec{q}\big)$ *um quatérnio qualquer e* $\overline{q} = \big(q_0,-\vec{q}\big)$ *o seu conjugado. Então vamos calcular* $q\overline{q}$*:*

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= \big(q_0,\vec{q}\big)\big(q_0,-\vec{q}\big) \\ &= \Big(q_0^2 - \big(\vec{q}\cdot(-\vec{q})\big),\ q_0(-\vec{q}) + q_0\vec{q} + \vec{q}\times(-\vec{q})\Big) \\ &= \big(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,\ 0\big). \end{aligned}$$

Agora vamos trocar a ordem do produto:

$$\begin{aligned}
\overline{q}q &= \big(q_0, -\vec{q}\big)\big(q_0, \vec{q}\big) \\
&= \Big(q_0^2 - \Big(\big(-\vec{q}\big) \cdot \vec{q}\Big),\ q_0\vec{q} + q_0\big(-\vec{q}\big) - \vec{q} \times \vec{q}\Big) \\
&= \big(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,\ 0\big).
\end{aligned}$$

Conclusão, temos que o produto entre um quatérnio qualquer e o seu conjugado é comutativo.

Proposição 4.1. *Seja $q, p \in \mathbb{H}$. Então $\overline{qp} = \overline{p}\ \overline{q}$.*

Demonstração. Analogamente, temos que q e p são quatérnions quaisquer, então:

$$\begin{aligned}
qp &= \big(q_0, \vec{q}\big)\big(p_0, \vec{p}\big) \\
&= \big(q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p},\ q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{p}\big)
\end{aligned}$$

Consequentemente, seu conjugado é dado por:

$$\overline{qp} = \big(q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p},\ -q_0\vec{p} - p_0\vec{q} - \vec{q} \times \vec{p}\big).$$

Agora vamos fazer o produto entre $\overline{p}$ e $\overline{q}$:

$$\begin{aligned}
\overline{p}\ \overline{q} &= \big(p_0, -\vec{p}\big)\big(q_0, -\vec{q}\big) \\
&= \Big(p_0q_0 - \Big(\big(-\vec{p}\big) \cdot \big(-\vec{q}\big)\Big),\ p_0\big(-\vec{q}\big) + q_0\big(-\vec{p}\big) + \big(-\vec{p}\big) \times \big(-\vec{q}\big)\Big) \\
&= \big(q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p},\ -p_0\vec{q} - q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}\big) \\
&= \big(q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p},\ -q_0\vec{p} - p_0\vec{q} - \vec{q} \times \vec{p}\big).
\end{aligned}$$

□

4.1.5 Norma de um quatérnio

Definição 4.11 (Norma de um quatérnio)**.** *Seja q um quatérnio qualquer, tal que $q \in \mathbb{H}$, definimos que a sua norma ou magnitude é dada seguinte forma.*

$$\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Observação 4.7. *Seja q um quatérnio qualquer e $\overline{q}$ o seu conjugado, temos:*

$$q\overline{q} = \big(q_0, \vec{q}\big)\big(q_0, -\vec{q}\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, 0\big) \\
&= \|q\|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, ao aplicar a raiz quadrada temos que $\|q\| = \sqrt{q\overline{q}}$.

Proposição 4.2. *Considere* $q, r \in \mathbb{H}$. *Então* $\|qr\| = \|q\|\|r\|$*:*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\|qr\|^2 &= qr\overline{qr} \\
&= q\ r\ \overline{r}\ \overline{q} \\
&= q(r\overline{r})\overline{q} \\
&= q\|r\|^2\overline{q} \\
&= q\overline{q}\|r\|^2 \\
&= \|q\|^2\|r\|^2.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $\|qr\| = \|q\|\|r\|$. □

Definição 4.12 (Quatérnio normalizado)**.** *É dito um quatérnio normalizado ou quatérnio de norma unitária quando:*

$$q' = \frac{q}{\|q\|}.$$

Definição 4.13 (Quatérnio unitário)**.** *Dizemos que um quatérnio é unitário quando a norma de sua parte vetorial for igual a* 1 *e sua parte escalar for nula, isto é,* $q = \big(0, \hat{q}\big)$. *É denotado por* $\hat{q}$ *apenas a parte vetorial, onde* $\|\hat{q}\| = 1$.

Observação 4.8. *O quatérnio unitário é diferente do quatérnio de norma unitária.*

Definição 4.14 (Quatérnio de rotação)**.** *É um caso especial de quatérnio normalizado o qual chamaremos de quatérnio de rotação, denotado por*

$$q = \big(\cos(\phi), \operatorname{sen}(\phi)\hat{q}\big).$$

Sendo assim, possui norma unitária de modo que $q_0^2 + \|\vec{q}\|^2 = 1$.

Observação 4.9. *O caso particular dos quatérnions de rotação permite a seguinte igualdade. Então, considere* q *um quatérnio de rotação não nulo e* q^{-1} *o seu inverso. A partir da definição de inverso de um quatérnio, temos que*

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}.$$

Como q é um quatérnio de rotação, isso implica que

$$q^{-1} = \overline{q}.$$

Proposição 4.3. *Dado um quatérnio unitário $\hat{q}$, temos que $\hat{q} \cdot \hat{q} = 1$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \hat{q} \cdot \hat{q} &= \big(q_1, q_2, q_3\big) \cdot \big(q_1, q_2, q_3\big) \\ &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned}$$

Mas, sabemos que $\|\hat{q}\| = 1$, ou seja:

$$\begin{aligned} \|\hat{q}\| &= 1 \\ \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} &= 1 \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1^2 \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que o produto escalar de um quatérnio unitário por si mesmo é igual a 1. □

Teorema 4.2. *A operação de multiplicação em $\mathbb{H}$ verifica as seguintes propriedades:*

(M_1) Propriedade associativa

(M_2) Existência do elemento neutro

(M_3) Existência de elemento inverso

(M_4) Distributividade

Observação 4.10. *Os quatérnions não possuem a propriedade comutativa do produto. Isto é, q e p são quatérnions quaisquer, então $qp \neq pq$.*

Demonstração.

(M_1) Seja p, q e r três quatérnions quaisquer. Para realizar a demonstração vamos calcular cada um dos lados separadamente:

$$\begin{aligned} (pq)r &= \Big[\big(p_0, \vec{p}\big)\big(q_0, \vec{q}\big)\Big]\big(r_0, \vec{r}\big) \\ &= \big[p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q},\ p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}\big]\big(r_0, \vec{r}\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\big(p_0q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q}\big)r_0 - \big(p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r}, \big(p_0q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q}\big)\vec{r} \\
&\quad + r_0\big(p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}\big) + \big(p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q}\big)\times\vec{r}\Big] \\
&= \Big[r_0p_0q_0 - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r},\ p_0q_0\vec{r} - \big(\vec{p}\cdot\vec{q}\big)\vec{r} \\
&\quad + r_0p_0\vec{q} + r_0q_0\vec{p} + r_0\big(\vec{p}\times\vec{q}\big) + p_0\vec{p}\times\vec{r} + q_0\vec{p}\times\vec{r} + \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\times\vec{r}\Big] \\
&= \Big[r_0p_0q_0 - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r},\ p_0q_0\vec{r} - \big(\vec{p}\cdot\vec{q}\big)\vec{r} \\
&\quad + r_0p_0\vec{q} + r_0q_0\vec{p} + r_0\vec{p}\times\vec{q} + p_0\vec{q}\times\vec{r} + q_0\vec{p}\times\vec{r} + \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\times\vec{r}\Big]
\end{aligned}
$$

Para continuar a demonstração devemos utilizar a decomposição do duplo produto vetorial $\big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\times\vec{r} = \big(\vec{p}\cdot\vec{r}\big)\vec{q} - \big(\vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p}$, então:

$$
\begin{aligned}
&= \Big[r_0p_0q_0 - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r},\ p_0q_0\vec{r} - \big(\vec{p}\cdot\vec{q}\big)\vec{r} + r_0p_0\vec{q} \\
&\quad + r_0q_0\vec{p} + r_0\vec{p}\times\vec{q} + p_0\vec{q}\times\vec{r} + q_0\vec{p}\times\vec{r} + \big(\vec{p}\cdot\vec{r}\big)\vec{q} - \big(\vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p}\Big].
\end{aligned}
$$

Agora vamos calcular o outro lado da igualdade:

$$
\begin{aligned}
p\big(qr\big) &= \big(p_0,\vec{p}\big)\Big[\big(q_0,\vec{q}\big)\big(r_0,\vec{r}\big)\Big] \\
&= \big(p_0,\vec{p}\big)\big[q_0r_0 - \vec{q}\cdot\vec{r},\ q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{r}\big] \\
&= \Big[p_0\big(q_0r_0 - \vec{q}\cdot\vec{r}\big) - \vec{p}\cdot\big(q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{r}\big),\ p_0\big(q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{r}\big) \\
&\quad + \big(q_0r_0 - \vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p} + \vec{p}\times\big(q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{r}\big)\Big] \\
&= \Big[p_0q_0r_0 - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - \vec{p}\cdot\big(q_0\vec{r}\big) - \vec{p}\cdot\big(r_0\vec{q}\big) - \vec{p}\cdot\big(\vec{q}\times\vec{r}\big),\ p_0q_0\vec{r} + p_0r_0\vec{q} \\
&\quad + p_0\vec{q}\times\vec{r} + \big(q_0r_0 - \vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p} + \vec{p}\times\big(q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{r}\big)\Big] \\
&= \Big[p_0q_0r_0 - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - \vec{p}\cdot\big(\vec{q}\times\vec{r}\big),\ p_0q_0\vec{r} + p_0r_0\vec{q} \\
&\quad + p_0\vec{q}\times\vec{r} + \big(q_0r_0 - \vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p} + \vec{p}\times\big(q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{r}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

Devemos lembrar da propriedade do produto misto $\vec{p}\cdot\big(\vec{q}\times\vec{r}\big) = \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r}$ e novamente o duplo produto vetorial.

$$
\begin{aligned}
&= \Big[p_0q_0r_0 - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - \vec{p}\cdot\big(\vec{q}\times\vec{r}\big), p_0q_0\vec{r} + p_0r_0\vec{q} + p_0\vec{q}\times\vec{r} \\
&\quad + \big(q_0r_0 - \vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p} + \vec{p}\times\big(q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{r}\big)\Big] \\
&= \Big[r_0p_0q_0 - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r},\ p_0q_0\vec{r} + p_0r_0\vec{q} + p_0\vec{q}\times\vec{r} \\
&\quad + q_0r_0\vec{p} - \big(\vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p} + q_0\vec{p}\times\vec{r} + r_0\vec{p}\times\vec{q} + \vec{p}\times\big(\vec{q}\times\vec{r}\big)\Big] \\
&= \Big[r_0p_0q_0 - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r},\ p_0q_0\vec{r} + p_0r_0\vec{q} + p_0\vec{q}\times\vec{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + q_0 r_0 \vec{p} - \big(\vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p} + q_0\vec{p}\times\vec{r} + r_0\vec{p}\times\vec{q} + \big(\vec{p}\cdot\vec{r}\big)\vec{q} - \big(\vec{p}\cdot\vec{q}\big)\vec{r}\Big] \\
= \; & \Big[r_0p_0q_0 - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r},\ p_0q_0\vec{r} - \big(\vec{p}\cdot\vec{q}\big)\vec{r} + p_0r_0\vec{q} \\
& + q_0r_0\vec{p} + r_0\vec{p}\times\vec{q} + p_0\vec{q}\times\vec{r} + q_0\vec{p}\times\vec{r} + \big(\vec{p}\cdot\vec{r}\big)\vec{q} - \big(\vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p}\Big] \\
= \; & \Big[r_0p_0q_0 - r_0\vec{p}\cdot\vec{q} - p_0\vec{q}\cdot\vec{r} - q_0\vec{p}\cdot\vec{r} - \big(\vec{p}\times\vec{q}\big)\cdot\vec{r},\ p_0q_0\vec{r} - \big(\vec{p}\cdot\vec{q}\big)\vec{r} + r_0q_0\vec{q} \\
& + r_0q_0\vec{p} + r_0\vec{p}\times\vec{q} + p_0\vec{q}\times\vec{r} + q_0\vec{p}\times\vec{r} + \big(\vec{p}\cdot\vec{r}\big)\vec{q} - \big(\vec{q}\cdot\vec{r}\big)\vec{p}\Big].
\end{aligned}
$$

(M_2) Seja $q = \big(q_0, \vec{q}\big)$ um quatérnio qualquer e $n = \big(n_0, \vec{n}\big)$ o elemento neutro do produto. Pela definição de elemento neutro, temos que $qn = q$, então:

$$
\begin{aligned}
qn &= q \\
\big(q_0, \vec{q}\big)\big(n_0, \vec{n}\big) &= \big(q_0n_0 - \vec{q}\cdot\vec{n},\ q_0\vec{n} + n_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{n}\big)
\end{aligned}
$$

Como $qn = q$, temos:

$$
\begin{cases}
q_0n_0 - \vec{q}\cdot\vec{n} = q_0 \\
q_0\vec{n} + n_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{n} = \vec{q}.
\end{cases}
$$

Analisando a primeira equação, temos:

$$
\begin{aligned}
q_0n_0 - \vec{q}\cdot\vec{n} &= q_0 \\
q_0n_0 - q_0 - \vec{q}\cdot\vec{n} &= 0 \\
q_0(n_0 - 1) - q_1n_1 - q_2n_2 - q_3n_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, temos que o elemento neutro do produto é $n = \big(1, 0\big)$.

(M_3) Seja q um quatérnio qualquer não nulo e q^{-1} o seu inverso multiplicativo. Pela definição de elemento inverso temos $qq^{-1} = \big(1, 0\big)$, a partir disso devemos multiplicar ambos os lados por $\overline{q}$:

$$
\begin{aligned}
qq^{-1} &= \big(1, 0\big) \\
\overline{q}\big(qq^{-1}\big) &= \overline{q} \\
\big(\overline{q}q\big)q^{-1} &= \overline{q} \\
\|q\|^2 q^{-1} &= \overline{q} \\
q^{-1} &= \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}.
\end{aligned}
$$

Observação 4.11. *Caso q seja um quatérnio de norma unitária é verdade que $q^{-1} = \overline{q}$. Sendo uma propriedade importante para o cálculo das rotações de quatérnions,* *pois isso permite*

$$(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}.$$

De forma análoga ao conjugado. Além disso, perceba que $qq^{-1} = q^{-1}q$ *também é verdadeiro, uma vez que* q *é um quatérnio de norma unitária.*

(M_4) Seja p, q e r quatérnions quaisquer:

$$p(q+r) = pq + pr$$

Vamos calcular separadamente cada um dos lados da igualdade:

$$\begin{aligned} p(q+r) &= (p_0, \vec{p})\Big[(q_0, \vec{q}) + (r_0, \vec{r})\Big] \\ &= (p_0, \vec{p})\big[q_0 + r_0,\ \vec{q} + \vec{r}\big] \\ &= \Big[p_0(q_0 + r_0) - \vec{p} \cdot (\vec{q} + \vec{r}),\ p_0(\vec{q} + \vec{r}) + (q_0 + r_0)\vec{p} + \vec{p} \times (\vec{q} \times \vec{r})\Big] \end{aligned}$$

Agora o outro lado:

$$\begin{aligned} pq + pr &= (p_0, \vec{p})(q_0, \vec{q}) + (p_0, \vec{p})(r_0, \vec{r}) \\ &= (p_0q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q},\ p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}) + (p_0r_0 - \vec{p} \cdot \vec{r},\ p_0\vec{r} + r_0\vec{p} + \vec{p} + \vec{r}) \\ &= \big[p_0q_0 + p_0r_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{r},\ p_0\vec{q} + p_0\vec{r} + q_0\vec{p} + r_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{r}\big] \\ &= \Big[p_0(q_0 + r_0) - \vec{p} \cdot (\vec{q} + \vec{r}),\ p_0(\vec{q} + \vec{r}) + (q_0 + r_0)\vec{p} + \vec{p} \times (\vec{q} + \vec{r})\Big]. \end{aligned}$$

$\square$

Como vimos anteriormente os quatérnions podem ser um tipo de generalização dos números complexos sendo Hamilton o responsável por ciar a sua representação no espaço. Segundo Domingues (2018), após mais de 10 anos de estudo incansável, Hamilton percebeu que era necessário abrir mão da comutatividade para que a álgebra dos quatérnions se consolidasse. Podemos observar que como os quatérnions que representam o conjunto $\mathbb{H}$ não goza da propriedade comutativa do produto, consequentemente, diferente dos números complexos o conjunto $\mathbb{H}$ não pode ser chamado de corpo, pois como vimos não é comutativo. Os quatérnions recebem outro nome referente a sua estrutura algébrica, portanto, podemos chamá-lo de anel de divisão.

"Em 1878, o matematático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) provou que existem apenas três álgebras de divisão associativas: números reais $\mathbb{R}$, números complexos $\mathbb{C}$ e quatérnions $\mathbb{H}$". (VINCE, 2011, p.11, Tradução nossa).

[a]

4.2 Rotações de quatérnions

4.2.1 Rotações no espaço

Para aplicar as rotações de quatérnions é necessário determinar o ângulo desejado, bem como o ponto que será rotacionado e o quatérnio que funcionar como o rotor da operação. Deste modo, para girar um ponto, primeiramente, vamos construir um vetor quatérnio que armazena esse ponto e em seguida realizamos multiplicações entre eles, portanto assim é feita uma rotação de forma resumida. A rotação de quatérnions pode ser feita através das seguintes fórmulas.

Permite rotacionar um ponto no sentido anti-horário:

$$qpq^{-1} = \Big[0, \big(1 - \cos(\theta)\big)\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + \cos(\theta)\vec{p} + \operatorname{sen}(\theta)\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\Big].$$

Permite rotacionar o ponto no sentido horário:

$$q^{-1}pq = \Big[0, \big(1 - \cos(\theta)\big)\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + \cos(\theta)\vec{p} - \operatorname{sen}(\theta)\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\Big].$$

Portanto, temos a tabela abaixo resumindo o sentido das rotações:

Tabela 5: Sentido das rotações.

qpq^{-1}	Rotação no Sentido Anti-horário
$q^{-1}pq$	Rotação no Sentido Horário

Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração. Vamos demonstrar a fórmula que permite rotacionar um ponto ao redor do vetor quatérnions. A notação escolhida para realizar essa demonstração foi a forma binária com o efeito de reduzir os cálculos. Seja $p = \big(0, \vec{p}\big)$ um ponto qualquer representado por um quatérnio puro, $q = \big(a, b\hat{q}\big)$ um quatérnio normalizado e $q^{-1} = \big(a, -b\hat{q}\big)$ seu conjugado.

[a] "In 1878 the German mathematician, Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), proved that there are only three associative division algebras: real numbers $\mathbb{R}$, complex numbers $\mathbb{C}$, and quaternions $\mathbb{H}$". (VINCE, 2011, p.11, No idioma original).

$$
\begin{aligned}
qpq^{-1} &= \big(a, b\hat{q}\big)\big(0, \vec{p}\big)\big(a, -b\hat{q}\big) \\
&= \Big[\big(a, b\hat{q}\big)\big(0, \vec{p}\big)\Big]\big(a, -b\hat{q}\big) \\
&= \big(-b\hat{q}\cdot\vec{p}, a\vec{p} + b\hat{q}\times\vec{p}\big)\big(a, -b\hat{q}\big) \\
&= \big(-b\hat{q}\cdot\vec{p}\big)a - \Big(\big(a\vec{p} + b\hat{q}\times\vec{p}\big)\cdot\big(-b\hat{q}\big)\Big), \big(-b\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\big(-b\hat{q}\big) \\
&\quad + a\big(a\vec{p} + b\hat{q}\times\vec{p}\big) + \big(a\vec{p} + b\hat{q}\times\vec{p}\big)\times\big(-b\hat{q}\big) \\
&= \Big[- ba\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big) - \Big(\big(-b\hat{q}\big)\cdot\big(a\vec{p}\big) + \big(-b\hat{q}\big)\cdot\big(b\hat{q}\times\vec{p}\big)\Big), -b\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\big(-b\hat{q}\big) \\
&\quad + a\big(a\vec{p} + b\hat{q}\times\vec{p}\big) + \big(a\vec{p} + b\hat{q}\times\vec{p}\big)\times\big(-b\hat{q}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

Note que $\big(-b\hat{q}\big)\cdot\big(b\hat{q}\times\vec{p}\big) = -b^2\Big(\hat{q}\cdot\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\Big)$ e pela propriedade de produto escalar temos que $\hat{q}\cdot\big(\hat{q}\times\vec{p}\big) = 0$, pois são vetores ortogonais.

$$
\begin{aligned}
&= - ba\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big) - \Big(-ba\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\Big), b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + a\big(a\vec{p} + b\hat{q}\times\vec{p}\big) \\
&\quad + \Big(a\vec{p}\times\big(-b\hat{q}\big)\Big) + \Big(\big(b\hat{q}\times\vec{p}\big)\times\big(-b\hat{q}\big)\Big) \\
&= - ba\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big) + ba\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big), b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + a^2\vec{p} + ab\hat{q}\times\vec{p} \\
&\quad - ab\big(\vec{p}\times\hat{q}\big) - b^2\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\times\hat{q} \\
&= \Big[0, b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + a^2\vec{p} + ab\hat{q}\times\vec{p} - ab\vec{p}\times\hat{q} - b^2\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\times\hat{q}\Big]
\end{aligned}
$$

Para prosseguir na demonstração precisaremos da identidade do duplo produto vetorial:

$$\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\times\hat{q} = \big(\hat{q}\cdot\hat{q}\big)\vec{p} - \big(\vec{p}\cdot\hat{q}\big)\hat{q} = \vec{p} - \big(\vec{p}\cdot\hat{q}\big)\hat{q}.$$

Além de recordar das propriedade elementares dos determinantes utilizadas no produto vetorial como $\hat{q}\times\vec{p} = -\vec{p}\times\hat{q}$, bem como da comutatividade do produto escalar $\vec{p}\cdot\hat{q} = \hat{q}\cdot\vec{p}$.

$$
\begin{aligned}
&= \Big[0, b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + a^2\vec{p} + ab\hat{q}\times\vec{p} - \big(-ab\hat{q}\times\vec{p}\big) - b^2\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\times\hat{q}\Big] \\
&= \Big[0, b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + a^2\vec{p} + 2ab\hat{q}\times\vec{p} - b^2\Big(\vec{p} - \big(\vec{p}\cdot\hat{q}\big)\hat{q}\Big)\Big] \\
&= \Big[0, b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + a^2\vec{p} + 2ab\hat{q}\times\vec{p} - b^2\vec{p} + b^2\big(\vec{p}\cdot\hat{q}\big)\hat{q}\Big] \\
&= \Big[0, b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + \big(a^2 - b^2\big)\vec{p} + 2ab\hat{q}\times\vec{p} + b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q}\Big] \\
&= \Big[0, 2b^2\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + \big(a^2 - b^2\big)\vec{p} + 2ab\hat{q}\times\vec{p}\Big]
\end{aligned}
$$

Para finalizar a demonstração devemos tomar $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $b = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
&= \left[0, 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\hat{q}\cdot\vec{p})\hat{q} + \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\vec{p} + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{q}\times\vec{p}\right] \\
&= \left[0, \big(1 - \cos(\theta)\big)\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + \cos(\theta)\vec{p} + \operatorname{sen}(\theta)\hat{q}\times\vec{p}\right].
\end{aligned}$$

□

Observação 4.12. *Vale destacar que a escolha de* $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *e* $b = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *foi proposital, pois isso corrige o problema do ângulo duplo nas rotações. Caso fosse escolhido o ângulo* θ *na fórmula sem dividi-lo na metade, teríamos como resultado sempre o dobro das rotações desejadas.*

A demonstração de $q^{-1}pq$, ou seja a fórmula para rotação horária é feita de forma análoga. Deixaremos a cargo do leitor realizá-la.

Algo que pode nos intrigar é: será que o produto entre quatérnions altera a magnitude do vetor resultante? De fato, o produto altera a norma do vetor, mas se o vetor for unitário a sua norma será conservada.

Demonstração. Considere P um ponto, vamos girar esse ponto sobre um ângulo θ qualquer. Então:

$$\begin{aligned}
\|qpq^{-1}\| &= \|qp\|\|q^{-1}\| \\
&= \|q\|\|p\|\|q^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Perceba que $\|q\| = \|q^{-1}\|$. Além disso, sabemos que q é um quatérnio normalizado, ou seja, possui norma igual a 1, portanto:

$$\begin{aligned}
\|qpq^{-1}\| &= \|q\|\|p\|\|q^{-1}\| \\
&= \|p\|.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que de fato a magnitude do vetor é conservada. □

4.2.2 Aplicando rotações no espaço

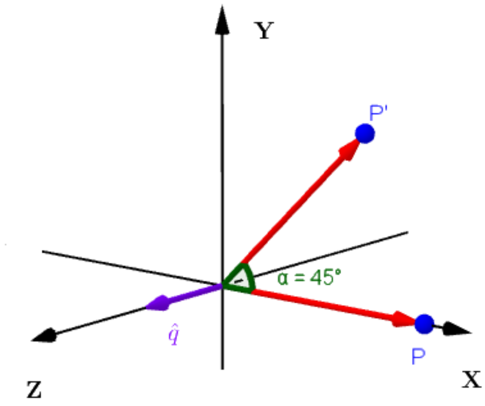
Você pode se perguntar, por que utilizar quatérnions para realizar rotações? Será que não existem outras formas mais simples? De fato, há outras formas de girar pontos ou objetos, um exemplo disso são os ângulos de Euler, pois através deles também podemos realizar rotações. Contudo, o seu uso pode se tornar ineficiente quando aplicamos rotações sucessivas no ângulo de Euler surge um problema chamado Gimbal Lock, se trata da perda de um grau de liberdade, também conhecido como bloqueio de cardano. O Gimbal é um dispositivo semelhante ao giroscópio, ele tem a função de informar aos pilotos qual a orientação de um avião referente ao solo. O problema do Gimbal Lock incomodou muitos animadores de softwares 3D, pois uma das formas de evitá-lo era não utilizando rotações. Deste modo, o uso de quatérnions se tornou uma solução para os animadores, visto que ao utilizarmos quatérnions é possível rotacionar um ponto sobre qualquer eixo arbitrário, sem que o problema do Gimbal Lock atrapalhe. Vale ressaltar que o uso de quatérnions tem se destacado frequentemente nas áreas da robótica, computação gráfica, aviação, engenharia, medicina etc.

Agora que já foi determinada a fórmula para girar pontos através de quatérnions podemos aplicá-la. Vale ressaltar que o espaço tridimensional será representado de uma forma diferente do comum quando comparado aos livros nacionais, pois os eixos x, y e z são trocados. No primeiro exemplo temos o ponto $P\big(2,0,0\big)$, vamos rotacionar o ponto P em $45°$ ao redor do quatérnio unitário $\hat{q} = \big(0,k\big)$ no sentido anti-horário. Vamos aplicar a fórmula:

$$\begin{aligned}
qpq^{-1} &= \Big[0, \big(1 - \cos(\theta)\big)\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + \cos(\theta)\vec{p} + \operatorname{sen}(\theta)\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\Big] \\
&= \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\big(2,0,0\big) + \frac{\sqrt{2}}{2}\big(0,2,0\big)\right] \\
&= \Big[0, \Big(\sqrt{2},0,0\Big) + \Big(0,\sqrt{2},0\Big)\Big] \\
&= \Big[0, \sqrt{2}i + \sqrt{2}j\Big].
\end{aligned}$$

Observação 4.13. *Perceba que $\hat{q}$ é um quatérnio puro e unitário, pois é uma condição necessária para a realização de rotações. Além do mais, o ponto P é transformado em um quatérnio puro sendo operado com quatérnio de norma unitária e seu conjugado, isso tudo é resumido em uma única fórmula.*

Figura 9: Rotação anti-horária de 45°.



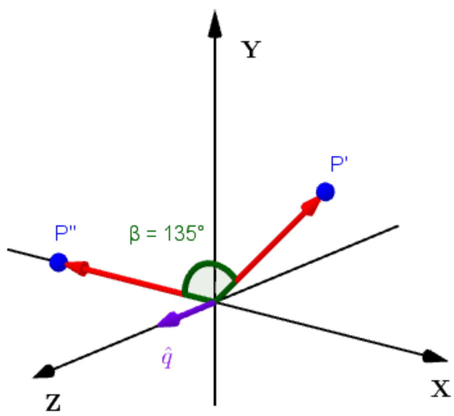
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao observar o gráfico temos o quatérnio unitário $\hat{q}$ que é representado pelo vetor roxo. Neste sentido, a partir do ponto P' vamos rotacioná-lo em 135° para que complete um ângulo de 180°. Primeiramente realizaremos os cálculos:

$$\begin{aligned} qp'q^{-1} &= \left[0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)\right] \\ &= \left[0, \left(-1, -1, 0\right) + \left(-1, 1, 0\right)\right] \\ &= \left[0, -2i\right]. \end{aligned}$$

Observe o gráfico abaixo:

Figura 10: Rotação anti-horária de 135°.

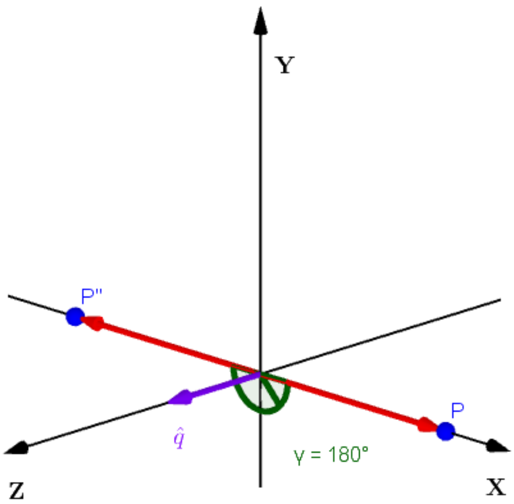


Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora vamos realizar o caminho no sentido oposto, ou seja, no sentido horário girando o ponto em 180° a partir do ponto P''. Ao efetuar os cálculos, temos:

$$\begin{aligned} q^{-1}pq &= \Big[0, \big(1 - \cos(\theta)\big)\big(\hat{q}\cdot\vec{p}\big)\hat{q} + \cos(\theta)\vec{p} - \operatorname{sen}(\theta)\big(\hat{q}\times\vec{p}\big)\Big] \\ &= \Big[0, (-1)\big(-2, 0, 0\big)\Big] \\ &= \big[0, 2i\big]. \end{aligned}$$

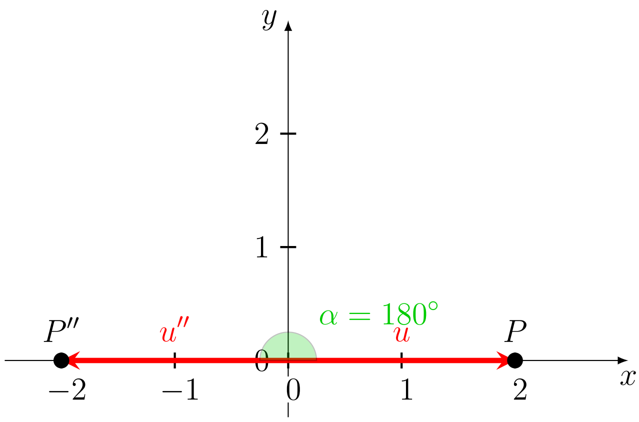
Figura 11: Rotação horária de 180°.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, retornamos ao ponto $P(2, 0, 0)$ através do giro realizado plano XY. Veja também a representação do gráfico em duas dimensões.

Figura 12: Representação no plano cartesiano.



Fonte: Elaborado pelo autor.

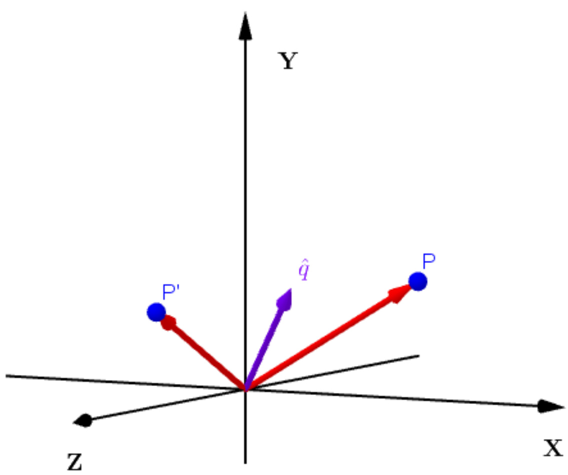
Realizamos os primeiros exemplos utilizando o quatérnio centrado na componente

Z, de modo ficasse claro o deslocamento do ponto ao redor do quatérnio. Agora podemos apresentar o caso de um quatérnio que não se encontra em X, Y ou Z. Então, seja $\hat{q} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$ e $P(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ um quatérnio unitário e um ponto respectivamente, a partir dos mesmos iremos girar esse ponto em 180° no sentido anti-horário.

$$\begin{aligned}
qpq^{-1} &= \left[0,\ 2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}k\right) \cdot \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)\vec{q} + (-1)\vec{p}\right] \\
&= \left[0,\ 2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-1, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right] \\
&= \left[0, \left(\frac{6+2\sqrt{3}}{9}, \frac{6+2\sqrt{3}}{9}, \frac{6+2\sqrt{3}}{9}\right) + \left(-1, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right] \\
&= \left[0, \left(\frac{6+2\sqrt{3}-9}{9}, \frac{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{9}, \frac{6+2\sqrt{3}}{9}\right)\right] \\
&= \left[0, \frac{2\sqrt{3}-3}{9}i + \frac{6-\sqrt{3}}{9}j + \frac{6+2\sqrt{3}}{9}\right].
\end{aligned}$$

Observe o gráfico abaixo e perceba que o ponto P deu meia volta ao redor de $\hat{q}$.

Figura 13: Rotação anti-horária de 180°.



Fonte: Elaborado pelo autor.

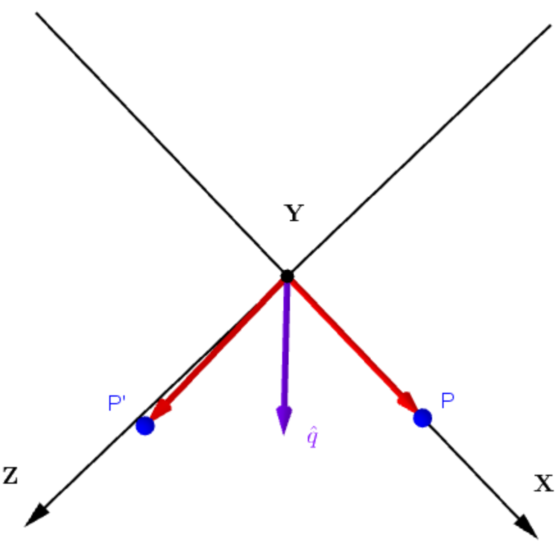
Partindo do ponto P' vamos voltar ao ponto P ao aplicar mais um giro de 180°. Ao efetuar os cálculos, temos:

$$qpq^{-1} = \left[0,\ 2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{9}, \frac{6-\sqrt{3}}{9}, \frac{6+2\sqrt{3}}{9}\right)\right)\hat{q} + (-1)\vec{p}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[0,\ 2\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{9\sqrt{3}} + \frac{6-\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} + \frac{6+2\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \vec{p}\right] \\
&= \left[0,\ 2\left(\frac{9+3\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{-2\sqrt{3}+3}{9}, \frac{-6+\sqrt{3}}{9}, \frac{-6-2\sqrt{3}}{9}\right)\right] \\
&= \left[0,\ 2\left(\frac{9+3\sqrt{3}}{27}, \frac{9+3\sqrt{3}}{27}, \frac{9+3\sqrt{3}}{27}\right) + \left(\frac{-2\sqrt{3}+3}{9}, \frac{-6+\sqrt{3}}{9}, \frac{-6-2\sqrt{3}}{9}\right)\right] \\
&= \left[0, \left(\frac{18+6\sqrt{3}}{27}, \frac{18+6\sqrt{3}}{27}, \frac{18+6\sqrt{3}}{27}\right) + \left(\frac{-6\sqrt{3}+9}{27}, \frac{-18+3\sqrt{3}}{27}, \frac{-18-6\sqrt{3}}{27}\right)\right] \\
&= \left[0, \left(\frac{18+6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+9}{27}, \frac{18+6\sqrt{3}-18+3\sqrt{3}}{27}, 0\right)\right] \\
&= \left[0, \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right] \\
&= \left[0, i + \frac{1}{\sqrt{3}}j\right].
\end{aligned}
$$

Após todos os cálculos podemos concluir que fato o ponto P realizou uma volta completa de $360°$, primeiramente fez meia volta chegando a P' e depois realizou mais $180°$. Veja a imagem abaixo que mostra o vetor quatérnio e deslocamento dos pontos sendo visto por cima.

Figura 14: Visualização da parte superior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 Proposta didática

A geometria e a trigonometria são disciplinas matemáticas fundamentais para o estudo da física e da engenharia, além de serem aplicadas em diversos outros campos. No entanto, muitos estudantes do ensino médio podem achar esses temas abstratos e difíceis de compreender. Nesse sentido, a utilização de ferramentas e conceitos mais avançados, como os quatérnions de rotação, pode ser uma maneira eficaz de engajar os alunos e tornar o aprendizado mais dinâmico e interessante. Os quatérnions de rotação são uma extensão dos números complexos e são amplamente utilizados em aplicações práticas, como a animação 3D, a robótica e a navegação espacial. Porém, apesar de sua relevância, muitas vezes esses conceitos são deixados de lado nos currículos escolares. Assim, essa proposta didática busca apresentar de forma clara e acessível o conceito de quatérnions de rotação e como utilizá-los, por meio de atividades interativas e exemplos práticos. O objetivo é despertar o interesse dos alunos por esses temas e prepará-los para enfrentar desafios cada vez mais complexos no futuro.

1. **Introdução:**

   Comece explicando a importância dos quatérnios na matemática, na física e na computação gráfica. Explique brevemente a história dos quatérnios e por que eles foram inventados.

   (a) Apresentação dos objetivos da aula.

   (b) Explicação sobre a história e a importância dos quatérnios na matemática, física e computação gráfica.

   (c) Desenvolvimento de uma atividade para identificar conceitos prévios dos alunos sobre números complexos e vetores.

2. **Conceitos básicos:**

   Explique o que são quatérnios e como eles são diferentes dos números complexos. Explique que um quatérnio é composto por quatro partes: uma parte escalar e três partes vetoriais.

    (a) Definição de quatérnions.
    (b) Explicação sobre a diferença entre os números complexos e quatérnions.
    (c) Representação dos quatérnios em termos de partes reais e imaginárias, mostrando como esses componentes são combinados.
    (d) Demonstração sobre a relação dos quatérnios com rotações em três dimensões.

3. **Representação gráfica:**

   Mostre aos alunos como os quatérnios podem ser representados graficamente usando uma esfera unitária. Explique como as rotações podem ser representadas por quatérnios.

    (a) Apresentação da esfera unitária como modelo para representação dos quatérnios.
    (b) Explicação sobre a interpretação geométrica dos quatérnios em termos de pontos da esfera.
    (c) Demonstração de como os quatérnios podem ser usados para representar rotações no espaço tridimensional.

4. **Cálculos básicos:**

   Ensine aos alunos como realizar operações básicas com quatérnios, como adição, subtração, multiplicação e inversão. Faça exemplos práticos e explique por que essas operações são importantes.

    (a) Adição e subtração de quatérnios.
    (b) Multiplicação de quatérnios.
    (c) Propriedades dos quatérnios, como comutatividade e associatividade.
    (d) Inverso de um quatérnio.
    (e) Aplicações de quatérnios na computação gráfica.

5. **Aplicações:**

   Explique algumas das aplicações dos quatérnios, como na rotação de objetos 3D em computação gráfica e na física quântica. Faça exemplos práticos e mostre como os quatérnios são usados em situações reais.

    (a) Desenvolvimento de uma atividade para demonstrar como quatérnios são usados em animações tridimensionais.

(b) Demonstração de como quatérnios são usados para representar movimentos em jogos.

(c) Explicação sobre como quatérnios são usados na física, em particular na mecânica quântica.

6. **Exercícios:**

   Proponha exercícios para os alunos resolverem, aplicando os conceitos e as operações que foram ensinados. Inclua exemplos de aplicações práticas para que os alunos possam ver como os quatérnios são usados na vida real.

   (a) Realização de exercícios para fixação dos conceitos aprendidos.

   (b) Desenvolvimento de problemas para solução em grupo ou individual.

   (c) Trabalhos com exemplos práticos de aplicações dos quatérnios em jogos e em animações tridimensionais.

7. **Avaliação:**

   Faça uma avaliação para testar o conhecimento dos alunos sobre os quatérnios. Inclua questões sobre conceitos básicos, cálculos e aplicações.

   (a) Desenvolvimento de testes para avaliação do desempenho dos alunos.

   (b) Realização de trabalhos individuais ou em grupo para aplicação dos conceitos aprendidos.

   (c) Aplicação de simuladores para representação de rotações em 3D.

8. **Conclusão:**

   Conclua a aula enfatizando a importância dos quatérnios na matemática, na física e na computação gráfica. Incentive os alunos a continuar aprendendo sobre o assunto e explorando as aplicações dos quatérnios em suas áreas de interesse .

   (a) Discussão sobre as aplicações dos quatérnios no mundo real.

   (b) Reflexão sobre como os quatérnios podem ser usados em diversas áreas, desde animações de jogos até robótica e física.

   (c) Estimular a curiosidade dos alunos a explorar mais sobre o assunto, recomendando fontes de leitura e pesquisa.

Esta proposta didática pode ser adaptada conforme as necessidades e o nível de conhecimento dos alunos. O objetivo é proporcionar uma introdução clara e acessível aos quatérnios e suas aplicações, incentivando os alunos a explorar esse fascinante campo da matemática e da física.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos brevemente o contexto histórico a partir dos números complexos, dando destaque às dificuldades enfrentadas pelos matemáticos que lutaram para que eles fossem aceitos na matemática, visto que foram necessários muitos anos de estudos e contribuições feitas por grandes matemáticos daquela época. Neste sentido, vimos que após o reconhecimento dos números complexos, a descoberta de que era possível realizar rotações no plano complexo motivou Hamilton a generalizar os números complexos no espaço, consequentemente, assim iniciou o estudo do conjunto chamado de quatérnions, assim encerrando a contextualização histórica. Além disso, construímos o conjunto dos quatérnions detalhando suas operações e propriedades, bem como mostramos como utilizá-las, sempre evidenciando a sua grande importância. Por fim, demonstramos a fórmula necessária para rotacionar um ponto ao redor de um eixo arbitrário através de quatérnions de rotação, tendo em vista que é uma aplicação muito poderosa e frequentemente utilizada na computação gráfica e em muitas outras áreas. Deste modo, também mostramos como utilizar os quatérnions através de exemplos acompanhados de gráficos para facilitar na sua compreensão. Com esse trabalho buscamos apresentar os quatérnions de forma simples e introdutória, pois é um assunto desconhecido por muitos estudantes da matemática, além de possuir poucos materiais nacionais disponíveis. Omitimos a utilização de matrizes no estudo de quatérnions, sendo ela uma possibilidade de estudo no futuro.

Referências

[1] BOULOS, Paulo; CAMARGO; Ivan. **Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial**. 3ª edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 2004.

[2] DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 5ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2018.

[3] GARBI, Gilberto Geraldo. **O Romance das Equações Algébricas**. 4ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

[4] GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico Pelo Maravilhoso Mundo da Matemática**. 5ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

[5] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar, 6: Complexos, Polinômios, Equações**. 8ª edição. São Paulo: Atual, 2013.

[6] MILIES, César Polcino. **A Emergência dos Números Complexos**. RPM 24. IME-USP, São Paulo.

[7] OLIVEIRA, Sales Almeida. **Evolução das Ideias sobre Números Imaginários**. João Pessoa, UFPB. 2015.

[8] SOARES, Gércia da Silva. **História dos Números Complexos**. São Paulo, IFSP. 2021.

[9] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2ª edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

[10] VINCE, John. **Quaternions for Computer Graphics**. London: Springer, 2011.

Apêndice

Neste apêndice destacamos brevemente apenas as principais propriedades e identidades da Geometria Analítica que foram utilizadas ao logo do texto, tendo em vista que elas são essenciais para compreensão deste trabalho.

Teorema 6.1. *Propriedades do produto escalar*

(P_1) Propriedade imediata

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0.$$

(P_2) Comutatividade

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

(P_3) Distributividade

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

(P_4) Multiplicação por escalar

$$(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}).$$

(P_5) Norma ao quadrado

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

Teorema 6.2. *Propriedades do produto vetorial*

(P_1) Nulidade

$$\vec{u} \times \vec{u} = 0.$$

(P_2) Anticomutatividade

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}.$$

(P_3) Distributividade

$$\begin{aligned} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w}). \\ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w}). \end{aligned}$$

(P_4) Multiplicação por escalar

$$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}).$$

Teorema 6.3 (Produto misto). *Seja u, v e w três vetores, ao realizar o produto misto* $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ *teremos com resultado um número real. Denotamos produto misto como* $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$. *Propriedades do produto misto:*

(P_1) Produto misto nulo:

$$\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = 0.$$

Se dois vetores são colineares, um vetor for nulo ou os três vetores são coplanares.

(P_2) Independe da ordem circular:

$$\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = \big(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\big) = \big(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\big).$$

Seu sinal é alterado, caso mude a posição de seus vetores consecutivos:

$$\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = -\big(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\big).$$

Propriedade cíclica:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

(P_3) $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}\big) = \big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) + \big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}\big).$

(P_4) $\big(\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}\big) = \big(\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}\big) = \big(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = \alpha\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big).$

Teorema 6.4 (Duplo produto vetorial). *Podemos decompor o duplo produto vetorial na diferença de dois vetores.*

(P_1) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$

(P_2) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$