



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Alagoas

**INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS  
CAMPUS MACEIÓ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**IGOR CARLOS ALVIM DE ALMEIDA**

**DANDO SENTIDO A EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU A PARTIR DO USO DO  
MATERIAL DOURADO**

**MACEIÓ, AL**

**2022**

IGOR CARLOS ALVIM DE ALMEIDA

**DANDO SENTIDO A EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU A PARTIR DO USO DO  
MATERIAL DOURADO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, campus Maceió, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Anderson Rangel  
Batista Siqueira

MACEIÓ, AL

2022



**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**  
**Instituto Federal de Alagoas**  
***Campus Maceió***  
***Biblioteca Benevides Monte***

---

A447d Almeida, Igor Carlos Alvim de.  
Dando sentido a equações do segundo grau a partir do uso do material  
dourado / Igor Carlos Alvim de Almeida. - 2022.  
37 f. : il.

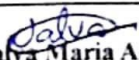
Orientação: Prof. Me Anderson Rangel Batista Siqueira.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -  
Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió, Maceió, 2022.

Arquivo no formato digital em PDF do trabalho acadêmico.

1. Equações do segundo grau. 2. Material dourado. 3. Material manipulável -  
Ensino-aprendizagem. I. Título.

*CDD: 510.07*

---

  
Natália Maria Amaral  
Bibliotecária - CRB-4/989

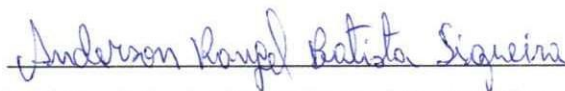
IGOR CARLOS ALVIM DE ALMEIDA

**DANDO SENTIDO A EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU A PARTIR DO USO  
DO MATERIAL DOURADO**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Licenciatura  
em Matemática do Instituto Federal de  
Alagoas, campus Maceió, como  
requisito parcial para a obtenção do grau  
de Licenciatura em Matemática.

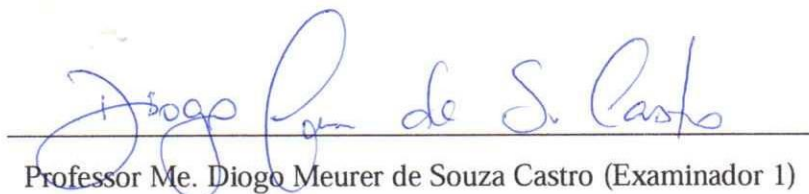
Aprovado em: 29 de julho de 2022.

**BANCA EXAMINADORA**



Professor Me. Anderson Rangel Batista Siqueira (Orientador)

Instituto Federal de Alagoas – IFAL



Professor Me. Diogo Meurer de Souza Castro (Examinador 1)

Instituto Federal de Alagoas – IFAL



Professor Dr. Givaldo Oliveira dos Santos (Examinador 2)

Instituto Federal de Alagoas – IFAL

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à minha família, minha mãe, meus irmãos e meu filho, que sempre me apoiaram nas dificuldades, igualmente nas alegrias. Também aos professores que passaram pela minha graduação, principalmente meu professor orientador, Anderson Rangel Batista Siqueira, e por fim, agradeço imensamente ao meu pai, Carlos Henrique Teobaldo de Almeida (In memoriam), que mesmo não estando aqui, sei o quanto ele lutou e me apoiou para que eu conseguisse finalizar esse curso.

## RESUMO

Nesse presente trabalho, aplicado na Escola Estadual Theonilo Gama, localizada no bairro do Jacintinho em Maceió-AL, onde participei do programa de Residência Pedagógica pelo Instituto Federal de Alagoas (IFAL), campus Maceió. Nas turmas “A” e “D” da 3ª série do Ensino Médio, vamos desmistificar a dificuldade que alguns alunos tinham ao se deparar com o assunto de equações do segundo grau, na qual da pandemia de covid-19 as aulas na escola foram muito afetadas e esses discentes estavam com bastante dificuldade na resolução tanto de equações do primeiro como do segundo grau. Para poder sanar as dúvidas acerca do assunto, utilizamos o material dourado para aplicação e resolução das equações do segundo grau, na qual foi demonstrada outra possibilidade de encontrar as raízes dos polinômios, associando a parte algébrica com a geométrica, através da manipulação desse objeto. Através do uso desse instrumento foi possível desenvolver as competências e habilidades necessárias para a compreensão das relações abordadas em sala de aula e encontrar as raízes de uma equação quadrática, bem como os lados de um retângulo formado pelas peças do material dourado. Daí, as reflexões sobre o desenvolvimento da estrutura algébrica na construção geométrica feita em sala, onde utilizando os materiais manipuláveis para o ensino aprendizagem auxilia a compreensão dos significados e resolução de situações-problemas.

Palavras-chave: material dourado, equações do segundo grau, material manipulável.

## ABSTRACT

In this present work, applied at Theonilo Gama State School, located in the Jacintinho neighborhood in Maceió-AL, where I participated in the Pedagogical Residency program by the Federal Institute of Alagoas (IFAL), Maceió campus. In classes “A” and “D” of the 3rd grade of high school, we are going to demystify the difficulty that some students had when faced with the subject of high school equations, in which the covid-19 pandemic classes at school were very affected and these students had great difficulty in solving both first and second degree equations. In order to resolve the doubts on the subject, we used the golden material to apply and solve the quadratic equations, in which another possibility of finding the roots of polynomials was demonstrated, associating the algebraic part with the geometric part, through the manipulation of this object. Through the use of this instrument, it was possible to develop the skills and abilities necessary to understand the relationships discussed in the classroom and to find roots of a quadratic equation, as well as the sides of a rectangle formed by the pieces of golden material. Hence, the reflections on the development of the algebraic structure in the geometric construction made in the classroom, where using manipulative materials for teaching and learning helps to understand the meanings and solve problem-situations.

Keywords: golden material, equations of the second degree, manipulating material.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. REFERENCIAL TEÓRICO	11
3. METODOLOGIA	14
4. O MATERIAL DOURADO E AS RAÍZES DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU	16
4.1 MATERIAIS CONCRETOS MANIPULÁVEIS	17
4.2 MATERIAL DOURADO	19
4.3 APLICAÇÃO DO MATERIAL DOURADO PARA O CÁLCULO DAS RAÍZES DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU	20
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	28
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
REFERÊNCIAS	31
ANEXOS	32

## 1. INTRODUÇÃO

A escola tem um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem de cada estudante, de uma forma geral a Matemática é considerada uma disciplina de difícil compreensão, por ter uma parte mais abstrata que o resto dos componentes curriculares, mas acredita-se que a metodologia utilizada pode ser uma alternativa para superar essa barreira.

Na necessidade de planejar e organizar as aulas para uma melhora no ensino-aprendizagem da matemática e conseqüentemente fugir das aulas tradicionais, esta que tem o professor apenas transferindo conhecimento ao aluno, nada melhor que a prática para demonstrar a teoria e aplicação de determinados conteúdos, na qual utilizando dos materiais manipuláveis, o aluno consiga entender o assunto relacionando o abstrato ao concreto, possivelmente desenvolver habilidades a fim de apreender o conteúdo por meio da ação manipulativa. De acordo com a BNCC:

“É importante fazer uma distinção entre jogo como conteúdo específico e jogo como ferramenta auxiliar de ensino. Não é raro que, no campo educacional, jogos e brincadeiras sejam inventados com o objetivo de provocar interações sociais específicas entre seus participantes ou para fixar determinados conhecimentos. O jogo, nesse sentido, é entendido como meio para se aprender [...]”.

Analisando a deficiência dos alunos na compreensão e resolução das equações do segundo grau, mais especificamente na parte dos zeros da função, ou seja, na utilização da fórmula de Bháskara, foi demonstrado um novo significado para esse problema. Ajudando-os a desenvolver as competências necessárias para a compreensão das relações entre o abstrato e o concreto, com um incentivo na resolução destas juntamente com o material dourado.

A utilização do material manipulável deve ser bem planejado pelo professor, pois é o que leva o aluno a criar uma conexão entre o conteúdo abstrato e o concreto, através do uso do material escolhido que para superar as dificuldades e deixar o estudo da matemática mais dinâmico é preciso utilizar algo que seja de fácil compreensão para que seja interessante para os alunos. Não basta apenas ter um bom material didático, mas sim que o professor também tenha o conhecimento e saiba utilizar de forma correta e coerente, passar aos discentes de modo que gere interesse, entendendo que,

Planejar, em sentido amplo, é um processo que “visa a dar respostas a um problema, estabelecendo fins e meios que apontem para sua superação, de modo a atingir objetivos antes previstos, pensando e prevendo necessariamente o futuro”, mas considerando as condições do presente, as

experiências do passado, os aspectos contextuais e os pressupostos filosófico, cultural, econômico e político de quem planeja e com quem se planeja.” (BAFFI, 2001, p.63).

Grande parte desses materiais manipuláveis nas aulas de matemática são basicamente jogos matemáticos que conseguem prender a atenção dos alunos e apresentar um grande potencial de ensino, pois “O jogo Matemático proporciona o raciocínio, a participação e o interesse dos alunos, a interação com os seus pares, além das decisões tomadas sobre suas jogadas e estratégias que poderão afetar ou ajudar o grupo” (GRANDO, 1995, p. 35).

Com o intuito de dar sentido as equações do segundo grau, relacionando-as com a definição da área de um retângulo, foi demonstrada através da construção geométrica de sua estrutura algébrica outra forma de conseguir encontrar suas raízes. Iniciando com a apresentação do material dourado e como se daria sua associação com cada elemento da equação, podendo assim fazer a construção geométrica da mesma, na qual será possível encontrar suas raízes sem a necessidade da utilização da fórmula de Bháskara.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

A materialização das concepções teóricas se caracterizou na análise do corpus, constituído a das ideias de Lorenzato (2012), quando trata de O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores; e, em Pais (2008), quando trata do processo de formação de conceitos.

É cada vez mais importante o uso de materiais manipuláveis na utilização em sala de aula, como ajuda ao professor na demonstração dos assuntos abordados, para que o aluno possa visualizar melhor os conteúdos dados e consiga assimilar a parte teórica, com a parte concreta utilizando-se do material manipulável, o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar para que possa ajudar na construção de seu próprio conhecimento.

A construção do conhecimento é um processo longo é que se baseia na experiência vivenciada dia a dia pelos alunos, na qual ele vai progredindo pouco a pouco em seu entendimento, o material manipulável concreto pode ser usado como um meio de auxiliar o ensino-aprendizagem, sendo capaz de melhorar competências e habilidades dos conceitos matemáticos. Sendo assim, a utilização de um material didático não pode passar de uma alternativa auxiliar e não é garantia de uma boa aprendizagem, dependendo apenas do professor como base e sabendo-se utilizar o material a sua disposição.

Muitos docentes utilizam desses objetos nas aulas de matemática para poder facilitar a aprendizagem dos assuntos correlacionados, pois assim as aulas se tornam mais interessantes para os alunos. O ensino de matemática estabelece diversas vezes, procedimentos e conceitos que podem dificultar o entendimento, causando prejuízo em relacionar os conteúdos com o cotidiano dos alunos.

No caso das equações do segundo grau, pode ficar evidente através do uso do material dourado, que permite o aluno associar as equações com a área encontrada na junção das peças do material dourado representadas pela equação dada.

Matos e Serrazina (apud PASSOS 2006, p. 79) ressaltam que existem fortes evidências, que permitem afirmar que ambientes onde se faz o uso de materiais manipuláveis favorecem a aprendizagem e desenvolvem nos alunos atitudes mais positivas.

Nesse contexto é uma grande oportunidade para o professor poder utilizar de qualquer material manipulável na ajuda ao conteúdo dado. Contudo, a escolha desse material tem que satisfazer os objetivos a serem alcançados, pois a utilização de um material que não

se adeque ao conteúdo trabalhado ou que o professor não esteja capacitado o suficiente para ajudar o aluno com o objeto escolhido vai acabar prejudicando a aprendizagem do aluno.

Segundo Passos (2006), pode ocorrer que o professor não selecione os materiais para as aulas de ensino de matemática, de uma forma eficaz. Ele pode utilizar algum material manipulável em que o aluno não faça relação dessa experiência com a disciplina. Assim:

Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre os objetos que poderão fazê-lo refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado e dão as suas ações, as formulações que enunciam, as verificações que realizam. (PASSOS, 2006, p. 81).

Vale ressaltar que os materiais didáticos manipuláveis, no processo de ensino e aprendizagem podem funcionar como instrumentos ou recursos através dos quais os conceitos e definições matemáticas são externados por meios concretos, diante do processo de dar sentido. Por isso, a busca por um material manipulável que se encaixe na aplicabilidade correta para a prática das ideias matemáticas. O material dourado, por exemplo, consegue viabilizar o trabalho de vários conceitos, desde o sistema decimal, frações decimais, podendo até ser usado na representação de expressões algébricas, por essa sua diversidade no ensino-aprendizagem permite que o aluno consiga criar conexões entre os conceitos matemáticos se utilizando da manipulação desse material. Reys:

[...] definiu alguns critérios para selecionar bons materiais manipuláveis, os quais poderão ser discutidos durante a formação de professor: os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas; os materiais devem representar claramente o conceito matemático; os materiais devem ser motivadores; os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos; os materiais devem proporcionar uma base para abstração; os materiais devem proporcionar manipulação individual. (MATOS & SERRAZINA apud PASSO, 2006, p.88).

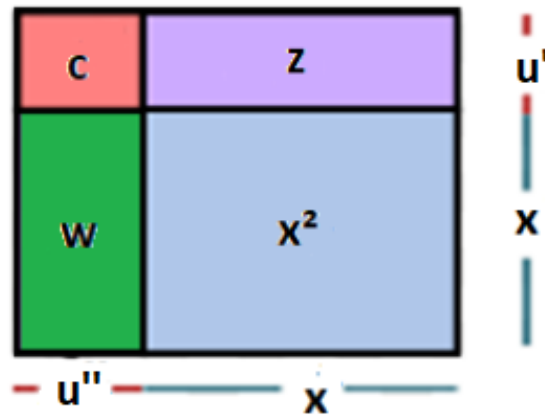
Direcionando ao estudo em evidência, o material dourado terá como função primordial dar sentido a álgebra pela geometria.

A álgebra é o ramo da matemática que generaliza a aritmética, ou seja, introduz o conceito de variáveis na representação de um número: equações, polinômios e operações envolvendo incógnitas fazem parte dos cálculos algébricos.

A geometria é o estudo das formas dos objetos presentes na natureza, e as propriedades relativas às formas ocupadas por esses, onde são constituídos por primitivos que são: pontos, retas e planos. Eles não possuem definição específica, mas caracterizam a identificação das formas geométricas conhecidas.

A álgebra formulada na Grécia pelos pitagóricos e por Euclides era geométrica, ou seja, eles utilizavam-se da geometria para a compreensão dos cálculos algébricos, como por exemplo, uma equação do segundo grau qualquer, onde representamos algebricamente por  $ax^2 + bx + c = 0$  levando para o lado geométrico podemos descrevê-la como a figura abaixo, onde  $z + w = b$ ,  $u'$  e  $u'' \in \mathbb{Z}$ .

Figura 1 – Ilustração da construção geométrica de uma equação do segundo grau.



Fonte: Autor, 2022.

Daí, podemos observar a importância dessa demonstração algébrica para a geometria, onde o aluno vai conseguir conciliar e absolver melhor o conteúdo abordado, conciliando a equação do segundo grau com as raízes e sua forma fatorada através da área de um retângulo. Lembrando que a utilização do material dourado, é indispensável na nossa demonstração da relação entre a álgebra e a geometria.

### 3. METODOLOGIA

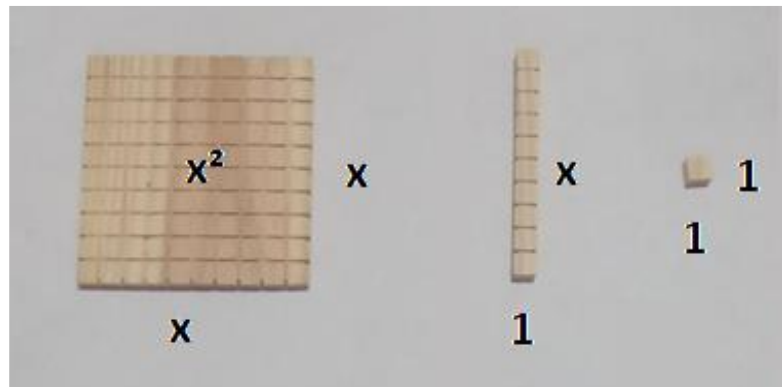
Pesquisa do tipo descritiva, na qual foi abordado o tema de equações do segundo grau, relacionando-a com a construção geométrica de uma área utilizando-se de um material didático, o material dourado, para que se encontrassem as raízes dessa equação sem a necessidade de se utilizar das fórmulas necessárias. Além de abordar algumas reflexões acerca do desenvolvimento da estrutura algébrica na construção geométrica. Assim, trazendo o estudo das equações do segundo grau de uma forma mais concreta para que com a ajuda do material manipulável o aluno possa ter um ensino-aprendizagem mais satisfatório na qual consiga construir seu próprio entendimento.

Aplicado na Escola Estadual Theonilo Gama, localizada no bairro do Jacintinho em Maceió-AL, nas turmas “A” e “D” da 3ª série do Ensino Médio, e por meio do programa de Residência Pedagógica pelo Instituto Federal de Alagoas (IFAL) tive a oportunidade de aplicar esse trabalho, com o intuito de aplicar novas metodologias utilizando-se de materiais manipuláveis, desenvolver o conhecimento dos alunos acerca das equações do segundo grau, que estavam com um déficit de aprendizagem por conta da dificuldade em acompanhar as aulas remotas, ocasionadas pela pandemia de Covid-19.

O procedimento metodológico abordado nas turmas do 3º ano “A” e “D” teve início com uma breve revisão das equações do segundo grau, dando as definições de zeros da função, o desenvolvimento da fórmula de Bháskara, e sua forma fatorada. A apresentação do material dourado, falando um pouco da sua história, seus componentes: cubinhos, barras, placas e cubo, bem como pode ser utilizado, e a explicação da representação de cada uma de suas peças (placa, barra e cubinhos) e como iremos utilizá-las nessa atividade.

O material dourado será utilizado de maneira que desprezaremos sua profundidade, ou seja, nos utilizaremos apenas área da sua face, e cada peça representa uma parte da equação, sendo a placa representada por  $ax^2$ , as barrinhas representarão  $bx$  e os cubinhos as unidades, o valor de  $c$ .

Figura 2 – Material Dourado e sua definição para a atividade



Fonte: Autor, 2022.

Logo após a apresentação do material dourado, deu-se a continuidade com a definição de área, mais especificamente entrando na área do quadrado e retângulo, lembrando sua estrutura geométrica, construção e o cálculo de sua área, sabendo que iríamos utilizá-las nas atividades seguintes.

#### **4. O MATERIAL DOURADO E AS RAÍZES DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU**

Atualmente, já existem diversos materiais para manipulação no ensino e aprendizagem da matemática. No ensino tradicional, aprendemos os algoritmos a partir de alguns modelos e repetições, mesmo assim, muitas vezes acaba que não compreendemos. Com o uso do material concreto nas aulas, podemos observar que o aluno tende a absorver com mais facilidade o conteúdo proposto, proporcionando para o sujeito uma aula mais dinâmica e que despertará a criatividade e o raciocínio.

A partir de estudos realizados, verificamos que o material dourado é um excelente recurso pedagógico para o ensino Matemático, na qual aluno passa a ter uma imagem concreta, facilitando absorção do conhecimento, desenvolvimento do raciocínio e um aprendizado bem mais agradável, tornando assim um instrumento motivador, contribuindo para o desenvolvimento e apreensão do conteúdo proposto.

O material dourado é um recurso versátil, que pode ser usado como um importante artifício para o ensino da matemática, que vai desde assuntos que envolvam o sistema de numeração decimal, relações entre números e quantidades, até problemas que envolvam conceitos geométricos. Pode ser destinado as atividades que auxiliam nos processos de ensino-aprendizagem contribuindo para o processo educacional de maneira construtiva e significativa, motivando os alunos para o estudo de matemática.

Através da utilização do material dourado para o ensino do cálculo de raízes das equações do segundo grau, possibilitamos aos estudantes conseguirem melhorar seu entendimento, assim construir de forma concreta um novo método ao qual é demonstrado o significado algébrico de uma equação quadrática, com a ajuda desse instrumento. Diante disso, sua resolução através da construção de uma área, associando o tamanho do lado do retângulo construído com sua forma fatorada, encontrando assim suas raízes.

Portanto, é observado como os docentes conseguem aprimorar métodos de aprendizagem através da utilização desse material manipulável, associando às equações com as peças do mesmo, buscando assim uma melhor compreensão geométrica para que o aluno entenda didaticamente o proposto.

## 4.1 MATERIAIS CONCRETOS MANIPULÁVEIS

Para o marco inicial da utilização dos materiais manipuláveis na ajuda do ensino, Lorenzato (2006) indica Comenius (1592-1670) como pioneiro a utilizar e defender a manipulação de objetos pedagógicos. No decorrer dos tempos outros também passaram a utilizar desse recurso didático. Assim encontramos Locke (1632-1704), Rousseau (1712-1778), Pestalozzi (1746-1827), Froebel (1782-1852), Claparède (1873-1940) e Montessori (1870-1952).

No Brasil, a crença na utilização do recurso dos materiais concretos surge com o movimento Escolanovista, que se iniciou em meados dos anos 1920, quando surge a discussão sobre a situação da educação no Brasil.

Podemos observar que na educação infantil, as crianças são ensinadas de uma forma lúdica, ou seja, manipulando objetos e fazendo associações. Porém, com o decorrer do tempo, os professores se distanciam dessas práticas docentes, gerando uma aprendizagem sem significados, apenas decorativa. Por isso, o ensino matemático atualmente está exigindo uma maior eficácia por parte dos professores para com os alunos, adotando novas estratégias para uma melhor mediação no processo de aquisição de conhecimento.

Uma das metodologias mais utilizadas é o uso dos materiais didáticos manipuláveis no ensino e aprendizagem matemática, constituindo um importante recurso para a visualização e compreensão do assunto abordado. Estes materiais permitem a associação entre teoria e prática, tornando a aula mais dinâmica e compreensível. Muitos professores utilizam desses materiais nas aulas para auxiliar na aprendizagem do conteúdo, pois o ensino de matemática estabelece diversas vezes procedimentos e conceito que podem dificultar o entendimento dos alunos, por se tratar de modelos abstratos, pois estes têm dificuldades de serem relacionados com o cotidiano.

Materiais manipuláveis podem ser definidos como “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar” (REYS, apud PASSOS 2012, p.78) podem ser objetos reais que tem a aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia.

Serrazina (apud PASSOS 2006, p.78) analisa a utilização de materiais didáticos no ensino da matemática e observa que deve haver um cuidado especial, quando se pretende fazer o uso desses recursos, e que, nesse aspecto o professor tem um papel fundamental. Nessa direção, Passos afirma:

Os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino aprendizagem. Entretanto, considera que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído (PASSOS, 2012 p.78).

A forma como o conteúdo é conduzido pelo docente e a utilização do material concreto manipulável que deverá agir como um mediador entre a teoria e a realidade desenvolvida pelo uso do material deverá ser um catalizador na construção do conhecimento do aluno. Ao citar o uso do material concreto, Cardoso (2002, p. 19) enfatiza que “o primeiro contato do aluno com o material deve ser de forma lúdica para que ele possa explorá-lo livremente. É nesse momento que a criança percebe a forma, a constituição e os tipos de peças do material”.

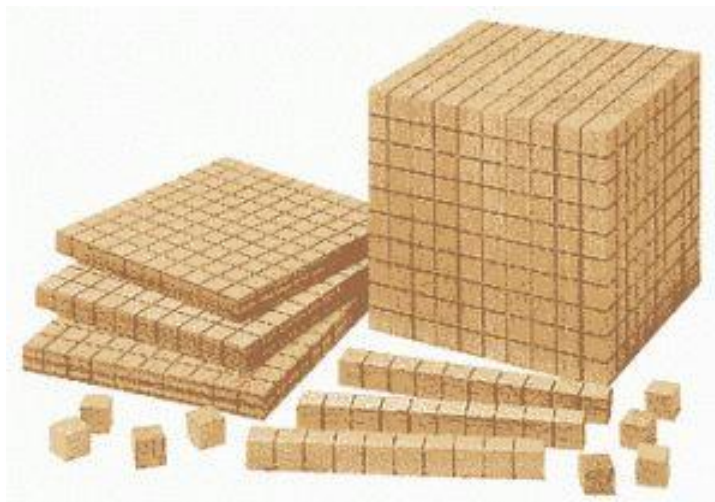
## 4.2 MATERIAL DOURADO

Inicialmente conhecido como “Material das Contas Douradas” o material dourado foi criado por Maria Montessori (1870-1952), que foi a primeira mulher na Itália a se formar em medicina. Ela foi encarregada de educar crianças com deficiências, onde verificou que elas conseguiam aprender mais pela ação do que pelo pensamento. Então desenvolveu um material para auxiliar o ensino e aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional e dos métodos para efetuar as operações fundamentais, daí surgiu o material dourado.

Suas experiências foram bem-sucedidas e verificou-se que as crianças que utilizaram o material dourado tiveram mais facilidade na compreensão do no entendimento das relações numéricas abstratas, além de desenvolver sua confiança, coordenação e independência. Assim o aprendizado se torna mais agradável e além de uma melhor compreensão obtém-se um notável desenvolvimento do raciocínio.

Sua composição é representada por cubinhos de madeira de um  $\text{cm}^3$  que representa as unidades, sua dezena é formada por uma barra de dez cubinhos unidos. Esta barra é repetida dez vezes formando um quadrado, somando um total de cem, também chamado de placa. Dez dessas placas sobrepostas formam um cubo, ou cubão, que equivale a uma milhar.

Figura 3 – Imagem do Material Dourado



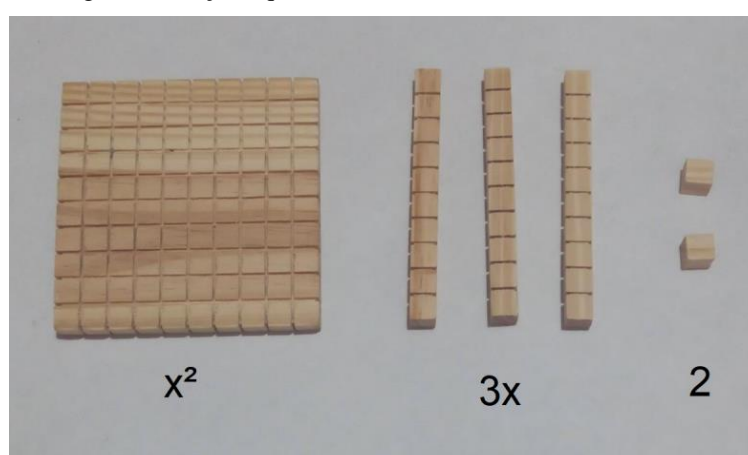
Fonte: Autor, 2022.

### 4.3 APLICAÇÃO DO MATERIAL DOURADO PARA O CÁLCULO DAS RAÍZES DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

A atividade consiste em construir um retângulo com as peças do material dourado representadas pelos elementos da equação do segundo grau, na qual após formar a estrutura geométrica do retângulo e olharmos para o valor de seus lados conseguimos encontrar os valores de suas raízes. Relembrando a forma fatorada de uma equação do segundo grau que é escrita como:  $a(x - x')(x - x'') = 0$  e cada lado do retângulo montado, nós encontraremos  $x + u$ ,  $u \in \mathbb{Z}$ , então basta igualarmos cada lado do retângulo com uma das partes da forma fatorada, um lado para  $x'$  e outro para  $x''$ . Numa forma mais prática para passarmos esse entendimento aos alunos sem precisarem fazer as contas basta pegar o tamanho dos lados do retângulo e igualá-los a zero. Por exemplo, se um dos lados do retângulo for igual a  $x + 2$ , igualarmos  $x + 2 = 0$ , calculando temos que  $x = -2$ , ou seja, uma das raízes da equação do segundo grau será  $-2$ .

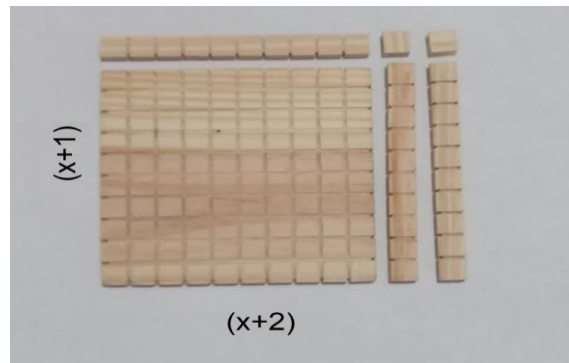
Para primeira atividade, solicitamos que os alunos se dividissem em duplas e tentassem representar os polinômios  $x^2 + 3x + 2$  e  $x^2 + 5x + 6$  com o material dourado, frisando que eles tentassem formar um retângulo. Fui ao quadro para a explicação de como deveria ser montada a figura geométrica com as peças do material dourado e demonstrando que o retângulo encontrado equivale a forma reduzida do polinômio, ou seja, calculamos as raízes da equação sem a necessidade da utilização da fórmula de Bháskara e se calcularmos a área dessa figura daria exatamente a equação de segundo grau apresentada.

Figura 4 – Peças Equivalentes a:  $x^2 + 3x + 2$



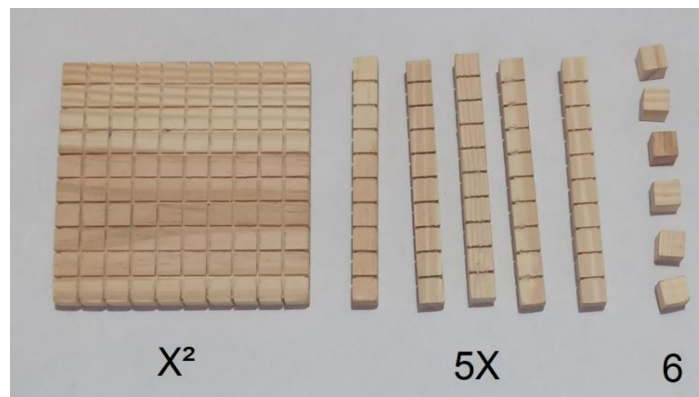
Fonte: Autor, 2022.

Figura 5 – Área do retângulo equivalente a:  $x^2 + 3x + 2$



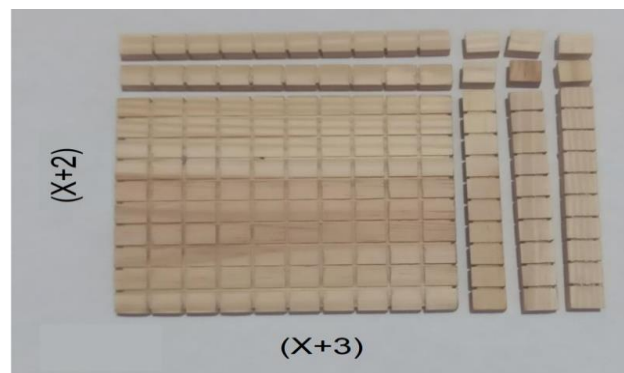
Fonte: Autor, 2022.

Figura 6 – Peças equivalentes a:  $x^2 + 5x + 6$



Fonte: Autor, 2022.

Figura 7 – Área do retângulo equivalente a:  $x^2 + 5x + 6$



Fonte: Autor, 2022.

Como o valor dos lados é encontrado facilmente nessa construção geométrica e apenas igualando-os a zero, conseguimos encontrar suas raízes, sendo  $-1$  e  $-2$  para a primeira e  $-2$  e  $-3$  para a segunda. Por fim, foram calculadas as raízes das equações do

segundo grau através da fórmula de Bháskara para provar que davam os mesmos valores dos lados dos retângulos.

Para  $x^2 + 3x + 2$ , temos:

$$\Delta = (3)^2 - 4.1.2$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x' = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x'' = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Para  $x^2 + 5x + 6$ , temos:

$$\Delta = (5)^2 - 4.1.6$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

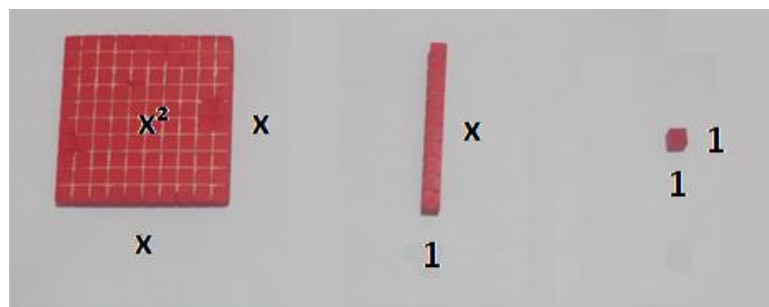
$$x' = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x'' = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Dessa forma, chegamos aos resultados propostos onde provamos que podemos achar as raízes de uma equação do segundo grau através da manipulação do material dourado na construção de uma área geométrica.

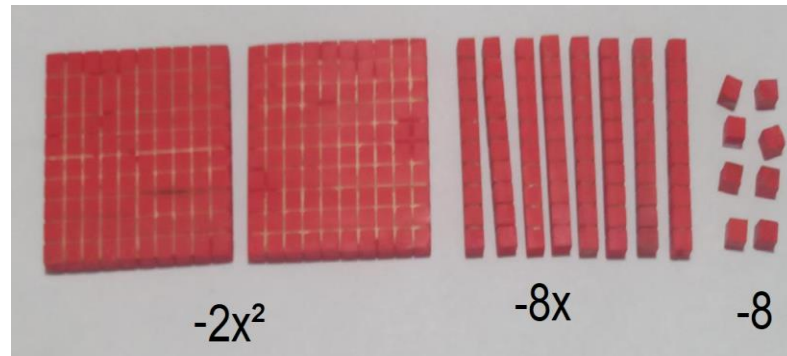
Para a segunda parte da atividade foi explanado sobre os números negativos, onde para poder usá-los precisaríamos diferenciar as peças já utilizadas, que representavam os números positivos, então foi introduzido novas peças do material dourado na cor vermelha para representar os números negativos.

Figura 8 – Material Dourado em sua forma negativa.



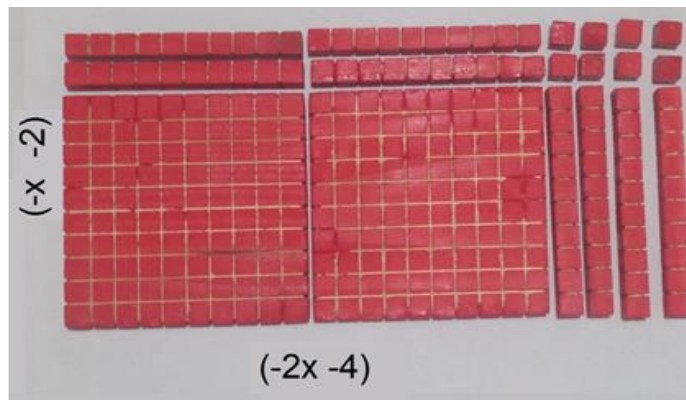
Foi solicitado que os alunos montassem os polinômios  $-2x^2 - 8x + 8$  e  $-x^2 - 4x - 3$  utilizando do mesmo procedimento da primeira parte. Após algum tempo onde todos conseguiram montar seus retângulos, conseqüentemente encontrar as raízes da equação do segundo grau sem a necessidade da aplicação da fórmula Bháskara.

Figura 9 – Peças equivalentes a:  $-2x^2 - 8x - 8$ .



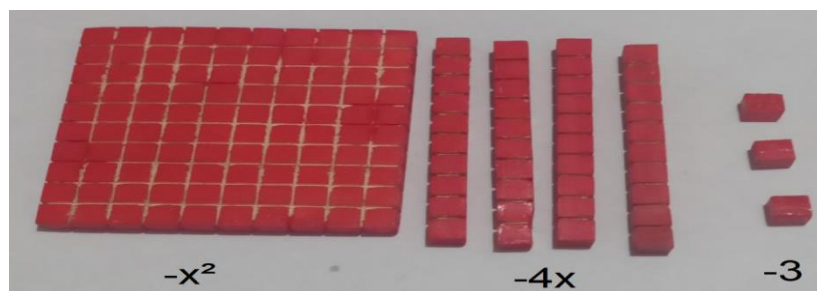
Fonte: Autor, 2022.

Figura 10 – Área do retângulo equivalente a:  $-2x^2 - 8x - 8$ .



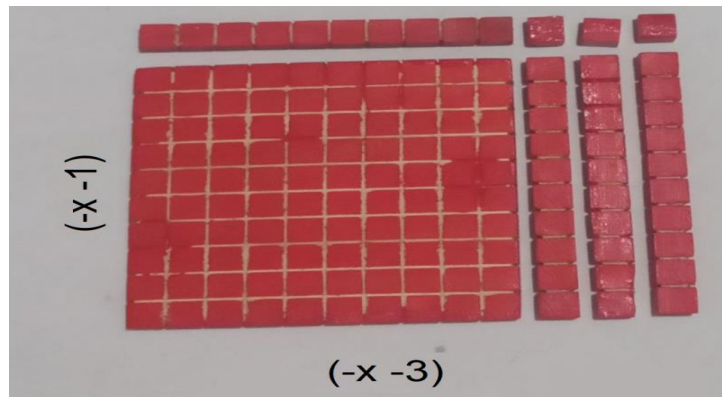
Fonte: Autor, 2022.

Figura 11 – Peças equivalentes a:  $-x^2 - 4x - 3$ .



Fonte: Autor, 2022.

Figura 12 – Área do retângulo equivalente a:  $-x^2 - 4x - 3$ .



Fonte: Autor, 2022.

Observando o valor dos lados encontrado dos dois retângulos construídos e igualando-os a zero, encontramos as raízes das duas equações do segundo grau,  $-2$  e  $-2$  para a primeira e  $-1$  e  $-3$  para a segunda. Após, foram calculadas as raízes das equações através da fórmula de Bháskara para provar que davam os mesmos valores encontrados.

Para  $-2x^2 - 8x - 8$ , temos:

$$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot -2 \cdot -8$$

$$\Delta = 64 - 64 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2}$$

$$x' = \frac{-8 + 0}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$x'' = \frac{-8 - 0}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Para  $-x^2 - 4x - 3$ , temos:

$$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -3$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)}$$

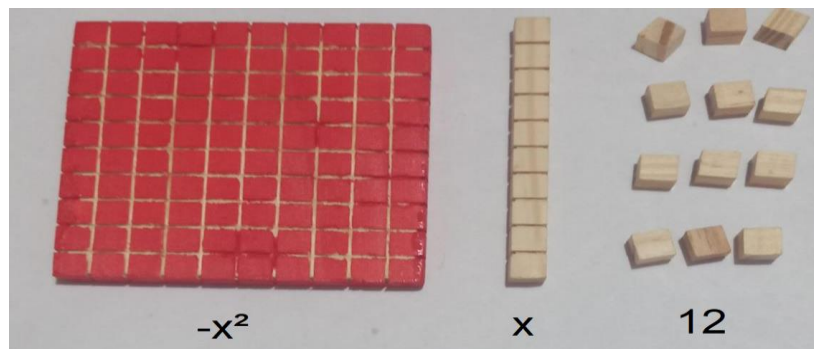
$$x' = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x'' = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Para última parte da atividade envolvendo o material dourado com as equações quadráticas, apresentamos os polinômios  $-x^2 + x + 12$  e  $-2x^2 + 8x + 10$ . Como as peças representadas por cada um dos polinômios não davam para se montar um retângulo, então os

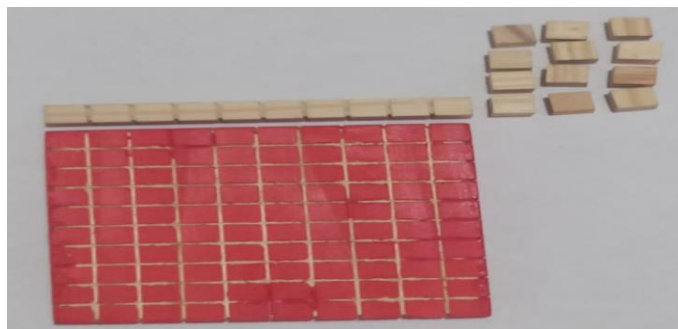
alunos ficaram confusos e cheios de dúvidas a princípio, alguns até tentaram montar de uma forma diferente, mas não conseguiram completar a figura geométrica, então foi demonstrado que com as peças disponíveis era impossível construir uma figura geométrica como um quadrado ou retângulo e que precisávamos completar as peças de modo que não alterasse as equações. A partir daí os alunos começaram a entender a ideia de construir a figura geométrica, que deveríamos completar com as barrinhas que faltavam e que para cada positiva (branca) que fossem utilizada também tinha que adicionar uma negativa (vermelha) para que a equação não alterasse.

Figura 13 – Peças equivalentes a:  $-x^2 + x + 12$ .



Fonte: Autor, 2022.

Figura 14 – Tentativa de montagem de:  $-x^2 + x + 12$ .



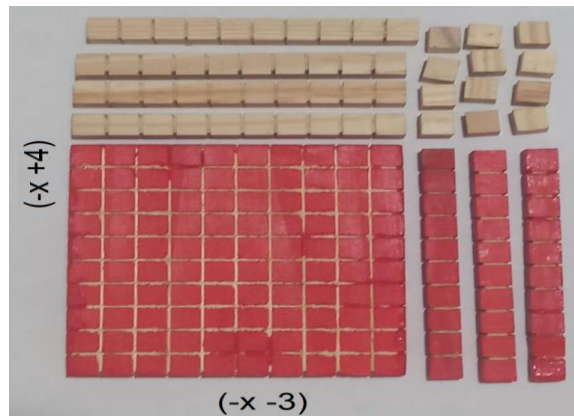
Fonte: Autor, 2022.

Figura 15 – Adicionando  $-3x$  e  $+3x$  para completar a equação.



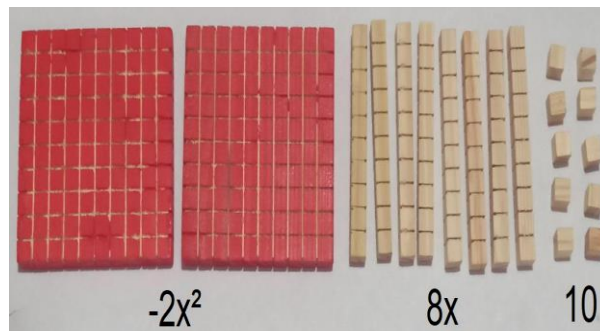
Fonte: Autor, 2022.

Figura 16 – Área do retângulo equivalente a:  $-x^2 + x + 12$ .



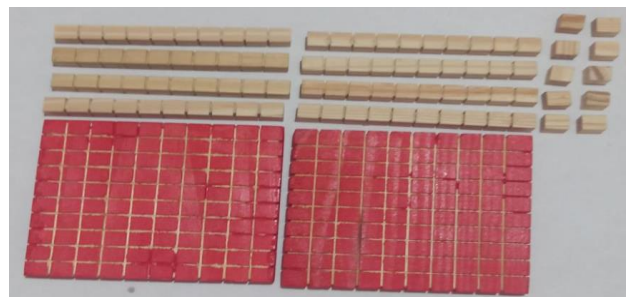
Fonte: Autor, 2022.

Figura 17 – Peças equivalentes a:  $-2x^2 + 8x + 10$ .



Fonte: Autor, 2022.

Figura 18 – Tentativa de montagem de:  $-2x^2 + 8x + 10$ .



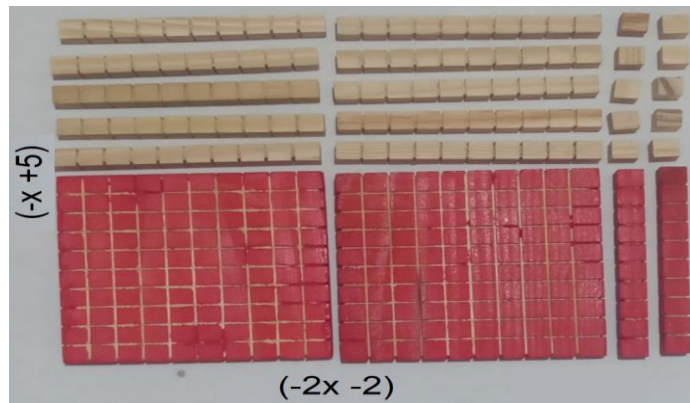
Fonte: Autor, 2022.

Figura 19 – Adicionando  $+2x$  e  $-2x$  para completar a equação.



Fonte: Autor, 2022.

Figura 20 – Área do retângulo equivalente a:  $-2x^2 + 8x + 10$ .



Fonte: Autor, 2022.

Logo após, calculamos as raízes das equações através da fórmula de Bháskara para provar que davam os mesmos valores dos lados dos retângulos.

Para  $-x^2 + x + 12$ , temos:

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x' = \frac{-1 + 7}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$x'' = \frac{-1 - 7}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Para  $-2x^2 + 8x + 10$ , temos:

$$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-10)$$

$$\Delta = 64 + 80 = 144$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x' = \frac{-8 + 12}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$x'' = \frac{-8 - 12}{-4} = \frac{-20}{-4} = 5$$

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante a minha participação no projeto de residência pedagógica na Escola Estadual Theonilo Gama, na qual por causa da pandemia de Covid-19, muitos alunos não conseguiram ter o acesso necessário as aulas e ficaram com um grande déficit de aprendizagem, resolvi aplicar esse trabalho, abordado nas turmas “A” e “D” do 3º ano do ensino médio.

Iniciando com uma breve explicação da minha presença e o que faríamos juntos, isso fez com que despertassem o interesse e conseqüentemente a atenção de muitos alunos. Perguntei como estavam em relação às equações do segundo grau e muitos discentes responderam que apresentavam um pouco de dificuldade com o conteúdo, visto que estava sendo ministrado pelo professor a menos de uma semana. Embora, diante de algumas respostas positivas e outras negativas, foi dado início a uma breve revisão de equações quadráticas, com as definições de zeros da função e o desenvolvimento da fórmula de Bháskara, sequencialmente a apresentação do material dourado.

Durante a apresentação do material dourado foi notado um grande interesse por parte dos estudantes, pois poucos o conhecia. Diante dessa realidade é possível perceber o quanto é importante que o professor sempre busque inovar e surpreender os alunos com novas formas de ensino, com a finalidade de despertar o interesse e fugir um pouco das aulas tradicionais, para que possibilite aos discentes uma participação ativa no processo de ensino-aprendizagem.

Inicialmente alguns alunos tiveram um pouco de dificuldade na compreensão com a associação das peças do material dourado sendo os lados representados por  $x$ , pois eles iam pela lógica e começavam a contar as marcações presentes no material dourado. Mas, após um reforço de como iríamos utilizar o material e aplicando o primeiro exemplo, eles conseguiram mudar o seu entendimento, demonstrando a importância do auxílio do professor para com os alunos no desenvolvimento e nas descobertas para que alcancem os objetivos desejados.

Começando as primeiras atividades com as equações do segundo grau apenas utilizando números positivos, dados os polinômios:  $x^2 + 3x + 2 = 0$  e  $x^2 + 5x + 6 = 0$  onde as duplas teriam que formar retângulos juntamente com as peças do material dourado equivalente aos polinômios apresentados, para assim analisar o valor dos lados encontrados e a partir dos resultados obtidos encontrar as suas raízes.

Num primeiro momento os alunos não entenderam como as peças do material dourado iriam se encaixar, após auxiliá-los, algumas duplas compreenderam os métodos de

desenvolvimento e construção da área geométrica, conseguindo associar os valores com o material manipulável, construindo assim os primeiros retângulos. Após ajudar na construção de seu próprio raciocínio, chegaram há um resultado satisfatório, na qual a maior parte dos alunos aprenderam uma forma diferente de encontrar as raízes de uma equação do segundo grau.

Logo após foi apresentado o material dourado com uma cor diferente da primeira parte da atividade, cor vermelha, na qual me questionaram qual seria a diferença com o primeiro caso. Dando início as equações do segundo grau com todos os coeficientes negativos, mostrei as seguintes equações quadráticas:  $-2x^2 - 8x - 8 = 0$  e  $-x^2 - 4x - 3 = 0$ , foi explicado que as peças com a cor avermelhada seria sua representação cujo coeficientes são negativos. Como já tinham conseguido entender o desenvolvimento da atividade a partir dos primeiros exemplos, não houve dificuldade em resolver os exemplos a qual os coeficientes são negativos, alguns alunos ainda pediram exercícios mais complexos, pois já tinham conseguido compreender.

Para o término da atividade, apresentei duas equações do segundo grau  $-x^2 + x + 12 = 0$  e  $-2x^2 + 8x + 10 = 0$ , num primeiro momento alguns alunos tentaram construir a área geométrica que poderia representar essas equações, mas não conseguiram chegar a uma conclusão. A partir daí, sugeri que eles completassem as peças sem alterar seu valor numérico, contudo alguns alunos indagaram como seria feito, contudo ninguém conseguiu chegar a uma solução para o problema proposto, sendo assim, mostrei alguns exemplos do cotidiano para que eles pudessem associar com mais clareza, foi então que uma dupla chegou a resposta desejada, na qual se daria pela adição de uma peça positiva e uma negativa para que não ocorra a mudança do valor numérico da equação.

Por fim, foi perguntado o que acharam da atividade envolvendo o material dourado (geometria) e as equações do segundo grau (álgebra), na descoberta de suas raízes sem a aplicação da fórmula de Bháskara, apenas utilizando da construção de uma forma geométrica (retângulo). Conclui-se que os alunos acataram positivamente o trabalho desenvolvido e que para eles essa nova visão das equações do segundo grau ajudou-os bastante no seu entendimento que acarretou em um novo significado para as raízes desses polinômios. Alguns discentes até conseguiram associar a área e outros até brincaram perguntando se poderiam utilizar o material dourado na prova, pois tinham conseguido compreender melhor que usando a fórmula de Bháskara.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aprendizagem matemática no período da pandemia foi prejudicada por diversos fatores, entre eles, a falta de recursos tecnológicos disponíveis para que os alunos tivessem acesso as aulas, a fim de minimizar esse prejuízo, busquei através desse trabalho uma maneira prática dos alunos encontrarem as raízes de equações do segundo grau sem precisar utilizar a fórmula de Bháskara.

Diante disso, os discentes conseguiram desenvolver competências e habilidades de maneira lúdica para resolver alguns problemas envolvendo equações quadráticas. Os exercícios realizados em sala de aula proporcionaram raciocínio lógico e a compreensão de certos fenômenos que usam tais equações.

Após a conclusão do trabalho, fica notória a importância da utilização de um recurso diferente das aulas tradicionais na disciplina de Matemática, o que foi possível observar com o uso do material dourado, este manipulado pelos alunos com o auxílio do professor no estudo do cálculo das raízes de equações do segundo grau. O uso do referido material teve como objetivo principal investigar os benefícios para o processo de ensino-aprendizagem quando os discentes constroem os seus conhecimentos manipulando de forma lúdica os materiais para aprenderem como resolver as equações do segundo grau.

A preocupação inicial ao utilizar esse recurso didático, foi de como auxiliar os alunos, referindo-me a contribuição para que eles possam atingir os objetivos determinados e que chegassem a uma aprendizagem significativa.

Para finalizar, foi possível comprovar que para conseguir atingir os objetivos esperados ao aplicarmos essa atividade que foge do cotidiano das aulas de matemática, primeiro é necessário acreditar no potencial que o material aplicado de forma correta auxilia na construção do conhecimento, tendo a certeza que essa metodologia possa despertar o interesse do aluno e envolvê-lo na atividade com segurança e sem a preocupação de errar, assim conseguindo contribuir para um resultado satisfatório no ensino-aprendizagem matemática do assunto abordado.

## REFERÊNCIAS

- BAFFI, Maria Adélia Teixeira. **O planejamento em educação: revisando conceitos para mudar concepções e práticas**: Petrópolis, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: Terceiro e quarto ciclos do ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP. Autores Associados, 2006.
- MATOS, J. M., SERRAZINA, M. de L. **Didática da matemática**. Lisboa, Universidade Aberta, 1996.
- MENDES, Luiz Otavio Rodrigues e TROBIA, Isabelle Alves. **Jogos uma metodologia para o ensino e aprendizagem de matemática no Ensino Fundamental**. UEPG. 2015.
- PAIS, Luiz Carlos, **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Coleção tendências em Educação Matemática.
- PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. 348f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2000.
- PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- SOUZA, Joamir, Garcia, Jacqueline. **#Contato Matemático**. Manual do Professor. FTD, 1ª edição, 2016.

**ANEXOS**

Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.



Fonte: Autor, 2022.

## AUTORIZAÇÃO DE IMAGENS

Autorizo minhas imagens feitas em sala de aula da Escola Estadual Theonilo Gama da turma do 3º A para fins de apresentação do TCC de Igor Carlos Alvim de Almeida junto ao Instituto Federal de Alagoas (IFAL). Segue abaixo assinatura dos alunos da referida turma.

Arthur Augusto da Silva Nêllo  
 Evandro Matheus Oliveira de Souza  
 Felipe ~~de~~ ~~Silva~~ ~~Alves~~  
 Fernanda da Silva Resena  
 Felipe ~~de~~ ~~Silva~~  
 Edilson ~~de~~ ~~Silva~~  
 Marjorie ~~de~~ ~~Silva~~  
 Kauê ~~de~~ ~~Silva~~ ~~Medeiros~~ ~~Ramos~~  
 Leonardo ~~de~~ ~~Silva~~ ~~dos~~ ~~Santos~~  
 Vinícius ~~de~~ ~~Silva~~ ~~de~~ ~~Silva~~  
 Alana ~~de~~ ~~Silva~~ ~~Marcelino~~ ~~de~~ ~~O.~~ ~~Silva~~  
 Vanessa ~~de~~ ~~Silva~~  
 Maxiane ~~de~~ ~~Silva~~  
 Laura ~~de~~ ~~Silva~~  
 Thales ~~de~~ ~~Silva~~ ~~Costa~~  
 Jamille ~~de~~ ~~Silva~~  
 Jacqueline ~~de~~ ~~Silva~~ ~~Santos~~ ~~Resena~~  
 Ana Clara ~~de~~ ~~Silva~~  
 Vitória ~~de~~ ~~Silva~~

Autorização de Imagens dos Estudantes

## AUTORIZAÇÃO DE IMAGENS

Autorizo minhas imagens feitas em sala de aula da Escola Estadual Theonilo Gama da turma do 3º D, para fins de apresentação do TCC de Igor Carlos Alvim de Almeida junto ao Instituto Federal de Alagoas (IFAL). Segue abaixo assinatura dos alunos da referida turma.

Kethelly Nayara Gonçalves da Silva

Francilly Frazzini Santos da Silva

Laysa Emanuelly de Silva Santos

Gabriela Maria da Silva

Lucas Francisco Alves dos Santos

Mateus Francisco Alves dos Santos

Emily Vitória Araújo da Silva

Luís Henrique da Silva Santos

Luís Vasconcelos

Allyson Silva dos Santos

Luís Victor Matos dos Santos

Samuel Santos Araújo

Autorização de Imagens dos Estudantes