



**INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS ARAPIRACA
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

KÁSSIA SANDREANE SOARES DE VASCONCELOS HOLANDA

TEOREMA DE PTOLOMEU E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO

**ARAPIRACA, AL
2022**

KÁSSIA SANDREANE SOARES DE VASCONCELOS HOLANDA

TEOREMA DE PTOLOMEU E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO

Artigo científico apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Alagoas, campus Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. M. José Roberto de Almeida Lima

ARAPIRACA, AL
2022

KÁSSIA SANDREANE SOARES DE VASCONCELOS HOLANDA

TEOREMA DE PTOLOMEU E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO

Artigo científico apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Alagoas, campus Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Ciências e Matemática.

Aprovado (a) em: 30/03/2022.

AVALIADOR (A)

José Roberto de Almeida Lima

Prof. M. José Roberto de Almeida Lima
Instituto Federal de Alagoas

TEOREMA DE PTOLOMEU E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO

Kássia Sandreane Soares de Vasconcelos

RESUMO

Esse trabalho irá mostrar um pouco da história sobre a geometria, mostrando que essa ciência foi construída a partir de sua utilidade, já que sua origem se deu devido aplicações do dia-a-dia do povo da época. Será tratado também um pouco da trajetória e contribuições do matemático Cláudio Ptolomeu no qual dá nome ao teorema que será referido, que por sua vez pouco é conhecido, mas de grande importância no âmbito matemático, onde a partir dele podemos obter vários resultados, inclusive em aplicações trigonométricas as quais serão demonstradas. E dessa forma demonstrar a importância do professor envolver em sua metodologia de ensino a história da matemática tornando os alunos mais envolvidos no processo de ensino aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria. Teorema de Ptolomeu. Cláudio Ptolomeu.

ABSTRACT

This work will show a little of the history of geometry, showing that this science was built from its usefulness, since its origin was due to the day-to-day applications of the people of the time. It will also deal with some of the trajectory and contributions of the mathematician Cláudio Ptolemy, in which he names the theorem that will be referred to, which in turn is little known, but of great importance in the mathematical field, where from it we can obtain several results, including in trigonometric applications which will be demonstrated. And in this way demonstrate the importance of the teacher involving the history of mathematics in his teaching methodology, making students more involved in the teaching-learning process.

Keywords: Geometry. Ptolemy's Theorem. Cláudio Ptolomeu.

Data de Submissão: 30.03.2022.

1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática é parte essencial da bagagem de todo cidadão com atuação crítica na sociedade. Num mundo cada vez mais complexo é preciso estimular e desenvolver habilidades que permitam resolver problemas, lidar com informações numéricas para tomar decisões, fazer inferências, opinar sobre temas diversos, desenvolvendo capacidades de comunicação e de trabalho coletivo, sempre de forma crítica e independente.

Uma pergunta comum entre os alunos é: para que eu preciso aprender matemática? Embora dos objetivos explícitos do ensino da matemática seja preparar o estudante para lidar com as atividades práticas que envolvam aspectos quantitativos da realidade, isso acaba acontecendo. Então exceto, por alguns problemas de compras, pagamento e troco a questão continuaria válida, porque grande parte do conteúdo, na maioria das vezes, continua sendo tratada de modo totalmente desligado que ocorrem no dia a dia da escola e da vida dos alunos.

Nesse contexto, ao revelar a matemática como uma criação humana e indispensável no contexto escolar, o ensino da geometria tem papel de destaque.

A história da matemática mostra que ela sempre foi construída com respostas e perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculos de créditos), por problemas vinculados à outras ciências (física, astronomia) bem como por problemas vinculados a investigação interna da própria matemática.

Nesse contexto, ao revelar a matemática como uma criação humana e indispensável no contexto escolar, o ensino da geometria tem papel de destaque.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, através deles o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive.

Ao longo do tempo o ensino da Geometria na educação básica vem sendo motivo de grande preocupação, por está perdendo espaço cada vez mais, tanto pela falta de interesse dos alunos em aprender, por enfatizar que é algo sem utilidade prática, portanto sem necessidade, quanto para o professor, que por vivenciar certas situações – salas super lotadas, alunos desinteressados, pouco ou nenhum apoio escolar, entre outros – acabam limitando o ensino geométrico em apenas fórmulas, deixando de explorar teoremas e demonstrações, privando o conhecimento e prejudicando o desenvolvimento lógico do aluno, e conseqüentemente sua formação, tornando-os incapazes de perceber a matemática no dia-a-dia.

É por esses e tantos outros problemas, que esse trabalho foi elaborado, abordando pouco da história da Geometria, bem como sua origem, mostrando que surgiu pela necessidade do povo, e dessa forma a matemática está totalmente ligada ao cotidiano, citando o geômetra Cláudio Ptolomeu, pouco de sua trajetória e trabalho, que teve sua parcela de contribuição para firmar a matemática como uma ciência. Onde todos esses conhecimentos podem ser vistos como uma forma do docente levar novas perspectivas para sala de aula.

Além disso, temos adiante a importância e a necessidade de introduzir a história da matemática como uma estratégia de ensino que contribui para a construção do saber matemático dos alunos que em sua grande maioria ver essa ciência como algo apenas conteudista, pronta e acabada, podendo torná-los a partir dessa perspectiva pessoas mais críticas pela compreensão que os conceitos são frutos de uma historicização que vem evoluindo ao longo do tempo.

De acordo com Mendes e Chaquian (2016, p. 18)

Uma das justificativas que mais encontramos à respeito da indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de matemática, aparecem no sentido de contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da matemática, bem como das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para fortalecer suas competências formativas para o exercício do ensino.

Por fim será apresentada a demonstração do Teorema de Ptolomeu e algumas aplicações, como expressões da soma e da diferença de arcos trigonométricos e a partir dele a obtenção do Teorema de Pitágoras, para que o leitor perceba que um teorema não surge pelo simples interesse em ser demonstrado, e sim pela necessidade em obter outros resultados.

Dessa forma é resgatado um trabalho de grande importância no estudo da Geometria, mas nunca mencionado no ensino básico, que mostra a relação entre as diagonais e os lados de um quadrilátero inscrito em uma circunferência, sem a necessidade em analisar ângulos. Essa inclusão fará com que o aluno perceba que a “Matemática das fórmulas” detém de muitas descobertas e conhecimentos daqueles que um dia sempre buscaram o desenvolvimento dessa ciência, que segundo Mendes e Chaquian as teorias que hoje

aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem bem diferente daquela apresentada após todo processo de formalização.

2 HISTÓRIA DA GEOMETRIA

A denominação Geometria foi dada pelos gregos, onde *geo* significa terra e *metrein*, medir, dessa forma, geometria significa medição de terras, bem relacionado ao motivo de seu surgimento, que seria as necessidades da época, como fazer medições de terrenos, construções e também estudo dos astros, atividades essas comuns entre a Babilônia, China, Índia e principalmente no Antigo Egito.

A prática de medição, no Antigo Egito fez necessária para o controle da área de cultivo e do pagamento de impostos por parte dos agricultores, visto que, anualmente não se tinha conhecimento dos limites das posses e áreas cultivadas, por consequência da enchente do Rio Nilo que apagava os marcos feitos no ano anterior, sendo inadmissível a apropriação de terras vizinhas, considerado esse ato uma ofensa como quebrar um juramento ou até mesmo assassinar alguém. Os limites dessas áreas, marcadas pelos agrimensores, mostra que já havia um conhecimento de ângulos, retas, triângulos e círculos, dando início a uma geometria dedutiva, com regras práticas para aplicação no dia-a-dia, obtendo assim resultados aproximados.

Foi por volta de 600 a.C. a 300 a.C. aproximadamente, que os Gregos, ao perceberem que os egípcios conseguiam realizar cálculos através de medidas de terras, assimilaram esse conhecimento e começaram a construir seus princípios. A partir disso a geometria passou por um período de sistematização, tornando-se uma ciência dedutiva, através de grandes nomes que buscavam o conhecimento geométrico a partir de demonstrações lógicas, sem interesse em aplicações práticas. Dessa forma, a intuição, a descoberta empírica e a experimentação vão sendo substituída, mas não perdendo sua importância, pela demonstração e dedução através de hipóteses conhecidas ou admitidas como verdade.

CLÁUDIO PTOLOMEU (85 – 165)

Matemático, astrônomo, geógrafo e físico, nascido em Ptolomeida Hérnia, no Egito, muitas de suas obras não chegaram até nós, mas tivemos o conhecimento de trabalhos suficientes que o tornou importante em todas essas áreas.

Ptolomeu mudou-se para Alexandria, no Egito, onde dedicou as suas pesquisas a maioria de sua vida, e por esse motivo passou a ser conhecido por “Ptolomeu de Alexandria”.

Entre seus trabalhos, destacam-se: “Sobre a Dimensão”, onde prova que só pode haver espaço tridimensional e expõe uma nova demonstração para o teorema das paralelas de Euclides, e a obra “O Almagesto”, composta por 13 livros, onde aborda todas as suas áreas atuantes, inclusive a teoria do geocentrismo, onde a terra seria o centro do universo, que perdurou por dezesseis séculos e na área da matemática demonstrou seu importante teorema sobre quadriláteros inscritíveis chegando a deduções trigonométricas.

3 TEOREMA DE PTOLOMEU

Quando falamos em ensino, é imprescindível relacionar e envolver a matemática a experiências, recursos lúdicos e tecnológicos e não menos importante a história da matemática, que segundo a BNCC é uma forma de despertar interesse e representar um

contexto significativo para aprender e ensinar Matemática, que por sua vez o aluno consegue compreender a sistematização e a formulação dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2018)

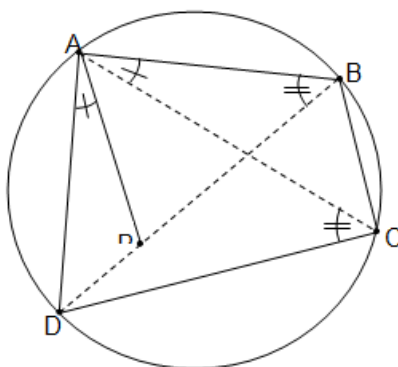
Partindo desse pressuposto, verifica-se a importância em apresentar demonstrações de teoremas e fórmulas como um meio para promover o processo de ensino aprendizagem, sendo uma competência trazida pela BNCC a ser alcançada na educação básica.

Segundo Amado, Sanchez e Pinto, a demonstração deve seguir um caráter pedagógico, sendo também uma forma de educar os alunos para que estes se sintam cada vez mais seguros e motivados nas suas argumentações matemáticas.

Baseado no que foi dito até aqui, escolhemos demonstrar o Teorema de Ptolomeu, onde a partir deste conhecimento o aluno terá uma nova estratégia para demonstrar e/ou resolver outras aplicações.

O Teorema de Ptolomeu nos diz que: *Seja um quadrilátero qualquer ABCD inscrito em uma circunferência, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.*

Figura1: Representação do Teorema de Ptolomeu



Fonte: Autor (2022)

Demonstração:

Tomando o ponto P sobre a diagonal \overline{BD} , desde que $\widehat{DAP} \equiv \widehat{CAB}$.

Temos $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD}$ por estarem inscritos na circunferência e subtenderem ao mesmo arco, como também $\widehat{DAC} \equiv \widehat{PAB}$.

Desse modo, pelo critério A.A. de semelhança de triângulos $\triangle ABP \sim \triangle DAC$, então seus lados são proporcionais:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{PB} \quad (I)$$

De forma análoga, $\triangle ADP \sim \triangle ABC$ e obtemos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{DP} \quad (II)$$

Adicionando (I) e (II), temos:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} (\overline{PB} + \overline{DP})$$

Perceba que $\overline{PB} + \overline{DP} = \overline{BD}$, então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

O intuito de expor essa demonstração é que o professor consiga explorar essa nova abordagem de ensino, buscando benefícios que possa levá-lo para dentro da sala de aula a fim de obter uma boa compreensão pelos alunos.

4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PTOLOMEU

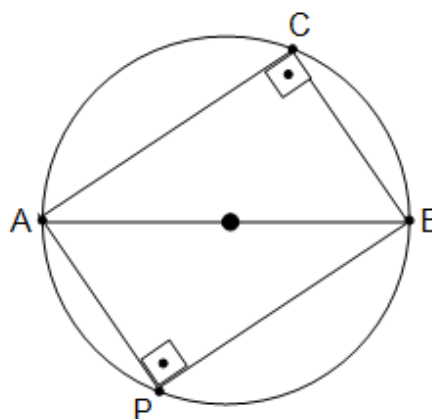
O Teorema de Ptolomeu teve grande influência na Matemática, principalmente na trigonometria, pois a sua aplicação possibilita a obtenção de algumas expressões, onde uma delas é o Teorema de Pitágoras, conteúdo esse visto desde o ensino fundamental anos finais e intensificado no ensino médio, sendo ferramenta importante em várias resoluções de problemas matemáticos.

A partir dessa importância e na perspectiva de levar novas ferramentas para o ensino da geometria na educação básica, faremos a demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando a abordagem trazida por Ptolomeu.

O TEOREMA DE PTOLOMEU IMPLICA O TEOREMA DE PITÁGORAS

Mostraremos que a partir da aplicação do teorema de Ptolomeu encontramos a expressão para o teorema de Pitágoras, onde o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Figura 2: Representação para o Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor (2022)

Dado $\triangle ABC$ inscrito numa semicircunferência, tomamos um ponto P na circunferência desde que

$$\overline{AP} \equiv \overline{BC} \text{ e } \overline{BP} \equiv \overline{AC}$$

Como $\overline{AP} \equiv \overline{BC}$, $\overline{BP} \equiv \overline{AC}$ e \overline{AB} lado em comum, então pelo critério L.L.L o $\triangle ABC \equiv \triangle ABP$, com isso $\overline{OC} \equiv \overline{OP}$, ambos raios, portanto $\overline{CP} \equiv \overline{AB}$.

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero ACBP, temos:
 $\overline{AB} \cdot \overline{CP} = \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AP} \cdot \overline{BC}$

Substituindo as congruências anteriores

$$\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Além dessa implicação, muitas outras demonstrações podem ser feitas a partir do Teorema proposta neste artigo, entre elas podemos citar: seno e cosseno da diferença e da soma de dois arcos, que ficará a cargo do leitor seus estudos de acordo com a proposta pedagógica que se quer aplicar no âmbito educacional.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível compreender a importância do ensino da Geometria no processo de formação do aluno, mas seu estudo é relevante por ter pouca importância nos currículos escolares, o que proporciona uma transmissão de conhecimentos limitados.

O aluno é capaz de construir seu próprio conhecimento, mas sem intermédio do professor torna-se mais difícil, e o fato da Geometria ser ensinada de maneira formal, seguindo apenas uma seqüência do livro didático, na maioria dos casos, sem a preocupação em associar com acontecimentos do dia-a-dia, contribui ainda mais para isso.

Esse trabalho veio mostrar que pelo fato da Geometria ter nascido a partir das práticas das antigas civilizações, principalmente pelo ato de medir terrenos, pode então, ser facilmente ensinada relacionando com o cotidiano e sua história, de maneira prática e agradável, estimulando o aluno a desenvolver suas habilidades e potenciais, capaz de perceber e associar a matemática a coisas do seu dia-a-dia.

Foi pensando nessa área que desenvolvemos esse trabalho, onde o foco é tornar o Teorema de Ptolomeu conhecido, já que ele não é mencionado tanto na educação básica quanto na superior, mostrando de forma clara assuntos os quais estão relacionados em sua demonstração e dispondo situações as quais podemos fazer uso de sua aplicação, para que o leitor tome consciência de sua importância e possa fazer uso em outras situações interessantes mostrando sua capacidade no que envolve os conhecimentos geométricos.

REFERÊNCIAS

AMADO, Nélia; SANCHEZ, Juan; PINTO, Jorge. **A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula:** o estudo da reta de Euler line. Boletim de Educação Matemática, v.29, 2015. Disponível em <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/J6bmB3dJXBdy8J3MwpjFC6x/?lang=pt&format=pdf>>. Acesso em: 26 março de 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a base. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 26 março 2022.

FREITAS, V. P. **Alguns teoremas clássicos da geometria sintética e aplicações.**Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amazonas, 2013.

LIMA, Sandro da Silva. **Introdução à Geometria: Um novo enfoque de ensino e aprendizagem.** Dissertação de mestrado – Universidade Federal de Campina Grande, 2013.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria.** 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PIASESKI, C. M. **A geometria no ensino fundamental.** Monografia – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões Campeus de Erechim, 2010.