INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS MACEIÓ
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ROSE ALINE BEZERRA LIMA

CONSTRUÇÃO DO *LATUS RECTUM* UTILIZANDO O GEOGEBRA

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

ROSE ALINE BEZERRA LIMA

CONSTRUÇÃO DO *LATUS RECTUM* UTILIZANDO O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Hugo Santos Nunes

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
***Campus* Maceió**
Biblioteca Benevides Monte

516.3
L732c Lima, Rose Aline Bezerra.

Construção do *latus rectum* utilizando o geogebra [recurso eletrônico] / Rose Aline Bezerra Lima. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 4,13 MB). – 2025.

Sistema requerido: Adobe Acrobat Reader.
Modo de acesso: Internet.
Orientação: Prof. Me. Hugo Santos Nunes.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, Maceió, 2025.

1. Matemática. 2. Matemática – Ensino. 3. Geogebra. 4. *Latus rectum*. 5. Geometria analítica. I. Título.

Franciane Monick Gomes de França
Bibliotecária – CRB 4/1831

ROSE ALINE BEZERRA LIMA

CONSTRUÇÃO DO *LATUS RECTUM* UTILIZANDO O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 08/07/2025.

BANCA EXAMINADORA:

gov.br Documento assinado digitalmente
HUGO SANTOS NUNES
Data: 12/08/2025 08:47:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Hugo Santos Nunes (Orientador)
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

gov.br Documento assinado digitalmente
ARLYSON ALVES DO NASCIMENTO
Data: 13/08/2025 13:25:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

gov.br Documento assinado digitalmente
LUCAS DE STEFANO MEIRA HENRIQUES
Data: 13/08/2025 13:20:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Lucas de Stefano Meira Henriques
Instituto Federal de Alagoas (IFAL)

MACEIÓ, ALAGOAS
2025

Dedico este trabalho a todos da minha família, em especial ao meu Tio Barros (in memorian).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pelas graças alcançadas durante toda minha vida, em especial em minha jornada acadêmica.

Tenho eterna gratidão à minha família, que são meu Porto Seguro, sei que sem eles não teria forças para alcançar meu objetivo. Em especial a minha mãe Rosilene Bezerra , mulher guerreira que criou três filhos sozinha, e é meu exemplo de vida.

Agradeço ao meu esposo Emerson Gonçalves, que sempre esteve disposto a me ajudar e me incentivou nos momentos mais difíceis , apoiando e sendo meu companheiro. Agradeço aos meus filhos Éder e Ester, são minha força diária, que me incentivam a ser uma pessoa melhor, sempre foi e é por eles.

Aos meus colegas, gratidão pelo prazer de convivência e experiências compartilhadas.

Aqui expresso, minha gratidão a meus professores, por todo conhecimento compartilhado e paciência. Vocês foram fundamentais em cada etapa vivenciada no instituto Federal. Em especial, agradeço ao Professor Me. Hugo , por ser um exemplo de vida e força, és especial, com qualidades peculiares, sendo exemplo que levarei em meu coração, obrigada .

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram na minha jornada acadêmica

“Não fui eu que ordenei a você? Seja forte e
corajoso! Não se apavore nem desanime,
pois o Senhor, o seu Deus, estará com
você por onde você andar”.
Josué 1:9

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal estudar o latus rectum das seções cônicas, elipse, parábola e hipérbole, abordando sua definição, propriedades e construções geométricas. Embora seja um elemento significativo para a compreensão das cônicas, o latus rectum é raramente tratado em materiais didáticos convencionais, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior. Para suprir essa lacuna, realiza-se uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório, fundamentada em fontes históricas e bibliográficas, com destaque para a obra de Apolônio de Perga e os manuais de geometria analítica contemporânea. Além da base teórica, o trabalho propõe a construção gráfica do latus rectum por meio do software GeoGebra, com o intuito de favorecer a visualização e facilitar o processo de ensino-aprendizagem. A utilização dessa ferramenta tecnológica visa tornar os conceitos mais acessíveis, dinâmicos e interativos, aproximando a teoria matemática da prática educacional.

Palavras-chaves: seções cônicas; latus rectum; geogebra; ensino de matemática; geometria analítica.

ABSTRACT

This study aims to investigate the latus rectum of conic sections, ellipse, parabola, and hyperbola, by addressing its definition, properties, and geometric constructions. Although it is a significant element for understanding conic curves, the latus rectum is rarely discussed in conventional textbooks, both at the high school and undergraduate levels. To address this gap, a qualitative and exploratory research was conducted, based on historical and bibliographic sources, with emphasis on the work of Apollonius of Perga and modern analytical geometry manuals. In addition to the theoretical foundation, this study proposes the graphical construction of the latus rectum using the GeoGebra software, aiming to enhance visualization and facilitate the teaching and learning process. The use of this technological tool seeks to make mathematical concepts more accessible, dynamic, and interactive, thus bridging theory and educational practice.

Keywords: conic sections; latus rectum; geogebra; mathematics teaching; analytic geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As seções cônicas ocupam um papel central na história da matemática, com aplicações que atravessam séculos e disciplinas. Desde a Antiguidade, essas curvas despertaram o interesse de matemáticos por sua elegância geométrica e pelas múltiplas possibilidades de aplicação prática. Dentre os elementos notáveis dessas curvas, o latus rectum se destaca como um parâmetro que descreve a abertura e a simetria em torno do foco, embora ainda seja pouco explorado nos currículos tradicionais do Ensino Médio e mesmo em cursos de graduação.

A investigação sobre o latus rectum das cônicas encontra respaldo histórico nos tratados de Apolônio de Perga (c. 262–190 a.C.), especialmente em sua obra As Cônicas, onde o autor sistematiza e aprofunda o estudo dessas curvas, demonstrando que é possível obter elipses, parábolas e hipérboles a partir do corte de um único cone por diferentes planos (BOYER, 1996). A ele também se atribui a introdução do termo latus rectum, que em latim significa “lado reto”, e que se refere à corda que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo principal da cônica. As contribuições de Apolônio lançaram as bases da geometria analítica e influenciaram matemáticos como Kepler, Fermat e Newton, cujas descobertas foram fundamentais para avanços em áreas como astronomia, física e engenharia.

Apesar de sua importância histórica e matemática, o latus rectum não recebe atenção significativa em livros didáticos ou no ensino formal. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo central apresentar e analisar esse elemento geométrico de forma didática e acessível, explorando sua definição, propriedades e métodos de construção. Para tanto, utilizamos como referência os fundamentos teóricos presentes nas obras de Boyer (1996), Steinbruch e Winterle (1997), além de outros autores que tratam das cônicas sob uma perspectiva histórica e analítica.

Com o intuito de tornar o estudo mais visual e interativo, recorre-se ao uso do software GeoGebra, que permite a construção e manipulação gráfica das curvas e de seus elementos notáveis. Acredita-se que a utilização de ferramentas tecnológicas, aliada a uma fundamentação teórica sólida, possa facilitar o processo de ensino-aprendizagem e estimular o interesse dos estudantes pela geometria clássica e suas aplicações contemporâneas.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, além desta introdução. No capítulo 2, apresenta-se um panorama histórico sobre as seções cônicas, com destaque para a obra de Apolônio de Perga. O capítulo 3 descreve cada uma das cônicas, suas propriedades geométricas e equações. Por fim, o capítulo 4 é discutido o latus rectum, com definição, dedução das fórmulas e análise em cada cônica, além de apresentar a construção do latus rectum no ambiente GeoGebra, demonstrando o potencial da ferramenta para o ensino da geometria analítica.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Este trabalho tem início com uma abordagem histórica sobre as seções cônicas. Para isso, utiliza-se como principal referência a obra *História da Matemática*, de Carl B. Boyer, a qual contém um capítulo dedicado exclusivamente aos oito livros escritos por Apolônio de Perga, intitulados *As Cônicas*.

Durante o primeiro século da Idade Helenística, três matemáticos se destacaram dos demais: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Graças à relevância de suas contribuições, esse período ficou conhecido como a "idade áurea" da matemática grega.

Sobre a vida de Apolônio de Perga (262–190 a.C.), há poucos registros disponíveis. Sabe-se, no entanto, que nasceu durante o reinado de Ptolemeu Evérgeta e faleceu sob o reinado de Ptolemeu Filopátor. Acredita-se que tenha estudado em Alexandria com os sucessores de Euclides, e em Pérgamo, onde conheceu Eudemo, a quem dedicou os três primeiros livros de *As Cônicas*.

Segundo (BOYER, 1996), devido ao seu vasto conhecimento e às contribuições significativas para a geometria, Apolônio ficou conhecido como "o grande geômetra".

> O tesouro consistindo em grande parte de obras de Apolônio, consequentemente deve ter incluído muito do que hoje chamamos de Geometria analitica; foi com razão que Apolônio, não Euclides, mereceu dos antigos o nome de "O Grande Geômetra". (BOYER, 1996)

Segundo (BOYER, 1996), a obra de Apolônio de Perga é composta por oito livros, dos quais apenas o último foi perdido. Os quatro primeiros constituem um complemento às obras de Menaecmo, Aristeu, Euclides e Arquimedes, matemáticos que já haviam estudado as seções cônicas antes de Apolônio. Os demais livros apresentam material original, funcionando como uma extensão dos anteriores. Neles, Apolônio introduziu novos métodos, descobriu e demonstrou diversos teoremas, e praticamente esgotou as conclusões geométricas relativas às seções cônicas.

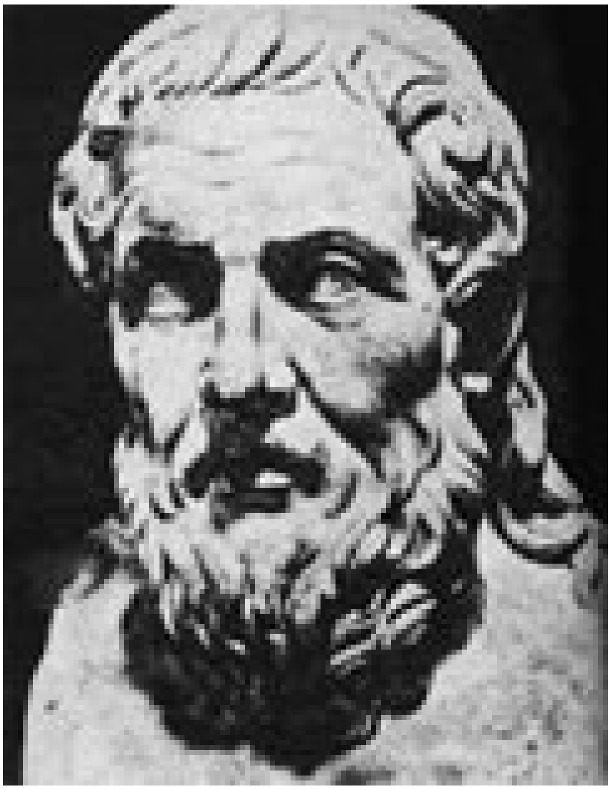
Ainda de acordo com (BOYER, 1996), as seções cônicas já eram conhecidas havia aproximadamente um século e meio quando Apolônio redigiu seu célebre tratado sobre essas curvas. Embora já existissem escritos sobre o tema, como os de Aristeu e Euclides, a obra de Apolônio veio a se consolidar da mesma forma que *Os Elementos*, de Euclides, substituindo textos anteriores. O mesmo processo ocorreu com *As Cônicas*, que superaram as obras anteriores sobre o assunto, inclusive as de Euclides.

É importante destacar que *Os Elementos*, de Euclides, e *As Cônicas*, de Apolônio, são consideradas até hoje as mais influentes obras nos campos da geometria plana e analítica, cujas proposições permanecem em uso na matemática contemporânea.

Cada um dos oito livros da obra trata de uma teoria ou demonstração relacionada às seções cônicas. O *Livro I* apresenta uma introdução com a motivação de Apolônio para escrever

[a] Disponível em: https://www.somatematica.com.br/biograf/apolonio.php

Figura 1 – Apolônio (262 - 190 a.C.)



Fonte: Site Só Matemática[a]

a obra, além de conter os métodos de geração das três seções cônicas. Nesse livro, ele demonstra que é possível obter as três seções (elipse, parábola e hipérbole) a partir de um único cone, não sendo necessário utilizar três tipos distintos de cones circulares retos. É também nesse volume que Apolônio estabelece a definição de cone circular que permanece em uso até os dias atuais.

O *Livro II* aborda principalmente os conceitos de assíntotas, eixos e diâmetros. Nele, Apolônio demonstra como traçar tangentes a uma cônica utilizando o teorema da divisão harmônica.

De acordo com (BOYER, 1996), Apolônio tinha especial apreço pelo Livro III, o que se evidencia no prefácio geral de *As Cônicas*, onde escreve:

> O terceiro livro contém muitos teoremas notáveis, úteis para a síntese de lugares sólidos e determinação de limites; a maior parte e os mais bonitos desses teoremas são novos e, quando os descobri, observei que Euclides não tinha efetuado a síntese do lugar com relação a três ou quatro retas, mas só uma parte casual dela e não bem sucedidos: pois a síntese não poderia ser completada sem minhas descobertas adicionais. (BOYER, 1996)

O *Livro III* reúne mais de cinquenta proposições cuidadosamente enunciadas, todas demonstradas por meio de métodos sintéticos. Já o *Livro IV* apresenta teoremas inéditos até então, não discutidos por matemáticos predecessores de Apolônio. Esse volume trata das diferentes formas pelas quais as secções de um cone podem ocorrer, aborda a divisão harmônica de retas e demonstra que duas cônicas não podem se interceptar em mais de quatro pontos.

O *Livro V* evidencia o grau de sofisticação alcançado por Apolônio, ao tratar de temas como retas máximas e mínimas traçadas em uma cônica, bem como teoremas sobre tangentes e normais às seções cônicas. Tais conceitos, segundo (BOYER, 1996), revelam uma intuição geométrica notável, com implicações que mais tarde se mostrariam fundamentais para o estudo das órbitas planetárias. Esse conhecimento, inclusive, viria a fornecer base para os princípios formulados por Newton, que, por sua vez, possibilitaram a realização de feitos como a viagem de ida e volta à Lua.

O *Livro VI* dedica-se à análise da semelhança entre cônicas, contendo proposições sobre segmentos de mesma medida ou de medidas distintas. No *Livro VII*, Apolônio retoma o estudo dos diâmetros conjugados, ampliando a discussão com novas proposições sobre diâmetros de secções e figuras nelas descritas.

Por fim, o *Livro VIII*, atualmente perdido, acredita-se que tenha sido uma continuação do tema dos diâmetros conjugados, dado que alguns teoremas abordados anteriormente ficaram incompletos.

Figura 2 – Capa do Livro de Apolônio


ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.
PER
LECTIONES
OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.

Fonte: Fatos Matemáticos

Antes de Apolônio, as cônicas eram obtidas como seções resultantes de três tipos distintos de cones circulares retos, cujos ângulos nos vértices eram diferentes entre si, sendo classificados como obtuso, agudo ou reto. Cada tipo de seção cônica correspondia ao corte realizado por um plano perpendicular à reta geratriz do cone.

Por meio da semelhança de triângulos em representações planas, era possível gerar geometricamente cada tipo de cone, e, consequentemente, cada uma das curvas, elipse, parábola e hipérbole, surgia a partir dessas diferentes configurações geométricas.

Apolônio demonstrou que, para a obtenção das seções cônicas, não era necessário utilizar um cone circular reto; a secção poderia ser realizada em um cone oblíquo ou escaleno.

Além disso, provou que não era preciso empregar três cones diferentes para gerar cada curva, pois um único cone, submetido a cortes por planos com diferentes inclinações em relação ao seu eixo, seria suficiente para produzir as três seções: elipse, parábola e hipérbole.

Foi também Apolônio o responsável por nomear essas curvas, cujas designações foram posteriormente adotadas pelos pitagóricos em suas aplicações na teoria das áreas. A etimologia desses termos remete a conceitos geométricos da época. Assim, quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de elipse, parábola ou hipérbole, conforme a referida base fosse menor do que o segmento, com ele coincidisse ou o excedesse. E observamos que a razão dessas designações está na própria significação dos termos, pois elipse quer dizer falta, parábola corresponde a igual e hipérbole exprime excesso.

Figura 3 – Ilustração das origens etimológicas das cônicas.

(a) Elipse (b) Parábola (c) Hipérbole

Fonte: Autor

Além disso, Apolônio trabalhou com o conceito de cone duplo e formulou a definição de cone circular que permanece válida até os dias atuais:

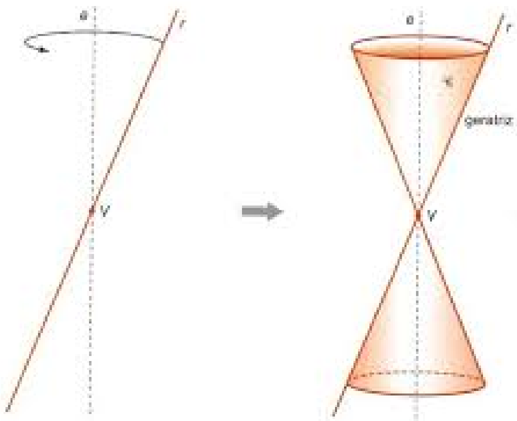
> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreve a superfície de um cone duplo. (BOYER, 1996)

Conforme a definição apresentada por Apolônio, pode-se considerar duas retas, r e t, que possuem um ponto em comum, V, denominado vértice. Ao rotacionar uma dessas retas em 360° ao redor da outra, obtém-se a figura de um cone duplo, como ilustra a Figura 4. Essa construção geométrica permite compreender como as seções cônicas podem ser geradas a partir da interseção de planos com essa superfície contínua.

Apolônio aplicou os novos nomes às seções cônicas em um contexto geométrico inovador para sua época. Utilizando conceitos que hoje são associados à linguagem algébrica, estabeleceu distinções entre as curvas com base em propriedades de áreas. A forma moderna e familiar da equação de uma parábola com vértice na origem é dada por $y^2 = lx$, onde l representa o *latus rectum*. Da mesma forma, considera-se que, para curvas com vértice na origem, a elipse corresponde à inequação $y^2 < lx$, e a hipérbole, à inequação $y^2 > lx$.

Partindo da análise de um cone duplo, com vértice comum, Apolônio tratava as duas folhas da hipérbole como componentes de uma única curva. Na primeira proposição de sua obra,

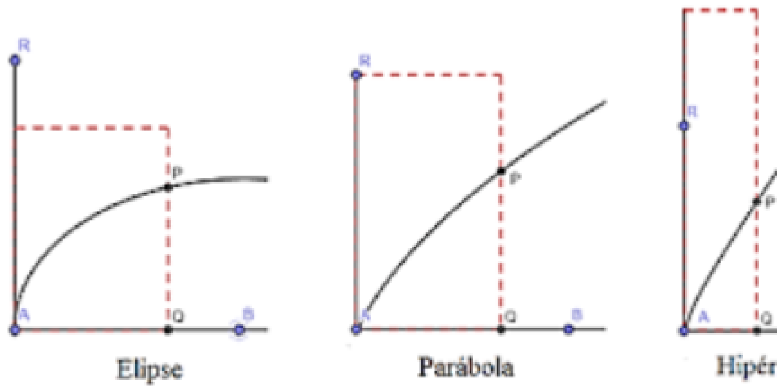
Figura 4 – Geração de um cone duplo a partir da rotação de uma reta



Fonte: GOMIDE, Neres Fernando, 2015

estabeleceu as relações entre as seções cônicas por meio de métodos geométricos baseados em áreas. Introduziu um parâmetro, que atualmente chamamos de *latus rectum*, representado por um segmento AR, perpendicular ao eixo AB da cônica e passando pelo vértice.

Figura 5 – Demonstração da equação Pitagórica



Fonte: RODRIGUES, Francisco Bezerra, 2021

A esse parâmetro, Apolônio associava um retângulo AQ, sendo Q a projeção ortogonal de um ponto P da cônica sobre o eixo, e a área desse retângulo dada por $(PQ)^2$. De acordo com a relação entre essa área e o parâmetro AR, a curva era classificada: se o retângulo excedia AR, tratava-se de uma hipérbole; se coincidia, era uma parábola; se ficava aquém, era uma elipse.

É notório que as descobertas de Apolônio exerceram influência fundamental em diversas áreas do conhecimento na atualidade. Seus estudos sobre as seções cônicas possibilitaram avanços significativos, como a compreensão das órbitas planetárias, tendo Kepler demonstrado que os planetas descrevem trajetórias elípticas ao redor do Sol. Além disso, as curvas cônicas desempenham papel crucial em diversos campos científicos e tecnológicos, incluindo a física, a astronomia, a economia e a engenharia, entre outros.

3 SEÇÕES CÔNICAS

No século XVII, os matemáticos franceses Pierre Fermat e René Descartes trabalharam independentemente e tiveram a ideia de atribuir coordenadas às equações. O primeiro a publicar suas ideias foi René Descartes, em 1637, como um apêndice de sua obra filosófica *O Discurso do Método*, em um capítulo chamado *Géométrie*. Por esse motivo, ele é considerado o fundador da Geometria Analítica.

Em 1650, o matemático Frans van Schooten, de Amsterdã, preparou uma edição comentada da *Géométrie*, explicando em suas próprias palavras o que entendia da teoria de Descartes. Essa edição foi a que se tornou conhecida, ganhou aceitação entre os matemáticos da época e influenciou o desenvolvimento da matemática.

Nos primeiros anos, o uso dos eixos cartesianos x e y era diferente do atual; por exemplo, os eixos nem sempre eram traçados de forma perpendicular, e era raro o uso de números negativos. A versão definitiva dos sistemas de coordenadas, tal como os utilizamos hoje, deve-se a Isaac Newton, que calculou diversos gráficos de equações de terceiro grau.

As curvas chamadas *cônicas* (circunferência, parábola, elipse e hipérbole) recebem esse nome devido à forma como são obtidas: por meio de diferentes cortes (seções) em um cone circular reto. Essas curvas foram estudadas na Antiguidade por Apolônio de Perga (262–200 a.C.), que viveu no século II a.C.

Foi também Descartes quem demonstrou que as seções cônicas de Apolônio estão contidas em um único conjunto de equações quadráticas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como as seções cônicas incluem as circunferências dos antigos astrônomos, as elipses de Kepler e as parábolas usadas por Galileu para descrever a trajetória de projéteis, essa descoberta de Descartes tornou-se uma ferramenta poderosa para os físicos. Sem ela, o trabalho desses estudiosos teria sido severamente limitado.

As aplicações dessas curvas são muito variadas. Basta observar ao nosso redor para encontrar objetos cotidianos e usos tecnológicos: rodas de bicicletas e carros, tampas de frascos e brinquedos mecânicos. Os cabos de pontes suspensas têm forma parabólica. Telescópios, detectores de radar e refletores luminosos também possuem formatos parabólicos.

Nos faróis dos carros, a fonte de luz é posicionada no foco da parábola. Assim, os raios luminosos, ao se refletirem na superfície interna do farol, saem paralelos entre si.

As órbitas dos planetas ao redor do Sol são elípticas, com o Sol localizado em um dos focos. A excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol é de aproximadamente $0,0167$. Cometas e satélites artificiais também descrevem órbitas elípticas. No extremo oposto, o cometa Halley possui excentricidade muito próxima de 1. Em óptica e propagação de ondas, utilizam-se lentes elípticas. No design artístico, é comum enquadrar retratos e fotografias em molduras de formato elíptico.

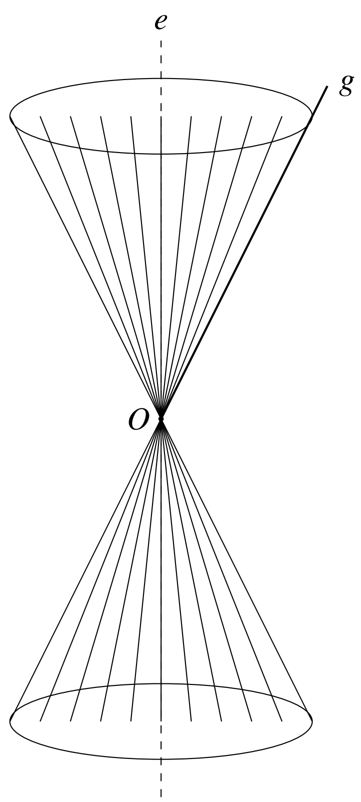
Neste capítulo, será explorado um conjunto de figuras geométricas que compartilham uma característica comum: todas podem ser obtidas a partir do corte de um cone por um plano. Essas curvas, conhecidas como **seções cônicas**, ou simplesmente cônicas, possuem uma ampla gama de aplicações em áreas como a física, a astronomia e a engenharia — desde o formato de refletores de faróis automotivos até a descrição das órbitas de planetas e cometas.

Serão apresentadas, individualmente, as definições do cone, da elipse, da hipérbole e da parábola, bem como suas respectivas estruturas geométricas e equações fundamentais. A abordagem será fundamentada, principalmente, nas obras de (WINTERLE, 2002) e (WINTERLE; STEINBRUCH, 1997), que oferecem suporte teórico e didático para o estudo dessas curvas clássicas da geometria.

3.1 SEÇÕES DE UM CONE

Sejam duas retas e e g concorrentes, e uma reta vertical fixa e e outra reta que a intercepta em um ponto fixo O, formando um ângulo constante.

Figura 6 – Seções do Cone duplo



Fonte: Autor

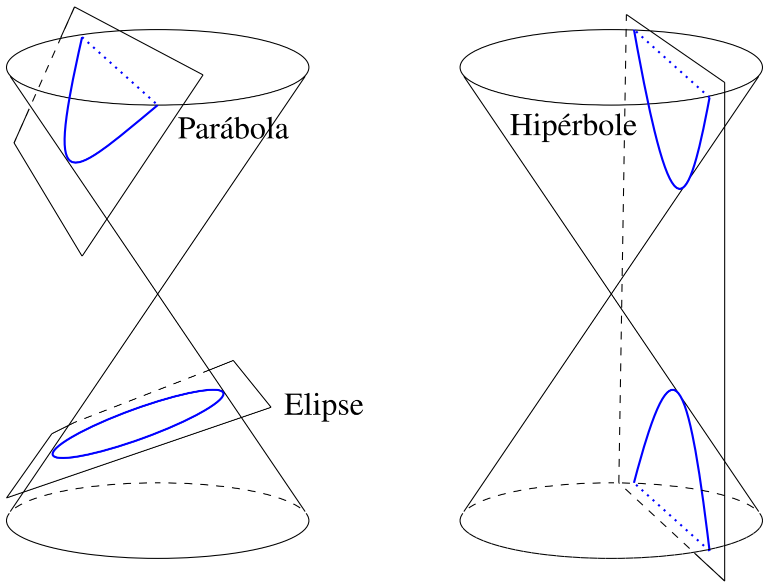
Suponha que giramos a linha g em torno da linha e de tal maneira que o ângulo permaneça constante. Logo, a superfície formada é um cone circular reto duplo e estendendo-se indefinidamente em ambas as direções. O ponto O é chamado de vértice, a reta e é o eixo do cone e a reta g é a geratriz da superfície cônica. O vértice separa o cone em duas partes, chamadas de Naipes. Se tomarmos a interseção de um plano com um cone, a seção formada é chamada de seções cônicas. Desta forma, as seções cônicas são as curvas obtidas pela interseção de um do cone circular reto por um plano. Obtemos diferentes tipos de seções cônicas dependendo da posição do plano de interseção em relação ao cone e do ângulo que ele faz com o eixo vertical do cone que não passa pelo vértice. A interseção do plano com o cone pode ocorrer tanto no vértice do cone ou em qualquer outra parte do naipe, sendo abaixo ou acima do vértice. Quando o plano corta o naipe do cone e não passa pelo vértice, temos as seguintes situações:

a) Quando o plano é paralelo a uma geratriz da superfície, a seção é uma parábola;

b) Quando o plano não for paralelo a uma geratriz e intercepta uma das folhas da superfície, a seção é uma elipse;

c) Quando o plano não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície, é uma hipérbole.

Figura 7 – Cortes nos cones formando as cônicas



Fonte: Autor

3.2 ELIPSE

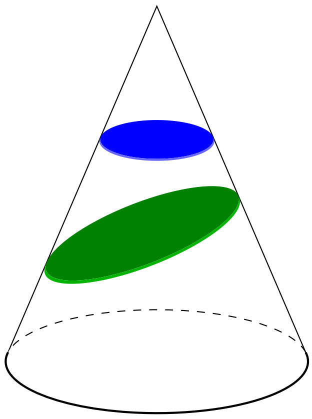
A National Statuary Hall, localizada em Washington, D.C., é uma sala de formato oval conhecida como *câmara sussurrante*, devido ao efeito acústico peculiar causado por sua forma geométrica. Nessa sala, o som se propaga de maneira especial: duas pessoas posicionadas em pontos específicos conseguem se ouvir sussurrando, mesmo estando distantes uma da outra. Para compreender por que esse fenômeno ocorre e onde essas pessoas devem se posicionar, é necessário entender as propriedades geométricas da elipse.

Durante muito tempo acreditou-se que as órbitas planetárias ao redor do Sol eram circulares. Por volta de 1600, Johannes Kepler descobriu que elas eram, na verdade, elípticas.

Na verdade, tecnicamente, elas são aproximadamente elípticas. As órbitas dos planetas não são exatamente elípticas por causa das interações entre si e com outros corpos celestes.

A elipse é um tipo de seção cônica, ou seja, uma curva obtida pela interseção de um plano com um cone. Essas figuras foram descobertas há mais de dois milênios pelo matemático grego Menaecmo. A figura a seguir ilustra dois tipos de seções cônicas: quando o plano de corte é perpendicular ao eixo do cone, obtém-se uma circunferência; quando o plano está levemente inclinado em relação ao eixo, a interseção resulta em uma curva ovalada denominada elipse.

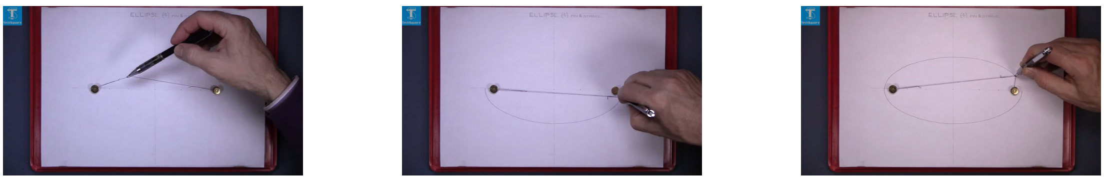
Figura 8 – Seção de um cone que dá uma elipse



Fonte: Autor

Uma elipse pode ser traçada manualmente utilizando um procedimento simples: fixa-se dois alfinetes em um pedaço de papelão e prende-se um barbante cujos comprimentos exceda a distância entre os alfinetes. Em seguida, fixa-se cada extremidade do barbante a um alfinete e, mantendo o barbante esticada com um lápis, traça-se uma curva. O caminho descrito pelo lápis é uma elipse.

Figura 9 – Desenhando uma elipse com barbante e lápis



(a) (b) (c)

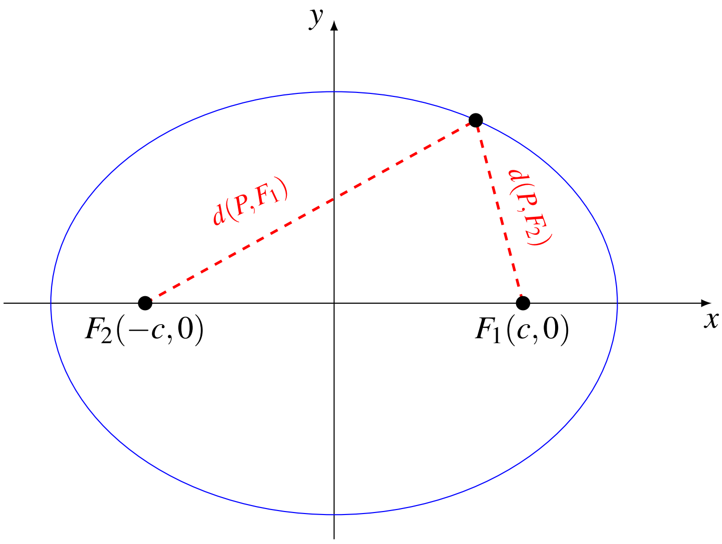
Fonte: (TECHSQUARE, 2014)

Geometricamente, a elipse é definida como o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. O comprimento do barbante representa essa constante, enquanto os dois alfinetes correspondem aos focos da elipse.

Definição 3.1 (Elipse)**.** *Uma elipse é o conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos $F_1(x_1,y_1)$ e $F_2(x_2,y_2)$, chamados de focos, é uma constante k, conforme a equação:*

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=k,$$

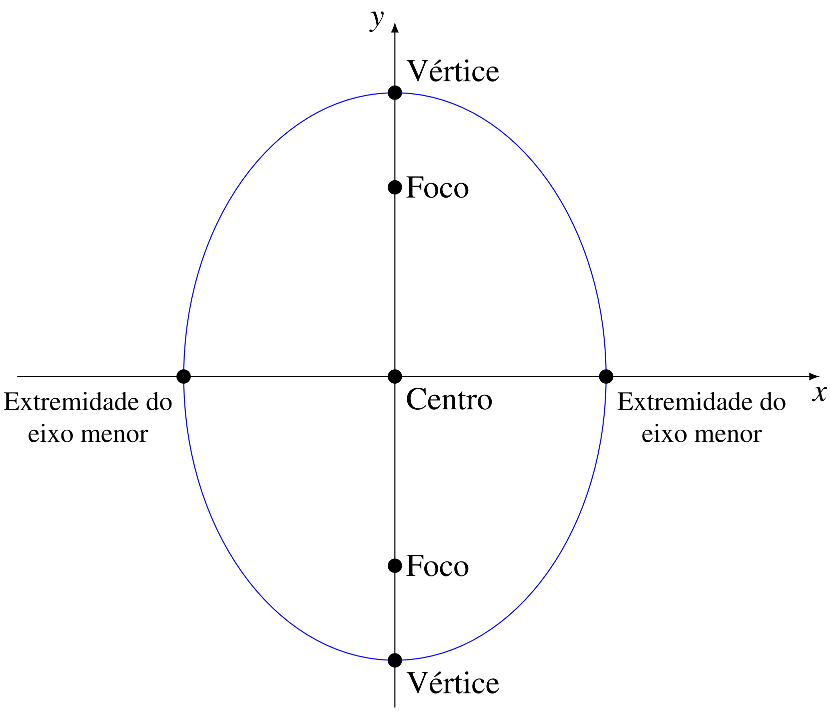
Figura 10 – Elipse



Fonte: Autor

Com base nessa definição, a elipse possui elementos geométricos bem definidos que são cruciais para sua caracterização, como ilustra a Figura 11. O eixo maior é a reta que passa pelos focos da elipse. Os vértices são os pontos da elipse que se encontram sobre o eixo maior, e o comprimento do eixo maior é determinado pela distância entre esses vértices. O centro da elipse é o ponto médio tanto entre os vértices quanto entre os focos. Perpendicular ao eixo maior e passando pelo centro, encontra-se o eixo menor. As extremidades do eixo menor, por vezes chamadas de co-vértices, são os pontos da elipse que interceptam esse eixo, e a distância entre elas define o comprimento do eixo menor.

Figura 11 – Elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo y.



Fonte: Autor

Vale destacar que qual eixo será considerado maior ou menor depende da orientação da elipse. Na elipse representada abaixo, os focos estão localizados sobre o eixo y; portanto, este é o eixo maior, enquanto o eixo x é o eixo menor. Em função disso, os vértices correspondem aos pontos extremos da elipse sobre o eixo y, e as extremidades do eixo menor (também chamadas de co-vértices) são os pontos extremos sobre o eixo x.

A partir da definição acima, podemos encontrar uma equação para uma elipse. Iremos encontrá-la para uma elipse centrada na origem $C(0,0)$ com focos em $F_1(c,0)$ e $F_2(-c,0)$, onde $c > 0$. Suponha que $P(x,y)$ seja algum ponto na elipse. A distância de F_1 a P é:

$$d(P,F_1) = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Similarmente, a distância de F_2 a P é:

$$d(P,F_2) = \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Pela definição da elipse, a soma dessas distâncias deve ser constante:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2) = k \implies \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = k.$$

Se rotularmos um dos vértices como $(a,0)$, ele deve satisfazer a equação acima, já que é um ponto da elipse. Isso nos permite escrever k em termos de a:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a-c)^2+0^2}+\sqrt{(a+c)^2+0^2} &= k \\
|a-c|+|a+c| &= k \\
(a-c)+(a+c) &= k \\
2a &= k
\end{aligned}$$

Como $a > c$, esses valores serão positivos

Substituindo isso em nossa equação, agora tentaremos reescrever a equação de uma forma mais amigável:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\
\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 \\
(x-c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2 \\
x^2-2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2
\end{aligned}$$

Combinando termos semelhantes e isolando a raiz resulta em:

$$\begin{aligned}
4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 4a^2+4xc \\
a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= a^2+xc \\
a^2\left((x+c)^2+y^2\right) &= a^4+2a^2xc+x^2c^2 \\
a^2(x^2+2xc+c^2+y^2) &= a^4+2a^2xc+x^2c^2 \\
a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4+2a^2xc+x^2c^2 \\
a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2 \\
(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}$$

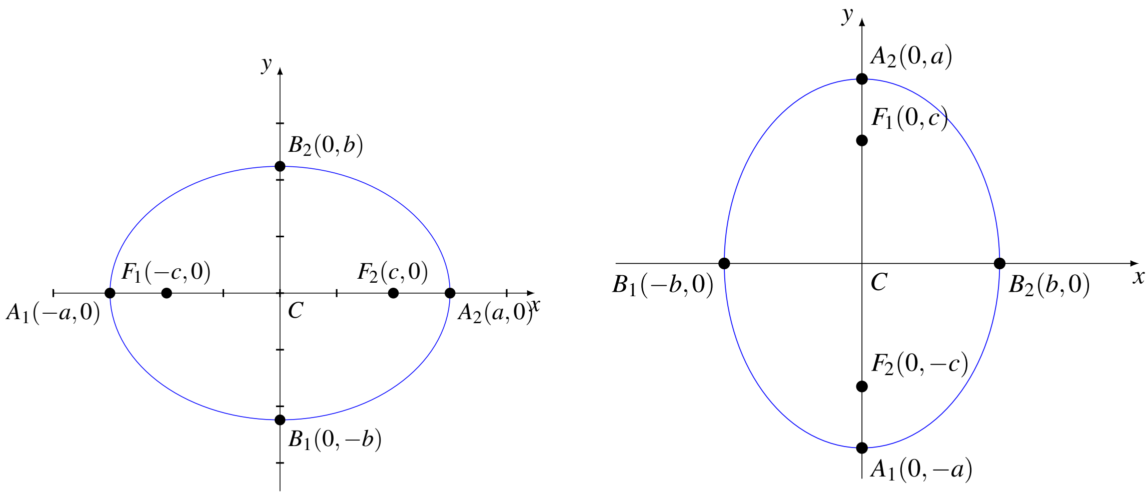
Seja $b^2=a^2-c^2$. Como $a>c$, sabemos que $b>0$. Substituindo b^2 por a^2-c^2, temos:

$$\begin{aligned}
b^2x^2+a^2y^2 &= a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Divida ambos os lados por a^2b^2

Esta é a equação padrão de uma elipse centrada na origem $C(0,0)$. Normalmente trocamos a e b quando o eixo maior da elipse é vertical, como ilustra a Figura 12.

Figura 12 – Gráficos da elipse centrada na origem



(a) Horizontal (b) Vertical

Fonte: Autor

A tabela 1 apresenta a equação padrão, os vértices, os extremos do eixo menor, os focos e o gráfico para cada caso.

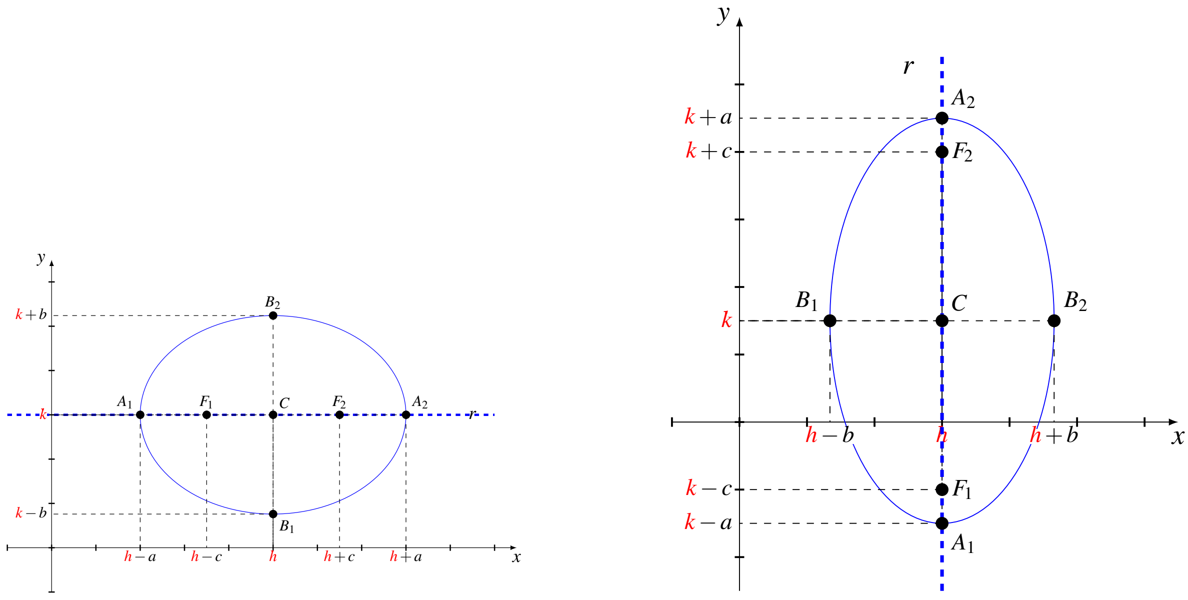
Tabela 1 — Elementos da elipse centrada na origem

Eixo Maior	Horizontal	Vertical
Equação Padrão	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
Vértices	$(-a,0)$ e $(a,0)$	$(0,-a)$ e $(0,a)$
Extremos do Eixo Menor	$(0,-b)$ e $(0,b)$	$(-b,0)$ e $(b,0)$
Focos	$(-c,0)$ e $(c,0)$	$(0,-c)$ e $(0,c)$

Fonte: Autor

Nem todas as elipses estão centradas na origem. O gráfico de uma elipse assim é um deslocamento do gráfico centrado na origem, portanto, a equação padrão para uma elipse centrada em (h,k) é ligeiramente diferente. Podemos deslocar o gráfico h unidades para a direita e k unidades para cima substituindo x por $x-h$ e y por $y-k$, como ilustra a Figura 13, de forma semelhante ao que fizemos ao aprender transformações. Assim, a forma padrão da equação de uma elipse centrada no ponto $C(h,k)$ depende de o eixo maior ser horizontal ou vertical.

Figura 13 – Gráficos da elipse centrada fora da origem



(a) Horizontal (b) Vertical

Fonte: Autor

A tabela 2 apresenta a equação padrão, os vértices, os extremos do eixo menor, os focos e o gráfico para cada caso.

Tabela 2 — Elementos da elipse centrada fora da origem

Eixo Maior	Horizontal	Vertical
Equação Padrão	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
Vértices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Extremos do Eixo Menor	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$
Focos	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$

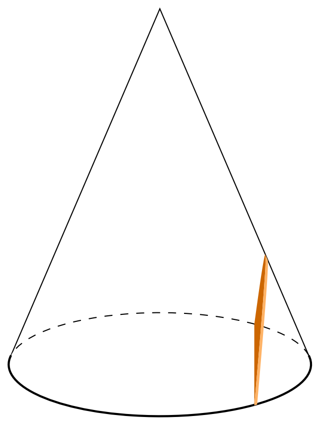
Fonte: Autor

3.3 HIPÉRBOLE

Na seção anterior, discutiu-se que os planetas possuem órbitas aproximadamente elípticas em torno do Sol. Em contraste, objetos com alta velocidade, como cometas, são capazes de escapar da atração gravitacional solar, descrevendo uma trajetória em formato de hipérbole. As hipérboles são curvas que apresentam diversas aplicações práticas, como na determinação da localização de embarcações, na descrição do formato de torres de resfriamento ou na calibração de equipamentos sismológicos.

Anteriormente à ampla adoção do sistema GPS, o sistema de Navegação de Longo Alcance (LORAN) era empregado para determinar a localização de embarcações. Esse método operava com base em duas estações de rádio, designadas A e B, que emitiam sinais simultaneamente para o navio. A diferença no tempo de chegada desses sinais era convertida em uma medida de distância, o que permitia posicionar o navio sobre uma hipérbole cujos focos eram as estações A e B. Subsequentemente, um segundo par de estações de rádio, identificadas como C e D, também transmitia sinais simultâneos para o navio, possibilitando a determinação de uma nova hipérbole com focos em C e D. O ponto P, correspondente à interseção entre as duas hipérboles, indicava a localização precisa do navio.

Figura 14 – Seção de um cone que dá uma hipérbole



Fonte: Autor

A hipérbole, assim como a elipse e a parábola, é outro tipo de seção cônica, formada pela interseção de um plano com um cone duplo, como ilustra a Figura 14. A palavra "hipérbole" deriva de uma palavra grega que significa "excesso". A palavra inglesa "hyperbole" significa exagero. Podemos pensar em uma hipérbole como uma elipse exagerada ou excessiva, uma que foi virada do avesso.

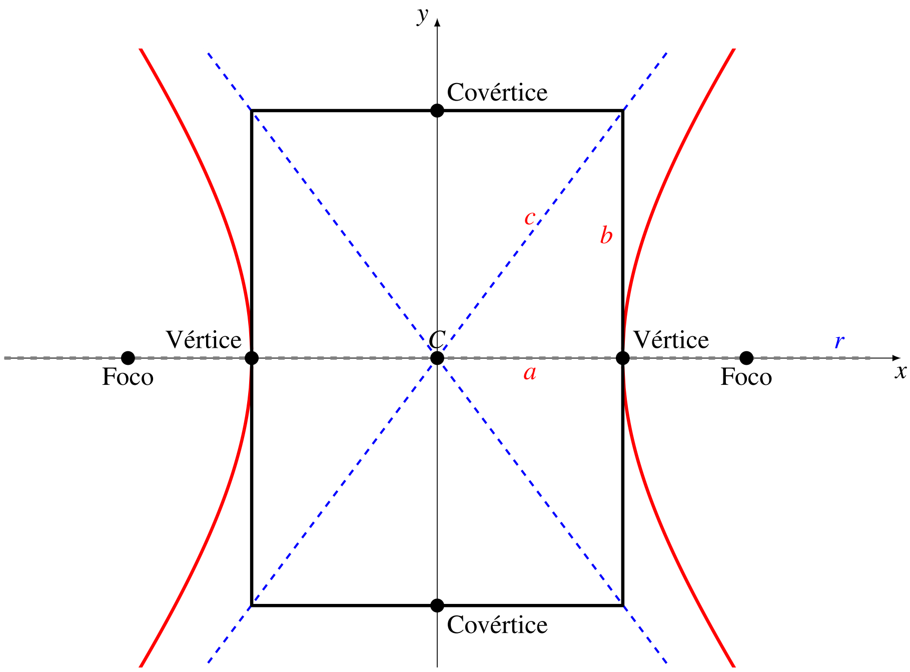
Definição 3.2 (hipérbole)**.** *Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ para os quais o valor absoluto da diferença das distâncias até dois pontos fixos $F_1(x_1,y_1)$ e $F_2(x_2,y_2)$, chamados de focos, é uma constante k:*

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = k.$$

Assim como a elipse, a hipérbole possui elementos geométricos distintos que a caracterizam. O eixo transverso é a reta que conecta os focos da hipérbole. Os vértices são os pontos da hipérbole que se encontram sobre o eixo transverso, e o comprimento do eixo transverso é definido pela distância entre esses vértices. O centro da hipérbole é o ponto médio tanto entre os vértices quanto entre os focos. O outro eixo de simetria que passa pelo centro é denominado eixo conjugado. As duas partes separadas da curva são chamadas de ramos, e, por fim, uma hipérbole é caracterizada por possuir duas assíntotas.

De acordo com a orientação da hipérbole, o eixo transverso pode variar. Como ferramenta auxiliar para a construção do gráfico de uma hipérbole, é comum utilizar um retângulo central como guia. Esse retângulo é traçado ao redor do centro da hipérbole, com lados paralelos aos eixos coordenados, de modo que passe pelos vértices e covértices da curva. As assíntotas da hipérbole são representadas pelas diagonais desse retângulo, servindo como referência visual para o esboço preciso da figura.

Figura 15 – Retângulo fundamental da hipérbole e suas assíntotas.



Fonte: Autor

A partir da definição acima, podemos encontrar uma equação de uma hipérbole. Vamos determiná-la para uma hipérbole com centro na origem $C(0,0)$, com abertura horizontal e focos em $F_1(c,0)$ e $F_2(-c,0)$, onde $c>0$. Suponha que $P(x,y)$ seja um ponto na hipérbole. As distâncias de P até F_1 e de Q até F_2 são:

$$\begin{aligned} d(P,F_1) &= \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ d(P,F_2) &= \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \end{aligned}$$

Pela definição, o valor absoluto da diferença das distâncias deve ser constante:

$$|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)| = \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = k$$

Substituindo um dos vértices $(a,0)$, podemos determinar k em termos de a:

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{(a-c)^2+0^2}-\sqrt{(a+c)^2+0^2}\right| &= k \\ ||a-c|-|a+c|| &= k \\ |(c-a)-(a+c)| &= k \\ |-2a| &= k \end{aligned}$$

Como $c>a$, então $|a-c| = c-a$

Usando $k=2a$ e removendo os valores absolutos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a \\ \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\ \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 &= \left(\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 \\ (x-c)^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2 \\ x^2-2xc+c^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2 \\ -2xc &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2xc \\ -4xc &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\ -xc &= a^2 \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \end{aligned}$$

Isolando o radical e, em seguida, elevando ambos os lados ao quadrado, resulta em:

$$
\begin{aligned}
\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= -a^2-xc \\
a^2((x+c)^2+y^2) &= a^4+2a^2xc+x^2c^2 \\
a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4+2a^2xc+x^2c^2 \\
a^2y^2+a^2c^2-a^4 &= x^2c^2-a^2x^2
\end{aligned}
$$

$$a^2y^2+a^2(c^2-a^2)=x^2(c^2-a^2)$$

Seja $b^2=c^2-a^2$. Como $c>a$, sabemos que $b>0$. Substituindo b^2 por c^2-a^2, temos:

$$
\begin{aligned}
a^2y^2+a^2b^2 &= b^2x^2 \\
\frac{y^2}{b^2}+1 &= \frac{x^2}{a^2} \\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}
$$

Divida ambos os lados por a^2b^2

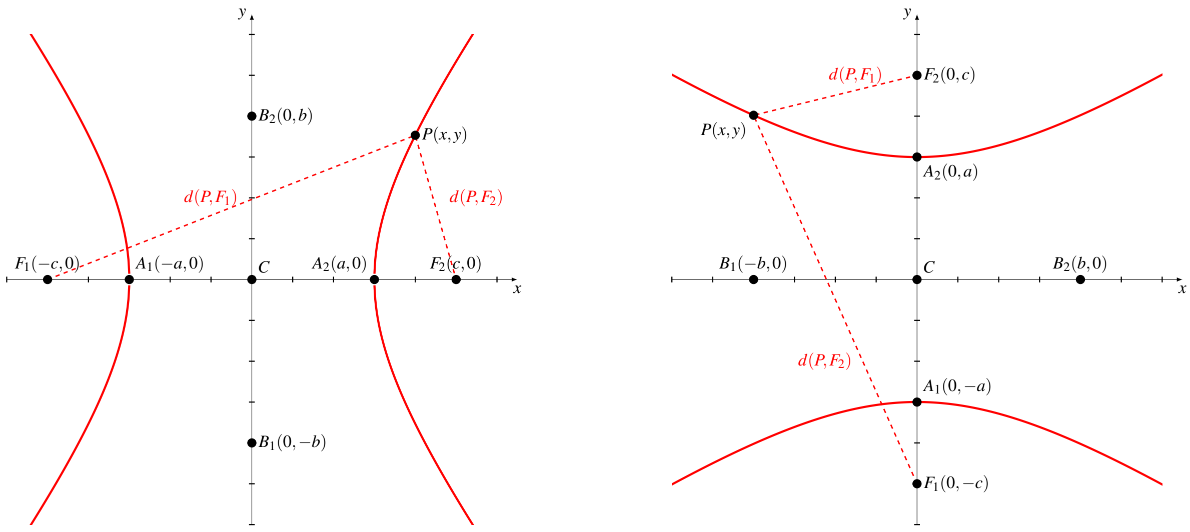
A forma padrão de uma equação de hipérbole centrada na origem $C(0,0)$ depende se ela se abre horizontal ou verticalmente. A tabela 3 apresenta a equação padrão, vértices, focos, assíntotas, vértices do retângulo de construção e o gráfico para cada caso (ver figura 16).

Tabela 3 — Elementos da hipérbole centrada na origem

Abre	Horizontalmente	Verticalmente
Equação Padrão	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
Vértices	$(-a,0)$ e $(a,0)$	$(0,-a)$ e $(0,a)$
Focos	$(-c,0)$ e $(c,0)$	$(0,-c)$ e $(0,c)$
Assíntotas	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
Vértices do Retângulo	(a,b), $(-a,b)$, $(a,-b)$, $(-a,-b)$	(b,a), $(-b,a)$, $(b,-a)$, $(-b,-a)$

Fonte: Autor

Figura 16 – Gráficos da hipérbole



(a) Horizontal (b) Vertical

Fonte: Autor

Assim como no caso das elipse, nem todas as hipérboles são centradas na origem. A equação padrão para uma centrada em (h,k) é ligeiramente diferente. A forma padrão de uma equação de hipérbole centrada em $C(h,k)$ depende se ela se abre horizontal ou verticalmente. A tabela 4 apresenta a equação padrão, vértices, focos, assíntotas, vértices do retângulo de construção e o gráfico para cada caso.

Tabela 4 — Elementos da hipérbole centrada fora da origem

Abre	Horizontalmente	Verticalmente
Equação Padrão	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Vértices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Focos	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Assíntotas	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
Vértices do Retângulo	$(h \pm a, k \pm b)$	$(h \pm b, k \pm a)$

Fonte: Autor

A localização dos focos pode desempenhar um papel fundamental em problemas de aplicação envolvendo hipérboles. Para determiná-los, é necessário calcular a distância do centro aos focos, denotada por c, utilizando a equação:

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Essa relação se assemelha, mas não é equivalente ao Teorema de Pitágoras. Vale a pena comparar com a equação usada para encontrar o valor de c no caso das elipses:

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

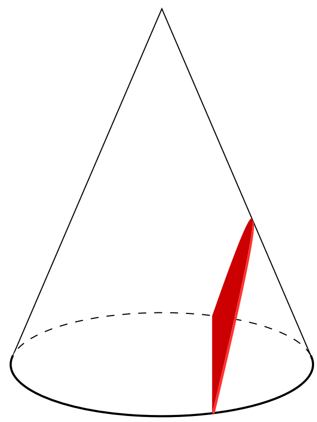
Ao lembrar que, para os focos estarem contidos dentro da elipse, eles devem estar localizados antes dos vértices (isto é, $c < a$), compreende-se por que a subtração ocorre na ordem $a^2 - c^2$. Por outro lado, no caso das hipérboles, os focos devem estar além dos vértices (isto é, $c > a$), o que justifica a necessidade de subtrair a^2 de c^2, ou seja, utilizar $c^2 - a^2$. Trata-se, portanto, da operação oposta àquela realizada no caso das elipses.

3.4 PARÁBOLA

Em uma seção anterior, foi apresentado que as elipses possuem uma propriedade geométrica especial: um raio que emana de um dos focos é refletido em direção ao outro foco, característica que possibilita o funcionamento das chamadas câmaras dos sussurros. As parábolas, por sua vez, também apresentam uma propriedade notável: qualquer raio que parte do foco é refletido paralelamente ao eixo de simetria da parábola. Esse princípio é amplamente explorado em aplicações tecnológicas. Por exemplo, refletores de lanternas utilizam superfícies parabólicas para concentrar a luz da lâmpada em um feixe colimado, isto é, com raios paralelos entre si. A mesma propriedade pode ser aplicada de forma inversa, de modo que raios paralelos, como os provenientes do Sol ou de sinais de rádio, sejam refletidos em direção ao foco da parábola.

No campo da astronomia, essa propriedade é explorada por radiotelescópios, que utilizam antenas com formato parabólico para captar sinais vindos do espaço. A curvatura da parábola garante que todos os sinais incidentes paralelamente ao eixo de simetria sejam concentrados no ponto de recepção, ou foco. Ainda que parábolas já tenham sido estudadas anteriormente no contexto das funções quadráticas, é importante destacar que, naquele momento, sua interpretação como uma seção cônica ainda não havia sido abordada. Do ponto de vista da geometria cônica, uma parábola é a figura gerada pela interseção de um plano com um cone, desde que esse plano seja paralelo a uma das geratrizes do cone.

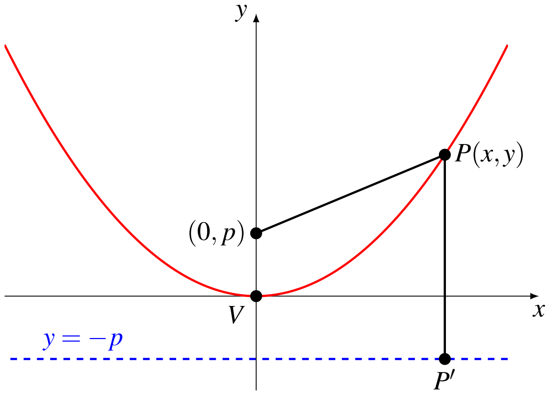
Figura 17 – Seção de um cone que dá uma parábola



Fonte: Autor

Definição 3.3 (Parábola)**.** *Uma parábola com vértice na origem é o conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ do plano que estão à mesma distância de um ponto fixo $F(0,p)$, chamado foco, e de uma reta fixa $y = -p$, chamada diretriz.*

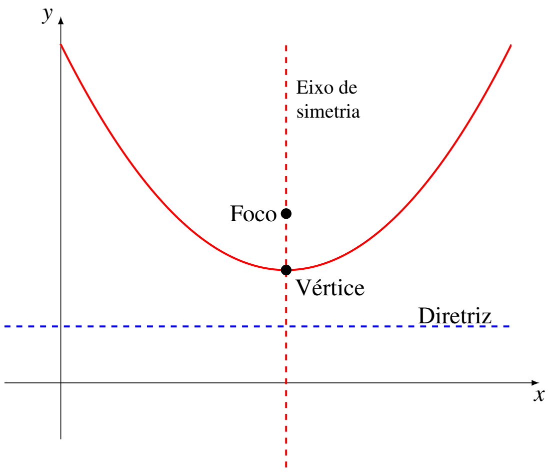
Figura 18 – Gráfico definição da parábola



Fonte: Autor

De modo geral, uma parábola possui um eixo de simetria, que é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz. O ponto em que a parábola intercepta esse eixo de simetria é denominado vértice. A distância do vértice ao foco é representada por p e recebe o nome de comprimento focal.

Figura 19 – Gráfico definição da parábola



Fonte: Autor

A partir da definição apresentada, é possível deduzir a equação de uma parábola. Considera-se, para isso, uma parábola com vértice na origem, $V(0,0)$, orientada para cima com foco no ponto $F(0,p)$ e diretriz dada pela reta $y = -p$. Supondo que $P(x,y)$ seja um ponto pertencente à parábola, a distância de Q ao foco pode ser determinada a partir da fórmula da distância entre dois pontos no plano.

$$d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}.$$

A distância do ponto P à diretriz é a diferença dos valores de y:

$$d = y - (-p) = y + p.$$

Pela definição da parábola, essas distâncias devem ser iguais:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + (y-p)^2} &= y + p \\
x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\
x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\
x^2 &= 4py
\end{aligned}$$

Esta é a forma cônica padrão de uma parábola que se abre para cima ou para baixo (com eixo de simetria vertical), centrada na origem. Note-se que, ao dividir ambos os lados por $4p$, obtém-se uma forma mais familiar da equação da parábola

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

Esta equação pode ser reconhecida como uma transformação da parábola $y = x^2$, comprimida ou esticada verticalmente por um fator de $\frac{1}{4p}$. Utilizando um processo semelhante, é possível determinar a equação de uma parábola com vértice na origem que se abre para a direita ou para a esquerda. Nesse caso, o foco localiza-se no ponto $(p, 0)$, e o gráfico apresentará um eixo de simetria horizontal e uma diretriz vertical, como ilustra a Figura 20. A forma cônica padrão da equação será $y^2 = 4px$, a qual também pode ser escrita como

$$x = \frac{y^2}{4p}.$$

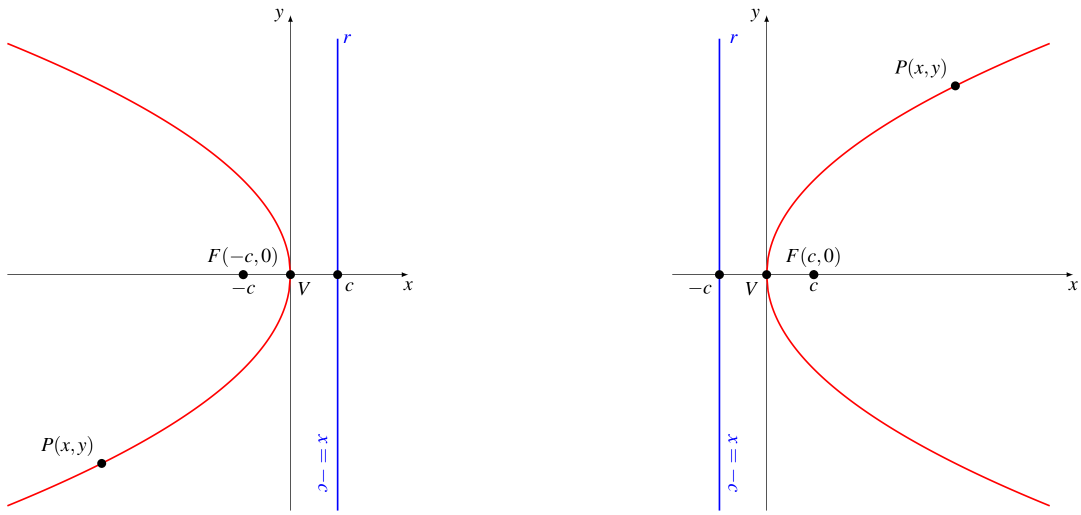
A tabela 5 apresenta as equações padrão correspondentes, bem como o vértice, o eixo de simetria, a diretriz, o foco e a representação gráfica para cada um dos casos.

Tabela 5 — Elementos da parábola centrada fora da origem

Abertura	Horizontal	Vertical
Equação Padrão	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
Vértice	(h,k)	(h,k)
Eixo de simetria	$y = k$	$x = h$
Diretriz	$x = h - p$	$y = k - p$
Foco	$(h+p,k)$	$(h,k+p)$

Fonte: Autor

Figura 20 – Gráficos da parábola centrada na origem

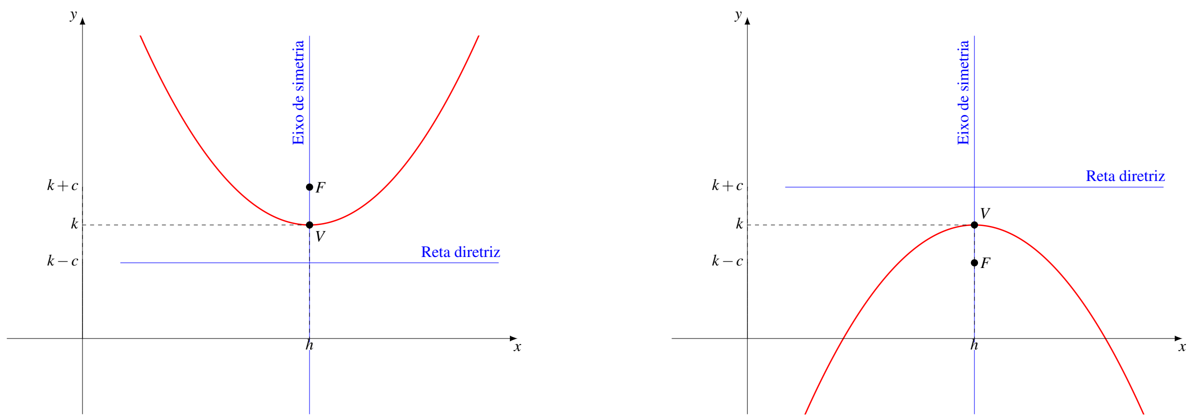


(a) Com abertura para esquerda (b) Com abertura para direita

Fonte: Autor

Para parábolas cujo vértice não está localizado na origem, é possível realizar uma translação das equações padrão, resultando em novas expressões que refletem essa mudança de posição. A forma canônica de uma parábola com vértice em um ponto genérico (h,k) depende da orientação do eixo de simetria, ou seja, se este é horizontal ou vertical.

Figura 21 – Gráficos da parábola centrada fora da origem com abertura vertical



(a) Abertura para cima (b) Abertura para baixo

Fonte: Autor

3.5 EXCENTRICIDADE

Nas seções anteriores, definimos cada cônica de maneira distinta, mas todas envolviam a distância entre um ponto da curva e o foco. Na seção anterior, por exemplo, a parábola foi definida utilizando o foco e uma reta chamada diretriz. Verifica-se, no entanto, que todas as seções cônicas — elipses, hipérboles e parábolas — podem ser definidas a partir de uma única relação.

Definição 3.4 (Excentricidade)**.** *Seja uma seção cônica com foco F e vértice V, a excentricidade* *e é definida como a razão entre a distância do vértice ao foco e a distância do vértice ao centro C da cônica:*

$$e = \frac{d(V,F)}{d(V,C)}.$$

Esse valor é constante para qualquer seção cônica e pode definir a seção cônica da seguinte forma:

a) Se $0 < e < 1$, é uma elipse;

b) Se $e = 1$, é uma parábola;

c) Se $e > 1$, é uma hipérbole.

4 LATUS RECTUM

Entre os diversos elementos geométricos que compõem as seções cônicas, destaca-se o *latus rectum*, um segmento notável associado ao foco da curva. O latus rectum, embora menos conhecido do que os eixos principais ou os focos, fornece uma medida essencial relacionada à abertura e à simetria da cônica. Sua definição e expressão variam conforme a natureza da curva, e seu estudo fornece uma compreensão mais profunda sobre a geometria intrínseca de cada seção. Este capítulo tem como objetivo apresentar uma análise detalhada do latus rectum para cada tipo de seção cônica, abordando sua definição, construção geométrica, fórmulas específicas e deduções, bem como suas aplicações e importância matemática.

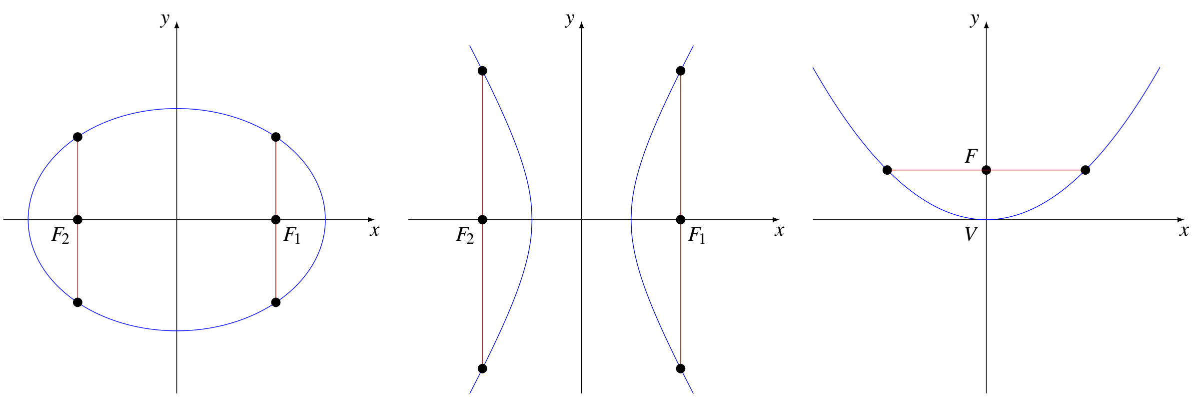
4.1 DEFINIÇÃO

O latus rectum é um conceito fundamental no estudo das seções cônicas, abrangendo parábolas, elipses e hipérboles. A expressão, de origem latina, significa "lado reto"(latus = lado; rectum = reto). Trata-se do segmento de reta perpendicular ao eixo principal da seção cônica, que passa pelo foco e tem suas extremidades localizadas sobre a própria curva.

A compreensão do latus rectum é essencial para a análise das propriedades geométricas e das dimensões dessas curvas. Esse segmento desempenha um papel relevante na caracterização dos efeitos geométricos das seções cônicas, sendo de especial importância para elipses, parábolas e hipérboles. Formalmente,

Definição 4.1. *Chamamos de latus rectum de uma cônica a corda focal, segmento de reta que passa por um do(s) foco(s) da cônica, de extremidade pertencentes à mesma cujo comprimento é mínimo.*

Figura 22 – Latus Rectum das seções cônicas



(a) Latus Rectum da Elipse (b) Latus Rectum da Hipérbole (c) Latus Rectum da Parábola

Fonte: Autor

A construção do latus rectum varia conforme a natureza da curva (Figura 22). Na elipse e na hipérbole, o eixo principal é definido entre os vértices e os focos, e o latus rectum é perpendicular a ele, passando pelo ponto focal. Já na parábola, cujo eixo é determinado pela diretriz e pelo foco, o latus rectum é o segmento horizontal ou vertical (dependendo da orientação da parábola) que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria.

A seguir, será feita uma análise individual para cada cônica.

4.2 LATUS RECTUM DA ELIPSE

Na elipse, o latus rectum manifesta-se como uma corda interior à curva que atravessa perpendicularmente o eixo maior no ponto focal. Sua presença revela a espessura local da elipse ao redor do foco, funcionando como uma régua transversal de simetria.

Seja uma elipse com eixo maior ao longo do eixo x e e focos em $(\pm c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, cuja equação reduzida é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0,$$

o latus rectum da elipse é o segmento perpendicular ao eixo maior, que passa por um dos focos, e tem suas extremidades sobre a curva.

Dado que a excentricidade e de uma elipse é definida como a razão entre a distância do centro ao foco c e o comprimento do semi-eixo maior a, tem-se a relação fundamental $e = \frac{c}{a}$. A partir dessa expressão, pode-se isolar a distância focal em função da excentricidade, obtendo-se $c = ae$. Essa relação permite determinar a posição dos focos da elipse de acordo com a orientação dos eixos. Para uma elipse centrada na origem, cujo eixo maior está disposto sobre o eixo x, os focos são localizados nos pontos $F_1 = (-ae, 0)$ e $F_2 = (ae, 0)$. Alternativamente, quando o eixo maior está sobre o eixo y, os focos assumem as coordenadas $F_1 = (0, -ae)$ e $F_2 = (0, ae)$. Observa-se, portanto, que a posição dos focos está diretamente relacionada ao valor da excentricidade.

Com a posição dos focos devidamente determinada, é possível localizar também os extremos do latus rectum. No caso da elipse com foco em $(ae, 0)$, os extremos do latus rectum são os pontos

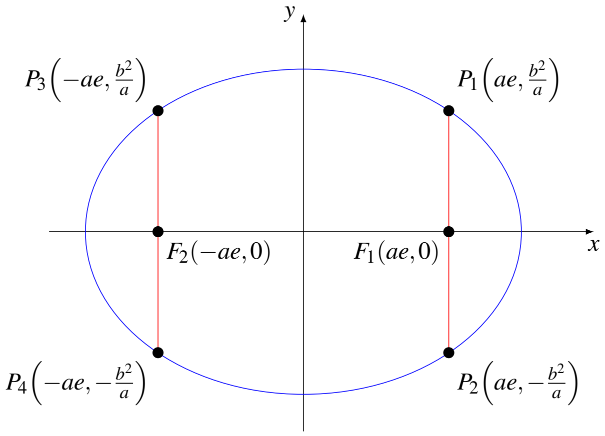
$$P_1\left(ae, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(ae, -\frac{b^2}{a}\right).$$

De forma análoga, os extremos do latus rectum correspondente ao foco $(-ae, 0)$ encontram-se em

$$P_3\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{e} \quad P_4\left(-ae, -\frac{b^2}{a}\right).$$

Ressalta-se que, neste contexto, a excentricidade e assume valores no intervalo $0 < e < 1$, característica própria das elipses. Além disso, os pontos extremos do latus rectum e o respectivo foco são colineares, de modo que a distância entre esses extremos corresponde exatamente ao ***comprimento*** do latus rectum.

Figura 23 – Extremos do latus rectum da elipse



Fonte: Autor

Proposição 4.1 (Comprimento do latus rectum da elipse)**.** *O comprimento do latus rectum associado a um dos focos da elipse é dado por*

$$L = \frac{2b^2}{a}.$$

Demonstração. Considere o foco $F = (c, 0)$. Procuramos os pontos $P = (c, y)$ que pertencem à elipse.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{Substituindo } x = c \text{ na equação da elipse:} \\
\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{Substituímos } c^2 = a^2 - b^2\text{:} \\
1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{Separa a primeira fração e simplifica:} \\
\frac{y^2}{b^2} &= \frac{b^2}{a^2} && \text{Cancela 1 e passa para o outro lado:} \\
y^2 &= \frac{b^4}{a^2} && \text{Multiplica ambos os lados por } b^2\text{:} \\
y &= \pm\frac{b^2}{a} && \text{Tira a raiz:}
\end{aligned}$$

O comprimento total do latus rectum é distância entre os dois pontos extremos, logo:

$$L = 2 \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}.$$

□

Essa medida não depende da orientação espacial da elipse, mas sim da relação entre os eixos. O latus rectum, nesse contexto, fornece uma estimativa da curvatura local na região focal e está diretamente ligado à distribuição de massa ou luz em aplicações físicas e astronômicas.

4.3 LATUS RECTUM DA HIPÉRBOLE

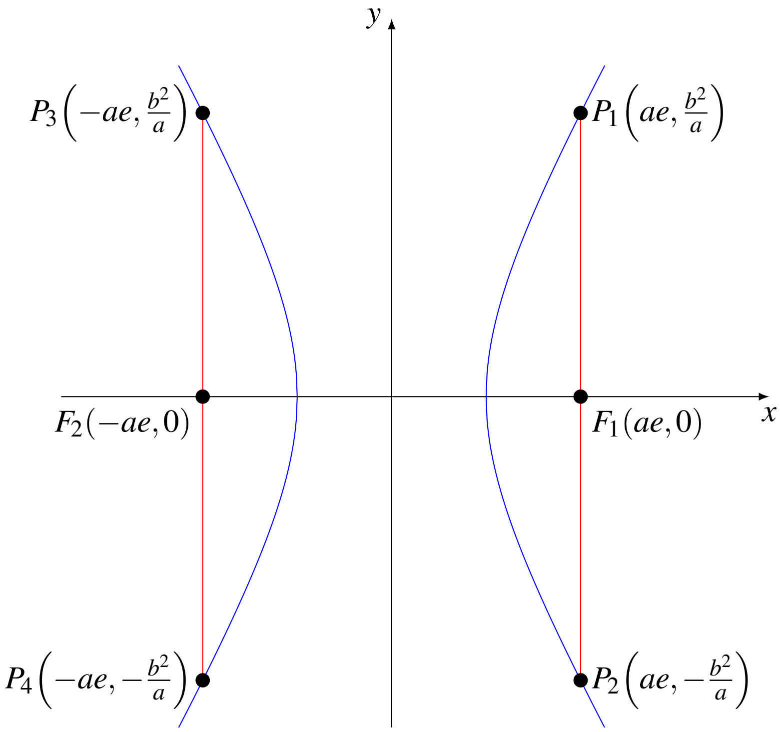
Diferentemente da elipse, a hipérbole é uma curva aberta composta por duas ramificações simétricas em relação ao centro. Nessa configuração, o latus rectum representa a corda perpendicular ao eixo real que passa por um dos focos e possui suas extremidades situadas sobre a curva. Esse segmento é utilizado para mensurar a largura da abertura de uma das ramificações no ponto focal, assumindo papel importante na análise geométrica da hipérbole.

Considere a hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo x, cuja equação reduzida é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nessa configuração, os focos encontram-se nos pontos $F(\pm c, 0)$, com $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. O latus rectum é definido como o segmento de reta perpendicular ao eixo real que passa por um dos focos e intersecta a curva da hipérbole em dois pontos simétricos. Para determinar as extremidades desse segmento, seguimos o procedimento análogo ao caso da elipse.

Figura 24 – Extremos do latus rectum da hipérbole



Fonte: Autor

O comprimento do latus rectum da hipérbole é definido de forma análoga ao da elipse e, assim como na elipse, seu valor depende dos parâmetros da equação reduzida e é dado por

$$L = \frac{2b^2}{a}.$$

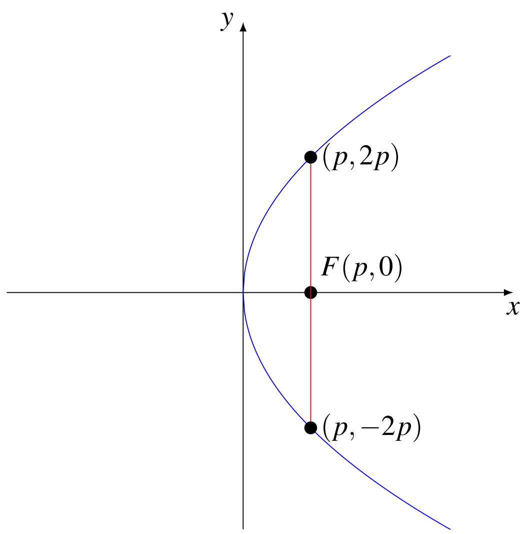
Embora a fórmula do comprimento do latus rectum da hipérbole coincida com a da elipse, sua interpretação geométrica apresenta nuances distintas. Enquanto na elipse o latus rectum mede uma largura interna ao redor do foco, na hipérbole ele representa a amplitude da curva junto ao foco, indicando a abertura da ramificação.

Esse segmento desempenha um papel fundamental na representação gráfica da hipérbole, pois auxilia na construção de seus ramos e de suas assíntotas, além de ser particularmente relevante na modelagem de fenômenos que envolvem trajetórias hiperbólicas, como aquelas observadas na dinâmica de sondas espaciais em astronomia.

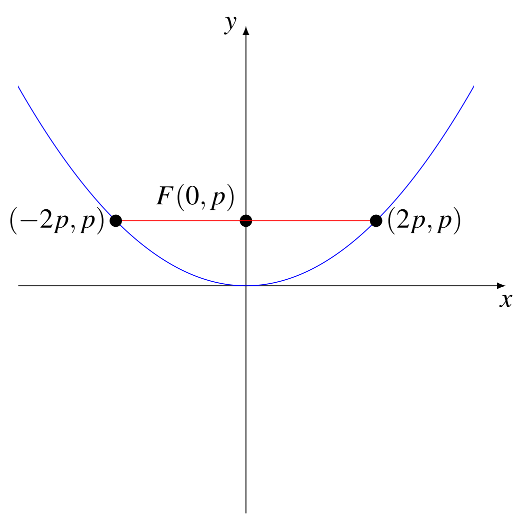
4.4 LATUS RECTUM DA PARÁBOLA

Diferentemente da elipse e da hipérbole, que possuem dois latus rectum, um para cada foco, a parábola apresenta apenas um único latus rectum, diretamente associado ao seu foco. Geometricamente, esse segmento é definido como uma corda que passa pelo foco, é paralelo à diretriz e perpendicular ao eixo de simetria da parábola. Consequentemente, em parábolas de concavidade vertical ou horizontal, o latus rectum será, respectivamente, horizontal ou vertical.

Figura 25 – Extremos do latus rectum da parábola



(a) Eixo vertical



(b) Eixo horizontal

Fonte: Autor

A relevância geométrica do latus rectum reside em duas propriedades essenciais: o foco situa-se exatamente no ponto médio do segmento, garantindo que seus extremos equidistem do foco na direção perpendicular ao eixo; além disso, o foco, o vértice e os extremos do latus rectum são elementos colineares, reforçando a simetria intrínseca da curva.

Para parábolas canônicas, o comprimento do latus rectum é deduzido analiticamente. No caso da parábola com eixo vertical $y^2 = 4px$, com vértice em $(0,0)$ e foco em $(p,0)$, o latus rectum está contido na reta $x = p$. Substituindo na equação, obtêm-se os extremos $(p, 2p)$ e $(p, -2p)$, e seu comprimento é $L = 4p$ (ver Figura 25a). Por outro lado, na parábola com eixo horizontal $x^2 = 4py$, com foco em $(0, p)$, os extremos são $(2p, p)$ e $(-2p, p)$, e $L = 4p$ (ver Figura 25b). Em ambos os casos, verifica-se que o comprimento do latus rectum (L) é igual a quatro vezes a distância entre o foco e o vértice, evidenciando a relação direta entre a abertura da curva e sua configuração focal.

A existência de um único latus rectum, que emerge naturalmente da equação canônica e define a abertura em torno do foco, diferencia a parábola da elipse e da hipérbole. Nestas últimas, os latus rectum são cordas acessórias, enquanto na parábola o latus rectum é elemento estrutural intrínseco à sua definição.

As implicações práticas do latus rectum transcendem a geometria pura. Em óptica, por exemplo, ele reflete a largura do feixe de luz que, ao incidir sobre um refletor parabólico, reflete-se paralelamente ao eixo passando pelo foco. Em aplicações de engenharia (como antenas, radares e refletores), sua dimensão determina a concentração e distribuição de energia, influenciando diretamente a eficiência do dispositivo.

Conclui-se que o latus rectum é um elemento geométrico fundamental na parábola, sintetizando sua simetria e conectando-se diretamente ao foco e ao vértice. Sua compreensão é essencial tanto para o esboço preciso da curva quanto para aplicações tecnológicas que dependem das propriedades focais das parábolas.

4.5 CONSTRUÇÃO DO LATUS RECTUM UTILIZANDO O GEOGEBRA

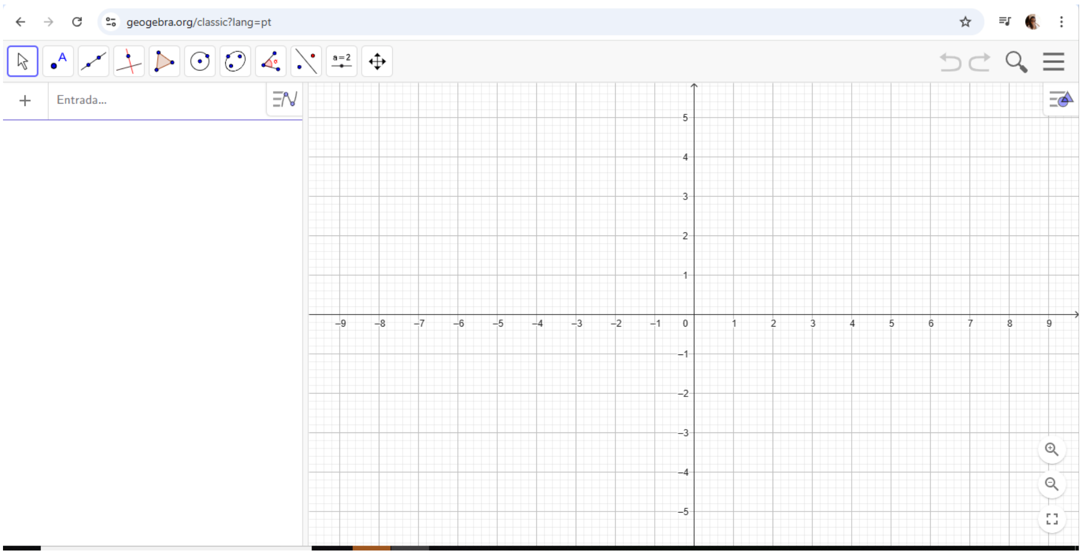
O GeoGebra é um software de matemática gratuito desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001, com o propósito de ser utilizado em ambientes educacionais como ferramenta de apoio ao ensino-aprendizagem em todos os níveis de escolaridade. Projetado para facilitar a visualização e manipulação de conceitos matemáticos, o GeoGebra tem se consolidado como uma das principais plataformas digitais de apoio pedagógico na área da Matemática.

Atualmente, o software é utilizado em mais de 190 países, estando traduzido para mais de 55 idiomas e contabilizando mais de 300 mil downloads mensais. Conta ainda com o suporte de 62 Institutos GeoGebra distribuídos em 44 países, os quais têm como objetivo promover e auxiliar o uso do programa em contextos educacionais. Reconhecido internacionalmente, o GeoGebra recebeu diversos prêmios de software na Europa e nos Estados Unidos, além de ter sido instalado em milhares de laptops distribuídos em iniciativas educacionais ao redor do mundo.

Em constante processo de atualização, o GeoGebra permite a construção de gráficos, tabelas, equações, além da resolução de situações-problema. O software pode ser acessado tanto em versões instaláveis quanto de forma online, o que o torna amplamente acessível. Entre suas funcionalidades, destacam-se as ferramentas visuais de representação gráfica, que possibilitam trabalhar conteúdos matemáticos sob múltiplas formas — geométrica, algébrica, numérica e simbólica — com visualizações em duas e três dimensões. Essa versatilidade faz do GeoGebra um recurso valioso para a construção de conhecimentos matemáticos de maneira dinâmica, interativa e significativa.

Quando acessa o programa, a tela inicial do GeoGebra, aparece a imagem abaixo, na barra de ferramentas está os comandos que podem ser utilizados e têm o espaço das equações:

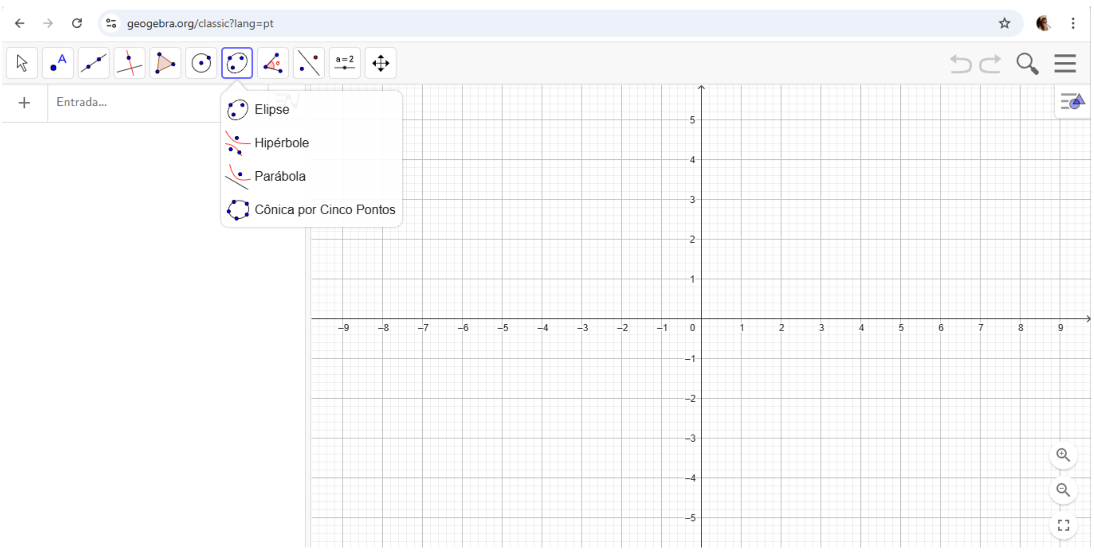
Figura 26 – Tela inicial do Geogebra



Fonte: Autor

Para construir as Cônicas utilizando a barra de ferramentas, clicar no comando em cônicas, têm a apresentação das curvas. No qual, podemos escolher qual Cônicas escolher em um processo simples que possibilita destacar importantes elementos.

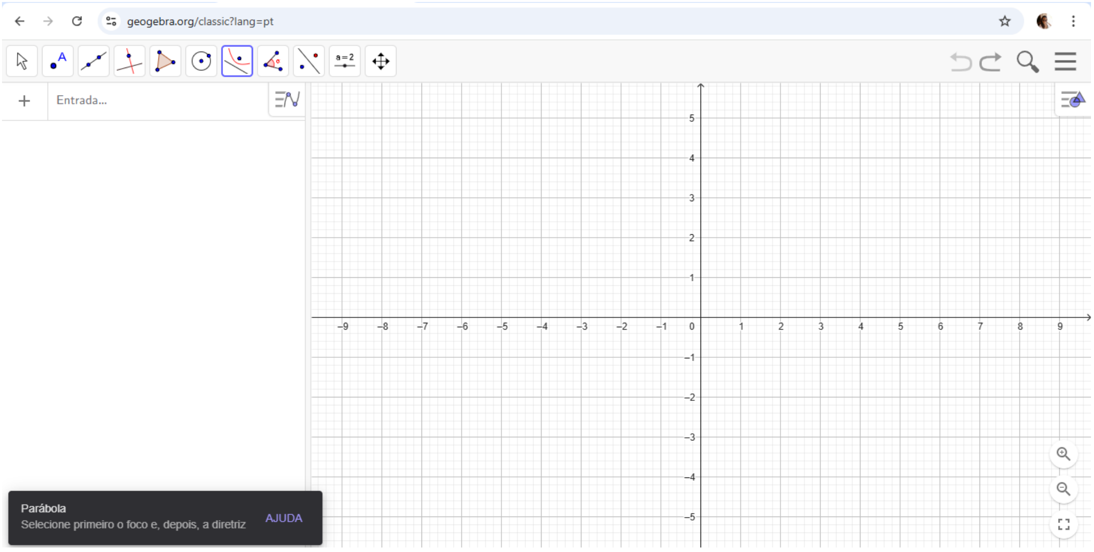
Figura 27 – Apresentação das cônicas no Geogebra



Fonte: Autor

Para construção da Parábola, é necessário dois elementos, a reta diretriz e o foco.

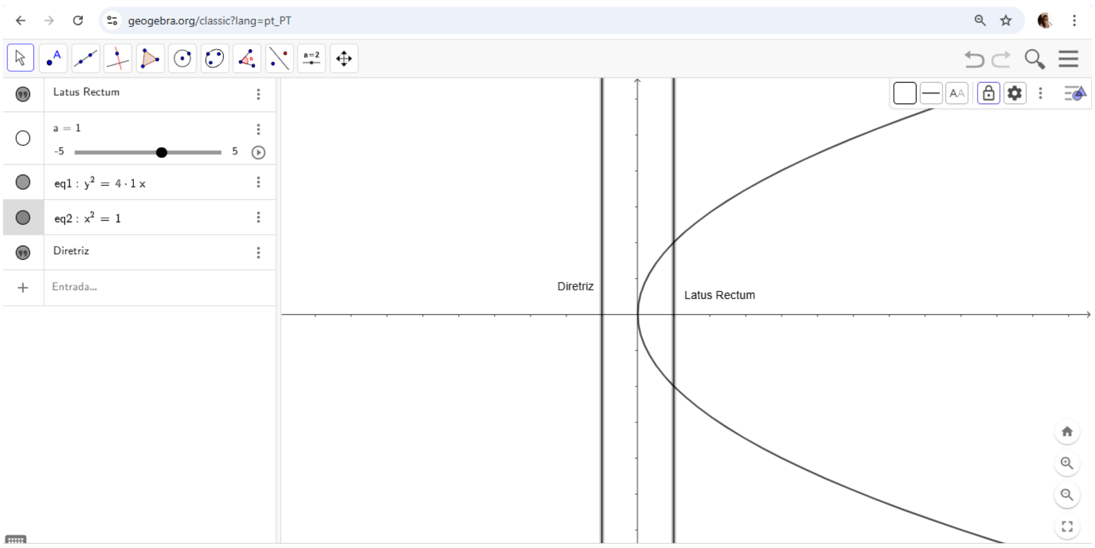
Figura 28 – Geogebra



Fonte: Autor

Colocamos a equação da Parábola, obtemos o gráfico e também acrescentamos a equação do Latus rectum, temos a reta do latus rectum e a diretriz. Na construção da Parábola, abaixo, com a seta do Mousse seleciona Parábola e escolhe a reta diretriz e o ponto para construí-la, conforme figura abaixo:

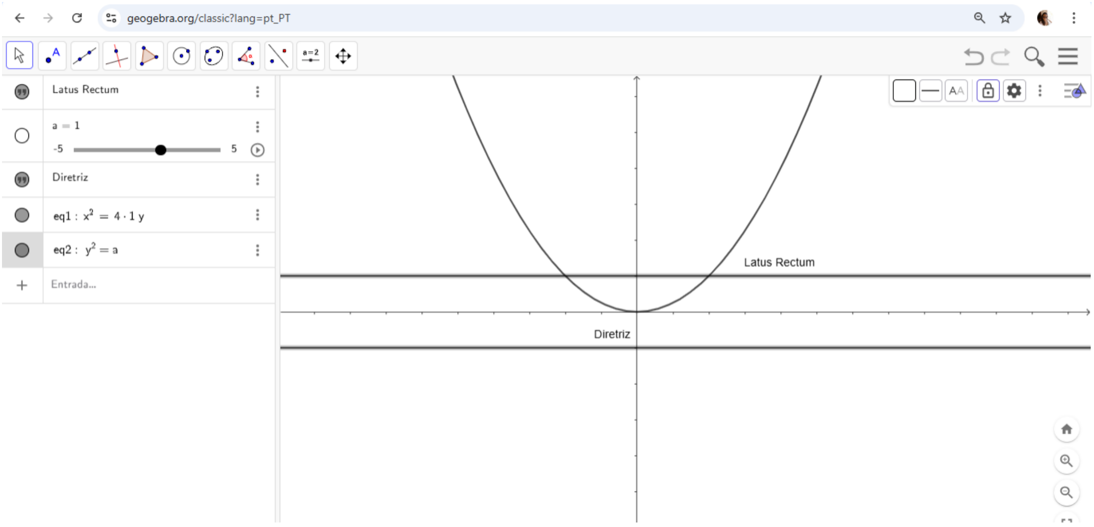
Figura 29 – Apresentação do latus rectum no Geogebra da parábola



Fonte: Autor

Agora com a equação $x^2 = 4ay$ para representar o Latus rectum, basta digitar a respectiva equação no campo adequado para equações.

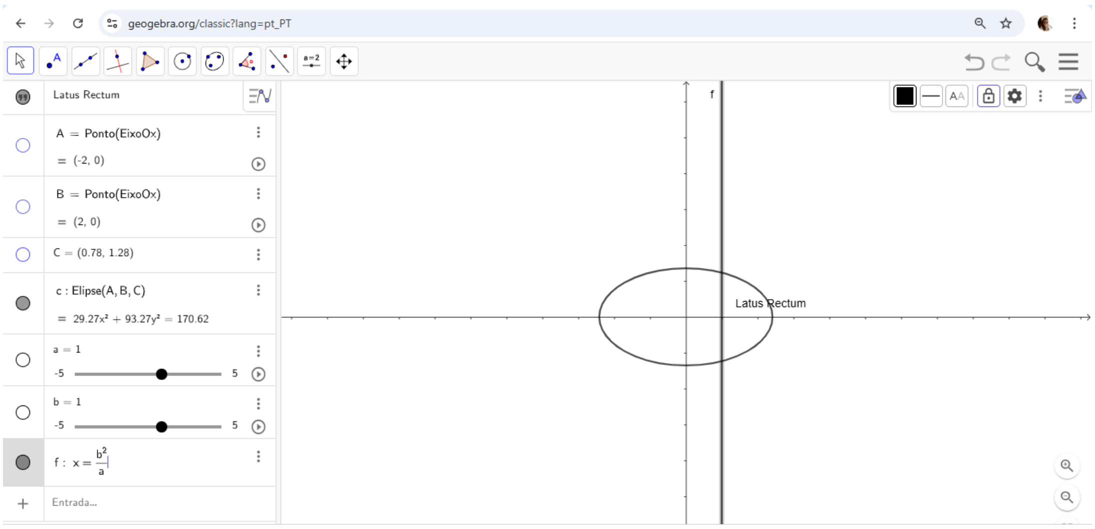
Figura 30 – Parábola e Latus rectum



Fonte: Autor

Para construir a Elipse a opção que possui Cônicas, com o mousse vai na opção Elipse, na janela gráfica, selecione dois pontos que serão os focos da Elipse um outro ponto pertencente à curva. E para construção do latus rectum, é só digitar a equação equivalente.

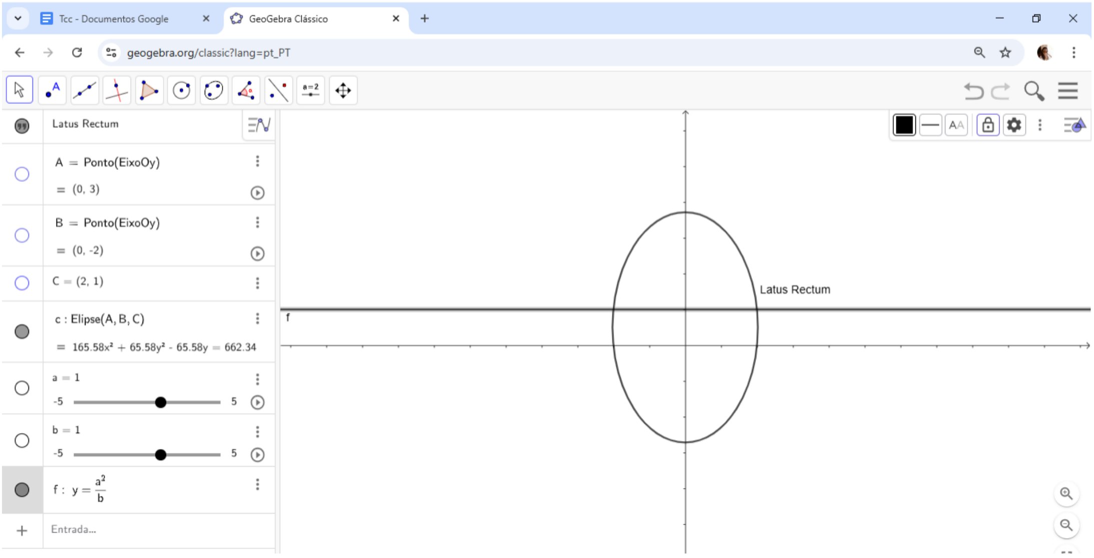
Figura 31 – Elipse e Latus Rectum



Fonte: Autor

Abaixo, está a Elipse construída da mesma forma que a anterior, sendo $a < b$.

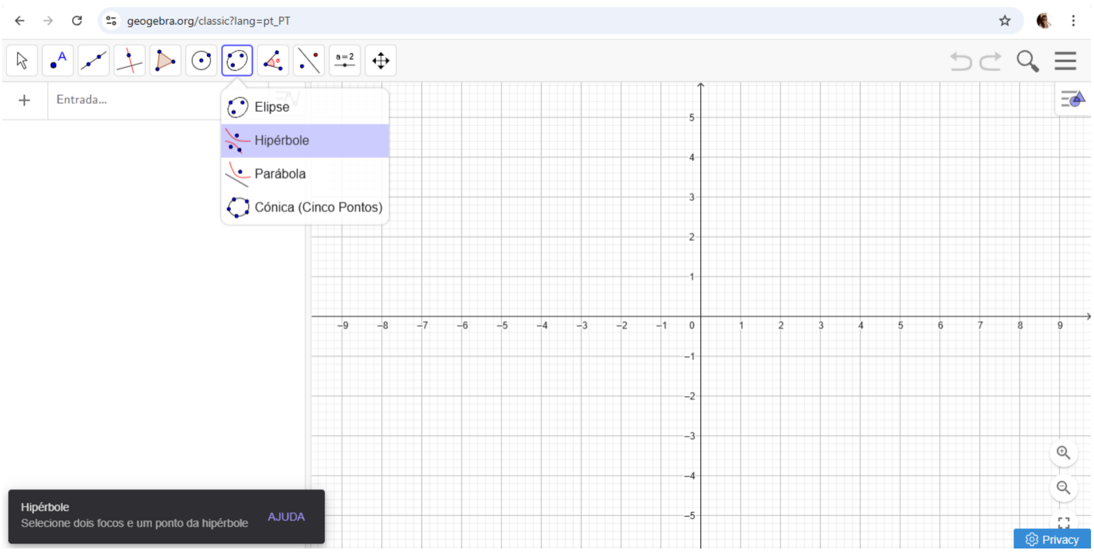
Figura 32 – Latus Rectum da Elipse



Fonte: Autor

Para a construção da Hipérbole, selecione a opção hipérbole e de forma análoga a Elipse, é feita a construção da representação gráfica, selecionando dois pontos de focos e um ponto pertencente à curva.

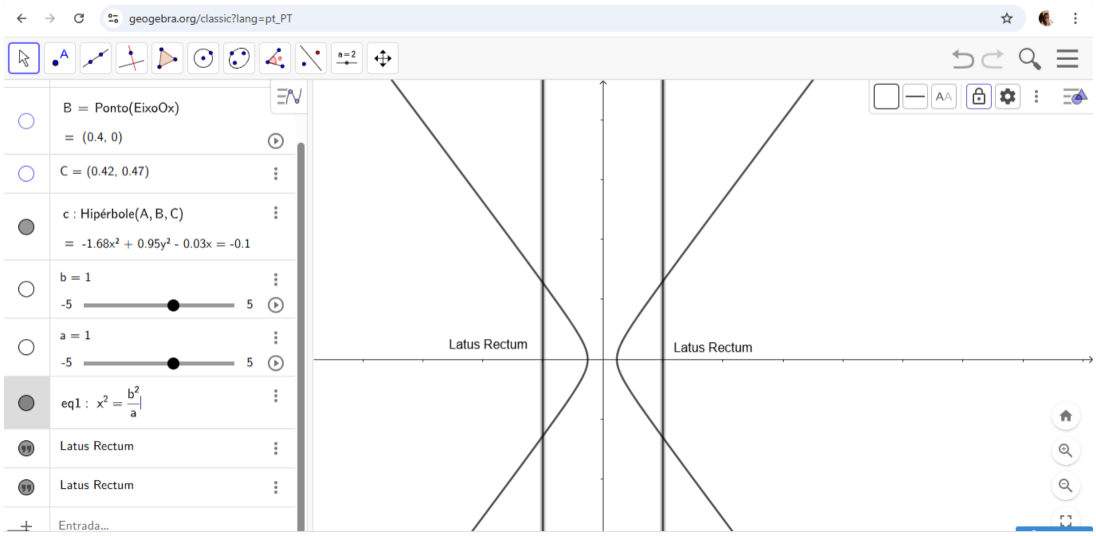
Figura 33 – Hipérbole no Geogebra



Fonte: Autor

Para construção gráfica do Latus Rectum da Hipérbole da equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, só digitar a equação.

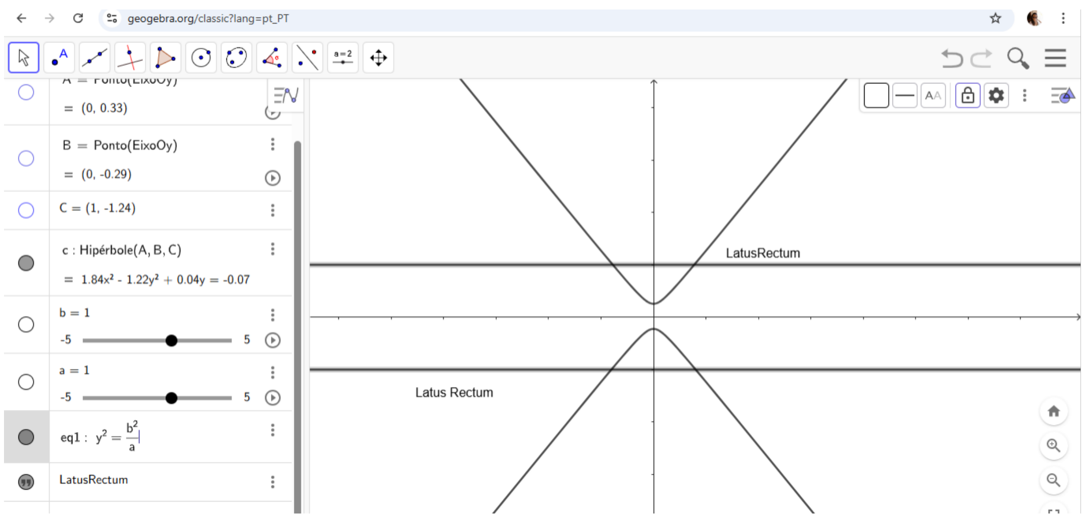
Figura 34 – Latus Rectum na Hipérbole



Fonte: Autor

Representação gráfica do Latus rectum na hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.

Figura 35 – Latus Rectum na Hipérbole



Fonte: Autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por tanto, os estudos de Apolônio atravessaram o tempo e se fizeram presentes em nossa vida. O estudo das Cônicas levou a resultados significativos em nosso cotidiano, mudando completamente o entendimento de algumas coisas. Uma delas, foi sobre os estudos de Johannes Kepler (1571-1630) que, inicialmente provou que a órbita do planeta Marte movimenta-se em uma elipse, posteriormente demonstrou para o resto dos planetas do sistema solar. Posteriormente Pierre Fermat (1601-1665), mostrou através de seus estudos, mostrou ques as seções cônicas de Apolônio, podemos ser escritos como equação de segundo grau nas coordenadas (x,y). O estudo das Cônicas não é considerado importante no ensino em geral. E o latus rectum, é um parâmetro que não é discutido em sala de aula pelos professores, provavelmente por não saber a importância de seus conceitos. Sua importância é fazer entender a geometria das cônicas, e entender as propriedades destas curvas, as órbitas dos corpos celestes e as aplicações de engenharia que utiliza essas formas . Podendo ser aplicado em várias áreas, na engenharia, por exemplo, para descrever a forma de lentes ou espelhos elípticos e parabólicos, que são utilizados em sistemas ópticos e de antenas. Na física e astronomia, pode ser utilizado no estudo de órbitas elípticas, como trajetória de planetas em torno do sol, o latus rectum, é uma medida importante para caracterizar a forma e o tamanho da elipse. Desta forma, é uma ferramenta importante para estudantes e professores que trabalham com matemática, física e engenharia. Para uma facilitação da compreensão do estudo das cônicas e principalmente do Latus rectum, foi utilizado o software Geogebra, como uma ferramenta de fácil manuseio e dinâmico Sendo utilizado como facilitador para compreensão do conteúdo matemático explorado neste trabalho, por conta de facilitar a visualização dos gráficos das curvas estudadas neste trabalho..

REFERÊNCIAS

BOULOS, P.; CAMARGO, I. D. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. [*S.l*]: Pearson/Prentice Hall, 2006.

BOYER, C. B. **História da matemática**. [*S.l*]: Edgard Blucher, 1996.

PULINO, P. **Geometria Analítica e Vetores**: Notas de aula. 2018. Disponível em: www.ime.unicamp.br/~pulino/GeometriaAnalitica/.

TECHSQUARE. **Ellipse: 4 (Pin & String Method)**. 2014. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Et3OdzEGX_w. Acesso em: 15 jun.2025.

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas**. 6. ed. Curitiba: Jacir J. Venturi, 1949.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2002.

WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. **Geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 1997.