



INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS  
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

JADSON URSULINO DOS SANTOS

**COMPARAÇÃO ENTRE DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DE  
RESISTÊNCIAS PARA VERIFICAÇÃO DE PILARES SUBMETIDOS À  
FLEXÃO COMPOSTA RETA UTILIZANDO OS DIAGRAMAS  
PARÁBOLA RETÂNGULO E O RETANGULAR SIMPLIFICADO**

Maceió

Novembro de 2022

INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS  
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

JADSON URSULINO DOS SANTOS

**COMPARAÇÃO ENTRE DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DE  
RESISTÊNCIAS PARA VERIFICAÇÃO DE PILARES SUBMETIDOS À  
FLEXÃO COMPOSTA RETA UTILIZANDO OS DIAGRAMAS  
PARÁBOLA RETÂNGULO E O RETANGULAR SIMPLIFICADO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado no Instituto Federal de Alagoas Maceió como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador (a): Prof. Dr. Vinicius Dantas

Maceió

Novembro de 2022



**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**  
**Instituto Federal de Alagoas**  
**Campus Maceió**  
**Biblioteca Benevides Monte**

---

S237c Santos, Jadson Ursulino dos.  
Comparação entre diagramas de interação de resistências para verificação de pilares submetidos à flexão composta reta utilizando os diagramas parábola retângulo e o retangular simplificado / Jadson Ursulino dos Santos.- Maceió, 2022.  
70 f. : il.

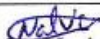
Orientação: Prof. Dr. Vinícius Dantas.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil)  
- Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió, Maceió, 2022.

Arquivo no formato digital em PDF do trabalho acadêmico.

1. Diagrama de interação. 2. Flexão composta Reta. 3. Diagramas Tensão e Deformação do Concreto. I. Título.

CDD: 693.5

---

  
Nalva Maria Amaral  
Bibliotecária – CRB-4/989


JADSON URSULINO DOS SANTOS

## COMPARAÇÃO ENTRE DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO DE RESISTÊNCIAS PARA VERIFICAÇÃO DE PILARES SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA RETA UTILIZANDO OS DIAGRAMAS PARÁBOLA RETÂNGULO E O RETANGULAR SIMPLIFICADO

Trabalho de conclusão de curso (TCC) apresentado à Banca do curso de bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Alagoas Campus /Maceió-IFAL


Maceió, Alagoas, 21 de novembro de 2022.

### BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente  
 VINICIUS DANTAS  
Data: 28/02/2023 15:38:09-0300  
Verifique em <https://verificador.itl.br>


---

**Prof. Dr. Vinicius Dantas (Orientador-IFAL)**

Documento assinado digitalmente  
 ALEXANDRE CUNHA MACHADO  
Data: 28/02/2023 15:43:40-0300  
Verifique em <https://verificador.itl.br>

---

**Prof. Me. Alexandre Cunha Machado (IFAL)**

Documento assinado digitalmente  
 EDJA LAURINDO DE LIMA  
Data: 27/02/2023 10:22:51-0300  
Verifique em <https://verificador.itl.br>

---

**Profª. Ma. Edja Laurindo de Lima (IFAL)**

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me dado fé, saúde e oportunidade de realizar os meus sonhos.

À minha mãe, Maria Leoneide, por todo apoio e por sempre me incentivando não desistir.

As minhas tias e avó, por me ajudar a superar todas as dificuldades encontradas neste caminho.

Agradeço imensamente o professor orientador Vinicius Dantas, pela confiança, pela disponibilidade e paciência durante a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores da instituição, que contribuíram para o meu conhecimento.

## RESUMO

No presente trabalho, versa sobre a comparação entre os diagramas de interação para pilares submetidos à flexão composta reta, utilizando os dois métodos de análise permitidos pela NBR 6118:2014, que são diagrama parábola-retângulo e o diagrama retangular simplificado. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo no Mathcad prime 7, para verificação de pilares retangular com armadura distribuída de forma simétrica ao longo das faces, já a confiabilidade do algoritmo foi testada pelo software TQS (versão 22.12) estudante, onde foram comparados os diagramas de interação. Para esse fim, utilizou o diagrama parábola retângulo é o que o TQS usa. Adotou-se uma seção constante com armadura simétrica, variou-se a classes de resistência do concreto de C20 à C50 MPa e o domínio de deformação entre os domínios 1, 3/4 (entre o fim do domínio 3 e o início do domínio 4) e 5. Em comparação com programa profissional mostra que os resultados são muito próximos. O mesmo estudo citado anteriormente foi utilizado para obter os resultados da comparação entre os diagramas de interação, já mencionado aqui no início do resumo, o que mudaram foram os momentos resistentes analisados nas duas direções, em torno do eixo x de maior inércia e do eixo y de menor inércia e variou-se os domínios de deformação entre 3, 4, 4a e 5. Os resultados mostraram que o diagrama retangular gera momento maior, comparado com os resultados obtidos com o uso do diagrama parábola-retângulo, as diferenças entre eles foram máximas 11,38% no início do domínio 5 para os dados estudado, o que justifica a permissão da utilização do diagrama retangular por várias normas.

**Palavras chave:** Diagrama de Interação. Flexão Composta Reta. Diagramas Tensão e Deformação do Concreto.

## ABSTRACT

In this paper, it is about the comparison between the interaction diagrams for columns subjected to straight composite bending, using the two methods of analysis allowed by NBR 6118:2014, which are parabola-rectangle diagram and simplified rectangular diagram. For this, an algorithm was developed in Mathcad prime 7, for verification of rectangular columns with reinforcement distributed symmetrically along the faces, already the reliability of the algorithm was tested by TQS software (version 22.12) student, where the interaction diagrams were compared. For this purpose, the rectangle parabola diagram was used, which is the one that TQS uses. A constant section with symmetric reinforcement was adopted, the concrete strength classes were varied from C20 to C50 MPa, and the deformation domain between domains 1, 3/4 (between the end of domain 3 and the beginning of domain 4) and 5. A comparison with the professional program shows that the results are very close. The same study cited above was used to obtain the results of the comparison between the interaction diagrams, already mentioned here at the beginning of the summary, what changed were the resistant moments analyzed in the two directions, around the x-axis of greater inertia and the y-axis of less inertia and the deformation domains were varied between domains 3, 4, 4a and 5. The results showed that the rectangular diagram generates greater moment, compared to the results obtained using the parabola-rectangle diagram, the differences between them were maximum 11.38% at the beginning of domain 5 for the data studied, which justifies the permission of the use of the rectangular diagram by several standards.

**Keywords:** Interaction Diagram. Straight Compound Flexion. Concrete Stress and Deformation Diagrams.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: DIAGRAMA DE INTERAÇÃO	16
FIGURA 1.2: ÁBACO DE FLEXÃO COMPOSTA RETA	19
FIGURA 2.1: DISTRIBUIÇÃO RETANGULAR DE TENSÃO	20
FIGURA 2.2: DIAGRAMA PARÁBOLA - RETÂNGULO PARA CONCRETO À COMPRESSÃO	22
FIGURA 2.3: DIAGRAMA RETANGULAR SIMPLIFICADO PARA CONCRETO À COMPRESSÃO	24
FIGURA 2.4: DIAGRAMAS PARÁBOLA - RETÂNGULO E DIAGRAMAS RETANGULARES SIMPLIFICADO	25
FIGURA 2.5: DIAGRAMA TENSÃO - DEFORMAÇÃO PARA AÇOS	26
FIGURA 2.6: ARRANJOS ESTRUTURAIS DOS PILARES DE EDIFÍCIOS	27
FIGURA 2.7: FLEXÃO COMPOSTA RETA	28
FIGURA 3.1: DOMÍNIOS DE ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL	29
FIGURA 3.2: GRÁFICO DAS FUNÇÕES PERIÓDICAS DO PARÂMETRO $D$ NA SEÇÃO CONSIDERADA	31
FIGURA 3.3: SEÇÃO TRANSVERSAL COM ARMADURA DUPLAMENTE SIMÉTRICA (A); VARIÁVEIS $4_A$ (B)	32
FIGURA 3.4: VETORES NA ORDEM CRESCENTE	33
FIGURA 3.5: DEFORMAÇÕES NAS FIBRAS	34
FIGURA 3.6: INTEGRAÇÃO DAS TENSÕES NO CONCRETO	35
FIGURA 3.7: RESULTANTE DAS TENSÕES NO CONCRETO	36
FIGURA 3.8: INTEGRAÇÃO DAS TENSÕES NA ARMAÇÃO	37
FIGURA 3.9: FLUXOGRAMA PARA O CÁLCULO DO DIAGRAMA DE INTERAÇÃO	40
FIGURA 3.10: SENTIDO DOS MOMENTOS FLETORES	41
FIGURA 3.11: ENTRADA DE DADOS- GEOMETRIA, MATERIAIS E ESFORÇO SOLICITANTES	42
FIGURA 3.12: ENTRADA DE DADOS – ARMAÇÃO	43
<i>FIGURA 3.13: DIAGRAMA DE INTERAÇÃO</i>	43
FIGURA 3.14: MOMENTO EM TORNO DE X	44
FIGURA 3.15: MOMENTO EM TORNO DE Y	44
FIGURA 4.1: SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR PARA ESTUDO DE CASO	45
FIGURA 4.2: SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR DO PILAR NAS DUAS DIREÇÕES	46
FIGURA 4.3: COMPARAÇÃO DA CURVA GERADA PELO DIAGRAMA PARÁBOLA-RETÂNGULO E A CURVA GERADA PELO DIAGRAMA RETANGULAR	47
FIGURA 4.4: DETALHE MOSTRANDO AS DIFERENÇAS ENTRE AS CURVAS DA FIGURA 4.3	47
FIGURA 4.5: COMPARAÇÃO ENTRE OS DIAGRAMAS DE TENSÃO DO CONCRETO	48
FIGURA 4.6 : COMPARAÇÃO DA CURVA GERADA PELO DIAGRAMA PARÁBOLA-RETÂNGULO E A CURVA GERADA PELO DIAGRAMA RETANGULAR	49
FIGURA 4.7: DETALHE MOSTRANDO AS DIFERENÇAS ENTRE AS CURVAS DA FIGURA 4.6	49
FIGURA 4.8: REPRESENTAÇÃO TRIDIMENSIONAL E CORTE ESQUEMÁTICO DA ESTRUTURA	51
FIGURA 4.9: PLANTA DE FORMA ESTRUTURAL	52
FIGURA 4.10: DETALHAMENTO DO PILAR P7	53

FIGURA 4.11: DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA CONCRETO COM $f_{ck}=20$ MPa	53
FIGURA 4.12: DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA CONCRETO COM $f_{ck}=30$ MPa	54
FIGURA 4.13: DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA CONCRETO COM $f_{ck} =40$ MPa	54
FIGURA 4.14: DIAGRAMA DE INTERAÇÃO PARA CONCRETO COM $f_{ck}= 50$ MPa	55
FIGURA 4.15: SEÇÃO DO PILAR P7	56
FIGURA 4.16: ESFORÇOS NORMAIS E MOMENTOS FLETORES SOLICITANTES	57
FIGURA 4.17: DIAGRAMA DE INTERAÇÃO ESFORÇO NORMAL - MOMENTO FLETOR	57

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3:1: CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS DOMÍNIOS DO ELU E D	31
TABELA 4:1: COMPARAÇÃO ENTRE OS MOMENTOS RESISTENTES DA SEÇÃO	50
TABELA 4:2: COMPARAÇÃO ENTRE OS DIAGRAMAS INTERAÇÃO GERADOS PELO TQS E MATHCAD	55

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras gregas:

$\varepsilon_{c2}$	Deformação de encurtamento do concreto no início do patamar plástico
$\varepsilon_{cu}$	Deformação de encurtamento do concreto na ruptura
$\varepsilon_c$	Deformação específica do concreto
$\sigma_c$	Tensão no concreto
$\gamma_c$	Coefficiente de minoração do concreto
$\lambda$	Coefficiente de redução da linha neutra
$\sigma_s$	Tensão no aço
$\varepsilon_s$	Deformação específica do aço
$\varepsilon_{yd}$	Deformação específica de cálculo do início do patamar de escoamento do aço
$\gamma_s$	Coefficiente de minoração do aço
$\varepsilon_s(D)$	Deformação extrema da fibra superior
$\varepsilon_i(D)$	Deformação extrema da fibra inferior

### Letras minúsculas:

$f_{ck}$	Resistência característica do concreto
$f_{cd}$	Resistência de projeto do concreto
$f_{yk}$	Resistência característico do aço
$f_{cd}$	Resistência de cálculo do aço
$y$	Altura da linha neutra reduzida
$y_i$	Distância da fibra extrema tracionada ao centro de gravidade da peça
$y_s$	Distância da fibra extrema comprimida ao centro de gravidade da peça
$y_{mín}$	Distância da armadura inferior ao centro de gravidade da peça
$h$	Altura da seção transversal
$b$	Base da seção transversal
$x$	Linha neutra
$d$	Altura útil

cob            cobrimento

Letras maiúsculas:

$S_d$             Esforços solicitantes de cálculo

$R_d$             Esforços resistente de cálculo

$R_{cc}$            Força resultante normal de compressão no concreto

Z               Braço de alavanca referente a linha neutra

DPR            Diagrama parábola-retângulo

DR             Diagrama retângulo

ELU            Estado limite último

$E_s$             Modulo de elasticidade do aço

$A_{si}$           Área de aço na i-ésima camada

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
1.1	Delimitações do Trabalho	17
1.2	Objetivos	17
1.2.1	Objetivo Geral	17
1.2.2	Objetivos Específicos	18
1.3	Justificativa	18
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>20</b>
2.1	Hipóteses Básicas de Dimensionamento	21
2.2	Diagramas de Tensão-Deformação	22
2.2.1	Diagrama de Tensão-Deformação do Concreto	22
2.2.2	Diagrama de Tensão-Deformação para aços de armaduras passivas	25
2.3	Classificação dos Pilares Quanto à Situação de Projeto	26
2.4	Flexão Composta Reta	28
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>29</b>
3.1	Desenvolvimento do algoritmo	29
3.2	Domínios de deformação	29
3.3	Parâmetro de deformação adimensional D	30
3.4	Roteiro para traçado do diagrama de interação	33
3.4.1	Cálculo das deformações	33
3.4.2	Cálculo dos esforços resultante das tensões no concreto	34
3.4.3	Cálculo dos esforços resultante das tensões na armação	36
3.4.4	Equações de equilíbrio	38
3.4.5	Estrutura do algoritmo	38
3.5	Convenções	41
3.6	Interface do programa	41
3.6.1	Geometria	41
3.6.2	Materiais	42
3.6.3	Esforços solicitantes	42
3.6.4	Armação	42
3.7	Saida de resultados	43
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>45</b>

<b>4.1</b>	<b>Análise comparativa entre os diagramas de interação de esforços resistentes.....</b>	<b>46</b>
4.1.1	Comparação entre os diagramas de interação na direção de maior inércia	46
4.1.2	Comparação entre os diagramas de interação na direção de menor inércia	48
<b>4.2</b>	<b>Validação do programa .....</b>	<b>51</b>
4.2.1	Exemplo numérico.....	52
4.2.2	Diagrama interação: Flexão composta reta .....	52
4.2.3	Exemplo de verificação da capacidade resistente da seção para os esforços solicitantes .....	56
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>58</b>
<b>5.1</b>	<b>Conclusões.....</b>	<b>58</b>
<b>5.2</b>	<b>Recomendações para futuros trabalhos.....</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>60</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>62</b>
	<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>68</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os pilares são elementos estruturais lineares de eixo reto, geralmente verticais e predominantemente comprimido, cuja principal função é resistir às solicitações provenientes das ações verticais na estrutura e conduzi-las até as fundações. O dimensionamento de pilares é uma das tarefas de maior complexidade dentro do projeto estrutural, isto se deve as fórmulas teóricas relativamente complexa, tais como análise não-linear de estruturas, estabilidade global.

As lajes recebem as cargas permanentes oriundos (peso próprio, revestimentos, etc.) e as variáveis (pessoas, maquinas, equipamentos, etc.) e as transmitem para as vigas e, por sua vez, as vigas transfere o peso próprio, cargas concentradas e cargas de parede para os pilares em que estão apoiadas e também os esforços devido à ação horizontal do vento e outras ações que não são fáceis de determinar. Dessa forma fica imprescindível que o projetista verifique a segurança do pilar e entenda o funcionamento do mesmo.

Para verificar a segurança da estrutura, NBR 6118:2014 define que o dimensionamento ou verificação deve ser feito de maneira que a segurança seja garantida pela seguinte expressão:

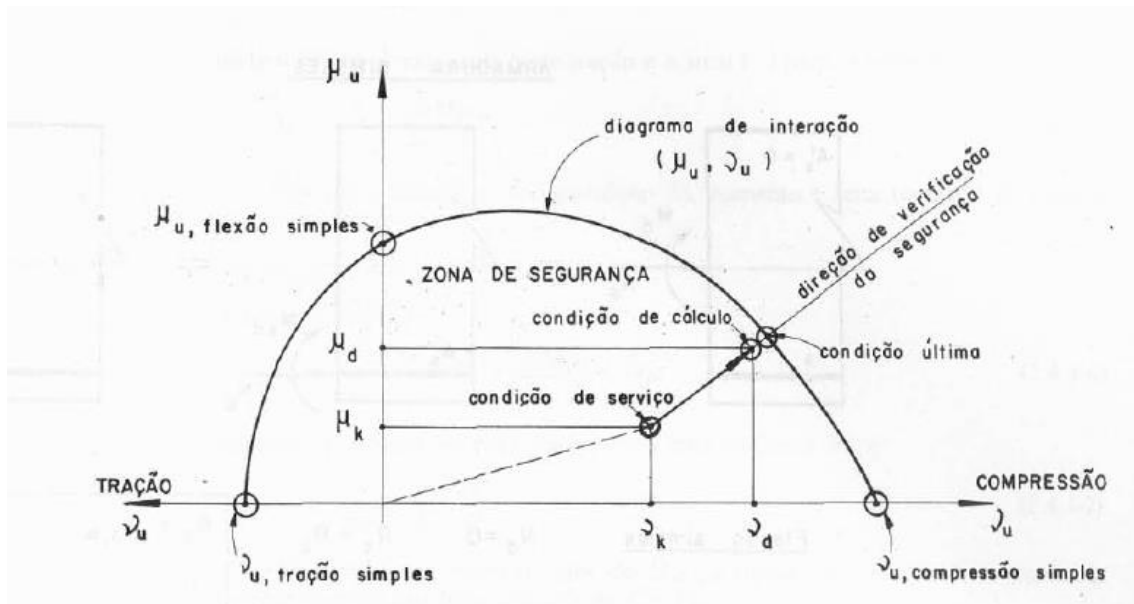
$$S_d \leq R_d \quad (1.1)$$

Onde as solicitações de cálculo ( $S_d$ ) devem ser inferiores às resistências de cálculo ( $R_d$ ).

Uma forma de verificar a segurança de pilares sujeitos à flexão composta reta é utilizando o diagrama de interação, conhecidos as solicitações ( $S_d$ ), a seção transversal, os materiais e armadura, A resistência total da seção transversal fica definido pela contribuição dos esforços resistente das armaduras somadas com os esforços resistente da seção de concreto comprimida.

O diagrama de interação é o lugar geométrico dos pares de esforços (M-N) que definem os valores de resistência, no estado limite-último da seção transversal de um elemento submetido à flexão composta. Se uns pares de esforços solicitante (M-N), cair dentro do diagrama, a segurança estará garantida, dessa forma, os esforços solicitantes são menores aos esforços resistentes. Caso contrário, a segurança não estará garantida, ou seja, caiu fora do diagrama.

Figura 1.1: Diagrama de interação



Fonte: Fusco (1981, p. 55)

O diagrama de interação proporciona a verificação da resistência da seção transversal do pilar na qual ele poderá suportar, possibilitando testar várias situações de projeto em tempo reduzido para fazer um pré-dimensionamento e a escolha mais adequada, econômico e segura.

Conforme a norma NBR 6118:2014, para análises no estado limite último pode ser aplicado para o concreto submetido a compressão um diagrama de tensão-deformação de duas formas: A primeira através da utilização do diagrama parábola-retângulo e a segunda é através do diagrama retangular simplificado.

Dessa forma, o objetivo desse estudo é comparar os diagramas de interação para pilares submetidos à flexão composta reta, utilizando os dois métodos de análises citados anteriormente, para esse fim, foi implementado um algoritmo no software Mathcad Prime 7 e validado os valores no programa comercial TQS. A estrutura desenvolvida está baseada na metodologia encontradas nos trabalhos de mestrado, MARLON (2005), FERREIRA (2017) e no livro curso de concreto armado vol. 3 ARAÚJO (2010).

Para essa comparação analisaram-se os momentos em torno do eixo x maior inércia e y menor inércia, para pilar sob flexo-compressão reta, variou-se a resistência do concreto de C20 a C50 e domínio de deformação entre os domínios 3, 4, 4a e 5, de modo a analisar em quais destas situações o uso do diagrama parábola retângulo e o retangular simplificado pode resultar no dimensionamento econômico ou contra a segurança.

## **1.1 Delimitações do Trabalho**

O trabalho delimita-se a analisar pilares:

- a) Submetido à flexão composta reta;
- b) Seção retangular constante;
- c) Armadura duplamente simétrica;
- d) Grupo I de resistência do concreto, que corresponde ao concreto 20 até 50 MPa de acordo com NBR 6118: 2014.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo Geral**

Comparar os diagramas de interação de resistência geradas para seções retangulares de concreto armado solicitada à flexão composta reta a partir das duas formas de análise permitidas pela NBR 6118:2014: a primeira utilizando o diagrama

tensão-deformação parábola-retângulo do concreto (DPR) e a segunda utilizando o diagrama retangular simplificado de tensão do concreto (DR).

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Implementar um algoritmo no software Mathcad Prime 7 para auxiliar os estudos, comparações e pré-dimensionamento de pilares.
- Verificar a capacidade resistente da seção de concreto armado de pilares submetidos à flexo-compressão reta.
- Comparar o algoritmo implementado no software Mathcad Prime 7 com o programa comercial TQS.

## 1.3 Justificativa

Pilares são elementos estruturais, geralmente verticais, submetidos às ações solicitantes de cargas de lajes, vigas, revestimentos, sobrecargas, ventos, etc., por isso, que fica tão complexo o seu dimensionamento (ARAÚJO, 2010).

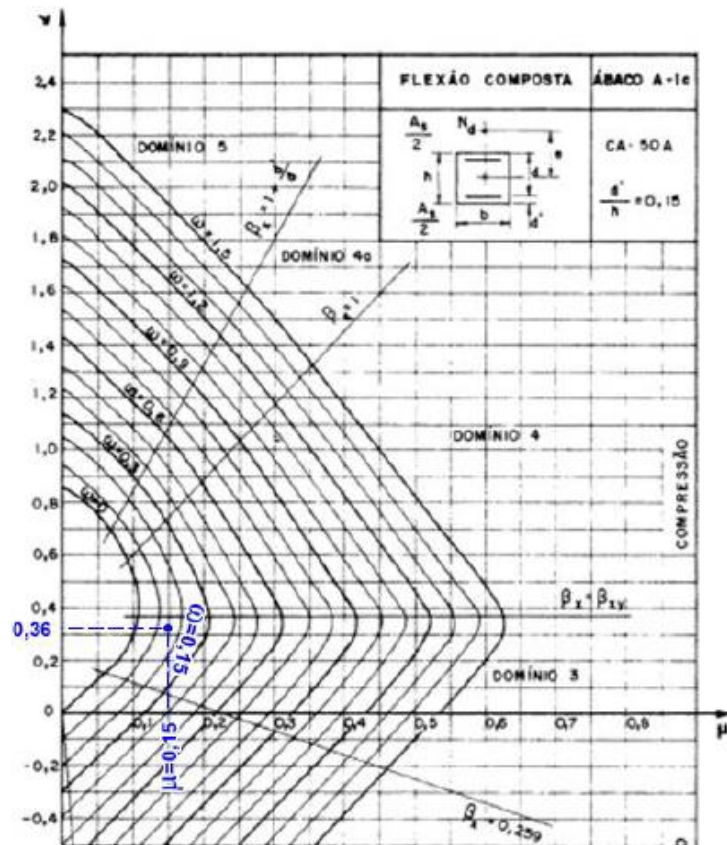
Diante disso, considera-se indispensável verificar pilares, não só devido à segurança estrutural, mas para garantir economia de materiais, possível com modificação no detalhamento da seção do pilar (ARAÚJO, 2010).

Nos problemas de verificação, o melhor caminho a ser seguido é o do emprego de diagrama de interação (FUSCO, 1981).

Existe na literatura diversos ábacos de interação de diferentes autores para dimensionamento, mas os mais utilizados são dos professores Montoya e Venturini, entretanto, o único erro que pode ser cometido é o decorrente da leitura efetuada no diagrama, o que acaba por escolher uma taxa mecânica maior, ou seja, o pilar fica com armadura maior do que o necessário, não fornecendo um resultado exato (ARAÚJO, 2010).

A desvantagem também de utilizar o ábaco que eles são limitados, não tem todos os tipos arranjos de armaduras e tamanho de cobrimentos que você queira e, por isso, não abrangem todos os casos de interesse prático.

Figura 1.2: Ábaco de flexão composta reta



Fonte: Kimura 2010 (p. 95)

Desenvolver um algoritmo de verificação de pilares submetido à flexão composta reta é de fundamental importância, pois, possibilita escolher vários tipos de arranjos de armaduras e tamanho de cobrimento, e por dá resultados precisos e rápidos para pré-dimensionamento correto de pilares e a verificação da segurança do mesmo.

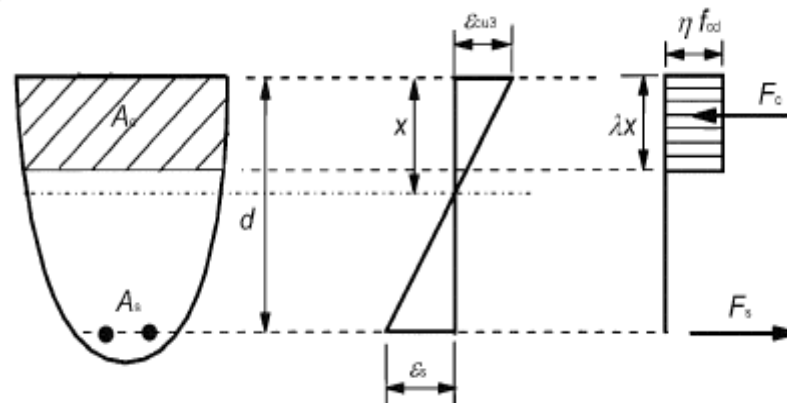
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Abaixo são comentados e resumidos alguns artigos, normas, livros e trabalhos acadêmicos importantes que serviram de insumo para a produção do presente trabalho.

A NBR 6118:2014 afirmar, que tensões no concreto é feita de acordo com diagrama parábola-retângulo, mas pode ser substituído pelo diagrama retangular, sem necessidade de adicionar coeficiente de correção.

A norma europeia utiliza o diagrama retangular de tensões no concreto como, por exemplo, EUROCODE 2 EM 1992-1-1/2004 (dimensionamento de estrutura de concreto) no item 3.1.7, permite utilizar a distribuição retangular de tensões no concreto, como mostra a figura 2.1.

Figura 2.1: Distribuição Retangular de tensão



Fonte: EN 1992-1-1:2004 (p. 36)

Segundo FUSCO (1981) mostra que resultados obtidos nos domínios 2, 3, 4 e 4a são praticamente iguais, utilizando o diagrama parábola retângulo ou diagrama retangular de tensões para problema de flexão composta.

FONSECA (2018) em seu trabalho, comparou o diagrama parábola- retângulo com o digrama retangular de tensões no concreto, para pilares sujeito a flexo-compressão oblíqua. No estudo variou-se a classe de resistência do concreto de

C20 a C90 MPa e o domínio de deformação da peça entre os domínios 4, 4a e 5, observou-se que uso do diagrama retangular só se justifica quando a peça tiver trabalhando até o domínio 4. Acima desse domínio mostrou que o uso desse diagrama apresenta esforço resistente menores do que os calculados com digrama parábola-retângulo. Além disso, percebeu-se que, para concreto com classe de resistência maior que C50, em direções oblíquas de solicitação, uso do diagrama retangular apresentou maior esforço resistente do que os calculados utilizando o diagrama parábola-retângulo.

MAZETTO (2017) em sua dissertação de mestrado, comparou os resultados obtidos entre o diagrama parábola-retângulo e o diagrama retangular simplificado para concreto de alto desempenho. Para comparação foram adotadas 4 seções, e também foram analisado os momentos resistentes nas duas direções de maior inércia e menor inércia, e foram variando-se a bitola adotada em 10 mm, 12,5 mm, 16 mm e 20 mm. Em todos os casos estudados o diagrama parábola-retângulo apresentou momentos de resistentes menores. Em relação à direção de maior inércia a diferença foram menores. Enquanto, menor inércia, as diferenças foram maiores, em termos percentuais.

CARDOSO JÚNIOR (2014) desenvolveu um aplicativo que resolve numericamente problemas de flexão composta reta e oblíqua, o aplicativo faz a verificação da capacidade resistente da seção através de diagrama de interação. O autor utilizou no cálculo o diagrama parábola-retângulo para concreto à compressão, o mesmo comparou os resultados obtidos com os softwares CAD/TQS (TQS, 2014), Oblíqua (CESEC, 2014) e FCO (França, 1984), obteve resultados satisfatórios, ou seja, valores muito semelhantes.

## **2.1 Hipóteses Básicas de Dimensionamento**

Para a construção da curva de interação esforço normal- momento fletor foram adotadas as seguintes hipóteses básicas:

- As seções transversais se mantêm planas após a deformação até a ruptura, isto é, ocorre a distribuição linear das deformações na seção;

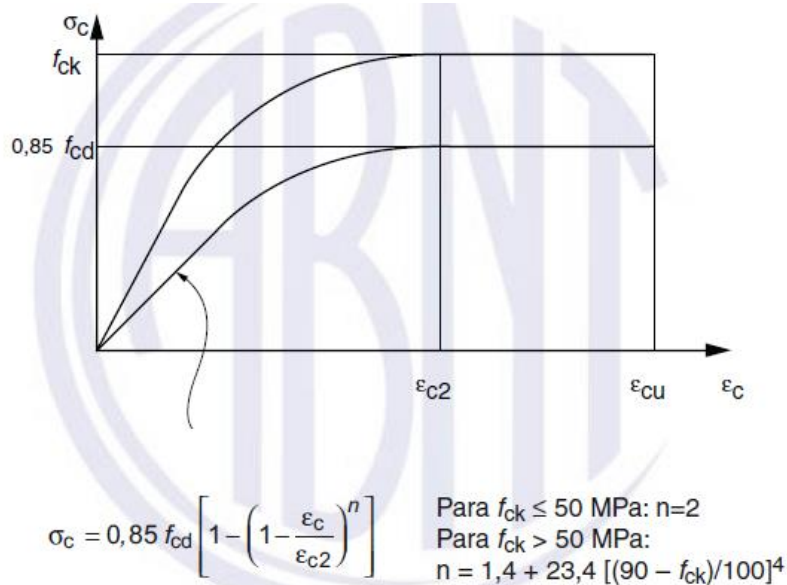
- A variação da deformação nas barras de aço atração ou compressão é a mesma do concreto a elas adjacentes;
- As resistências do concreto à tração devem ser desprezadas no ELU.

## 2.2 Diagramas de Tensão-Deformação

### 2.2.1 Diagrama de Tensão-Deformação do Concreto

Segundo a norma ABNT NBR 6118: 2014, para análises no estado limite último, emprega-se o diagrama tensão-deformação idealizado como mostra na Figura 2.2.

Figura 2.2: Diagrama parábola - retângulo para concreto à compressão



Fonte: ABNT NBR 6118: 2014 (p. 26)

O diagrama parábola-retângulo é composto de uma parábola do 2º grau, com tensão de pico no vértice da fibra correspondente à deformação de compressão de  $\epsilon_{c2}$  e um trecho reto entre as deformações  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$ . Este diagrama é descrito pelas seguintes relações:

$$\sigma_c = \begin{cases} 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right], & \text{se } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ 0,85 f_{cd}, & \text{se } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (2.1)$$

- Para concretos de classes até C50:

$\varepsilon_{c2} = 2,0\%$ , deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;

$\varepsilon_{cu} = 3,5\%$ , deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;

$n = 2$  índices

- Para concreto de classes C50 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\% + 0,085\% (f_{ck} - 50)^{0,53}; \quad (2.2)$$

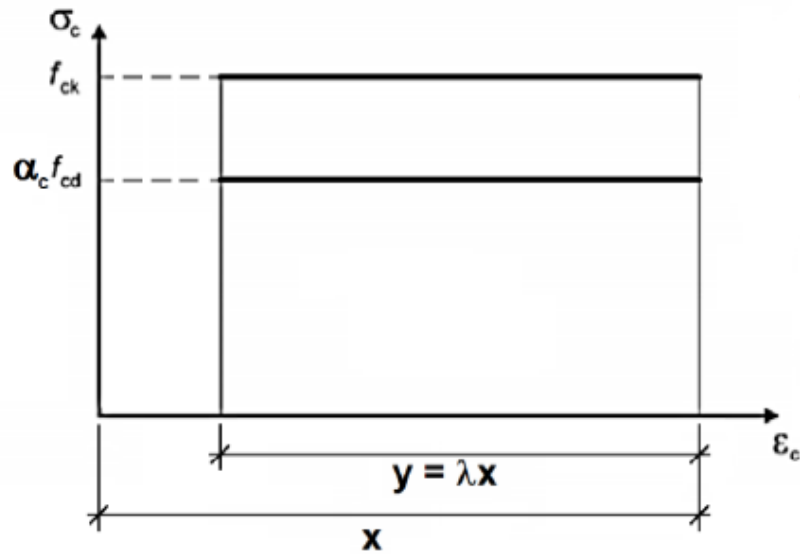
$$\varepsilon_{cu} = 2,6\% + 35\% [(90 - f_{ck})/100]^4; \quad (2.3)$$

$$n = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck})/100]^4; \quad (2.4)$$

- Onde,  $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$  é o valor de cálculo da resistência à compressão,  $f_{ck}$  é o valor característico da resistência a compressão, e  $\gamma_c$  é o coeficiente de ponderação da resistência que, para combinações normais assume o valor de 1,40. O valor 0,85 corresponde a redução da resistência sobre carga de longa duração, efeito Rush.

Como simplificação pode ser adotado, para representar o diagrama tensão deformação do concreto, por um diagrama retangular de profundidade  $y = \lambda \cdot x$ , mostrado na Figura 2.3, o qual corresponde a uma adaptação do item 17.2.2 da ABNT NBR 6118.

Figura 2.3: Diagrama retangular simplificado para concreto à compressão



Fonte: Cardoso Júnior (2014, p. 6)

Sendo:

$$\lambda = 0,8 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (2.5)$$

$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 \text{ para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \quad (2.6)$$

Quando se utiliza o diagrama retangular simplificado, a tensão atuante pode ser admitida constante até a profundidade  $y$  e tomada igual a:

$$\sigma_c = \alpha_c \cdot f_{cd} \quad (2.7)$$

É válida a equação (2.7) apenas quando a largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida. Caso contrário, deve-se multiplicar esse valor por 0,9:

$$\sigma_c = 0,9 \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \quad (2.8)$$

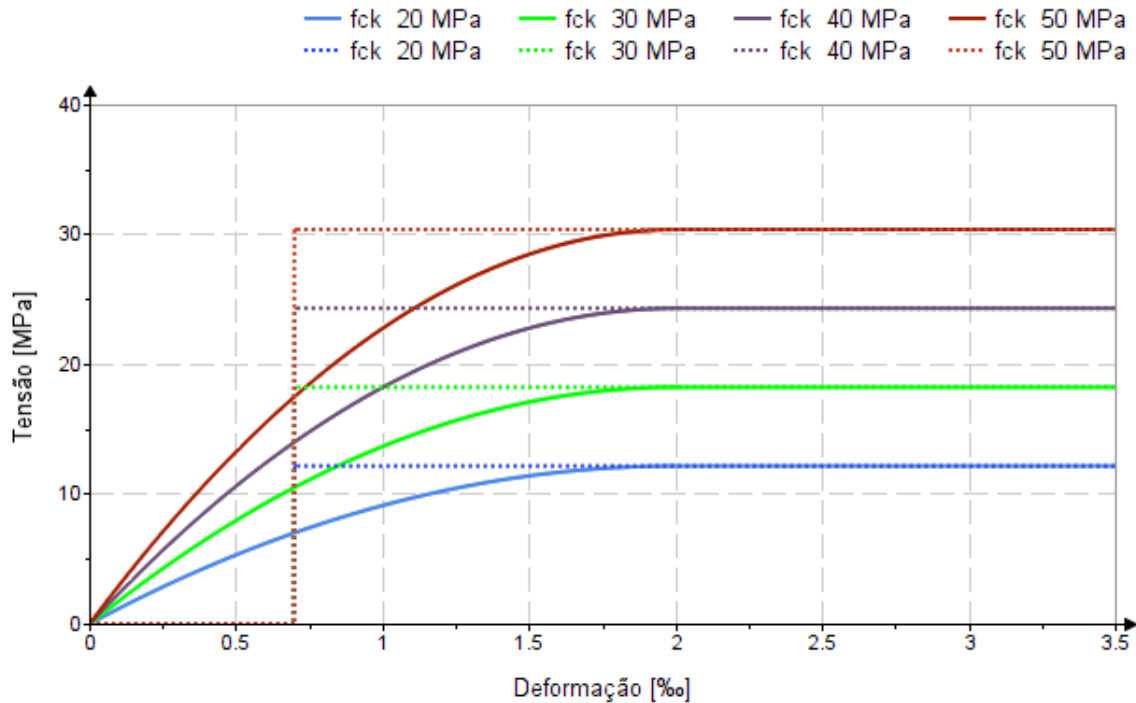
Em que:

$$\alpha_c = \begin{cases} 0,85, & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,85 [1,0 - (f_{ck} - 50)/200] & \text{para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.9)$$

Vale ressaltar que neste trabalho, foi adotado resistência para concreto de classes até 50 MPa.

Um resumo dos diagramas de tensão deformação de cálculo do concreto de classes até 50 Mpa pode ser visto na Figura 2.4, observa-se na Figura 2.4 que a tensão máxima aumenta à medida que o  $f_{ck}$  também aumenta. Em relação a redução da extensão relativa do diagrama retangular  $\sigma_c = 0,85 * f_{cd}$  ( $0,7‰ \leq \epsilon_c \leq 3,5‰$ ), tensão permanece constante.

Figura 2.4: Diagramas parábola - retângulo e Diagramas retangulares simplificado

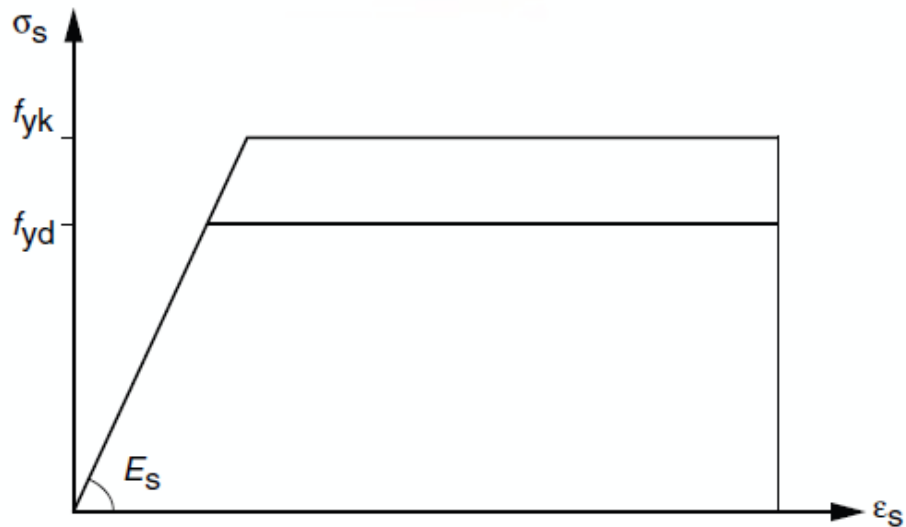


Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.2.2 Diagrama de Tensão-Deformação para aços de armaduras passivas

Segundo a ABNT NBR 6118: 2014, item 8.3.6, para o cálculo nos estados limite de serviço e último, pode-se utilizar o diagrama simplificado mostrado na Figura 2.5, para os aços com ou sem patamar de escoamento, no trecho inclinado é válida a Lei de Hook e o limite de escoamento é fixo em 10‰. Este diagrama pode ser representado pela equação 2.10.

Figura 2.5: Diagrama tensão - deformação para aços



Fonte: ABNT NBR 6118: 2014 (p. 29)

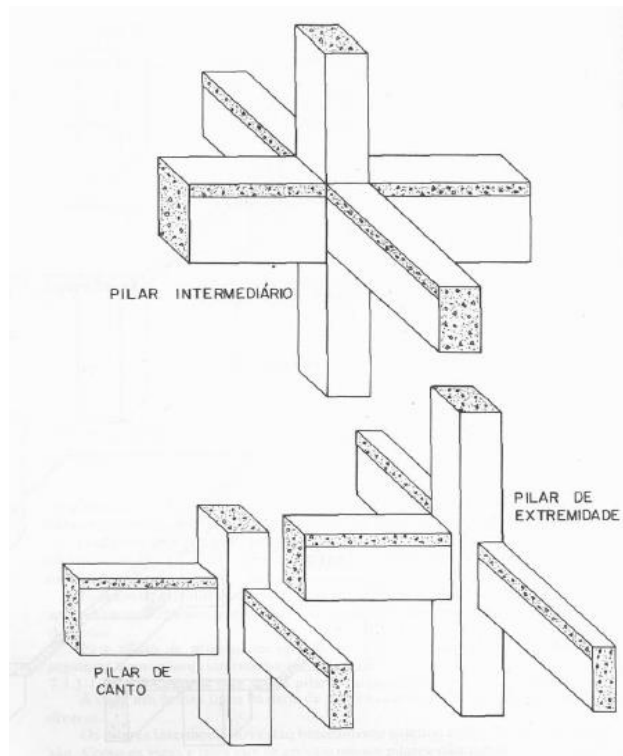
$$\sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s \leq f_{yd} \quad (2.10)$$

Onde  $f_{yd}$  é a resistência de escoamento de cálculo do aço, ela é obtida pela divisão da resistência de escoamento característica do aço  $f_{yk}$  pelo coeficiente de minoração da resistência do aço,  $\gamma_s = 1,15$ . O valor da deformação específica de cálculo  $\epsilon_{yd}$  é definida pela Lei de Hooke, onde o Modulo de Elasticidade  $E_s$  é igual a 210GPa (ABNT NBR 6118:2014, item 8.3.5).

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (2.11)$$

### 2.3 Classificação dos Pilares Quanto à Situação de Projeto

Segundo ARAÚJO (2010) e FUSCO (1981) os pilares podem ser classificados como pilares intermediário (central), pilares de extremidade (lateral) e pilares de canto. Figura 2.6 mostra essa classificação.



Fonte: Fusco (1981, p. 238)

Os pilares intermediários estão basicamente sujeitos a cargas axiais de compressão. Como as vigas e lajes que se apoiam nesses pilares não sofrem descontinuidade total sobre os mesmos, logo podemos desprezar as excentricidades dos esforços no pilar (FUSCO, 1981). Esses pilares estão solicitados por compressão centrada.

Os pilares de extremidade correspondem a apoios de extremidade para as vigas, nesse caso não, a uma continuidade da viga sobre o pilar (ARAÚJO, 2010). Esses pilares são solicitados por flexão composta reta, por não ter continuidade da viga, ou seja, na hora de calcular é considerado no cálculo inicialmente uma excentricidade na direção  $x$  ou  $y$  do pilar.

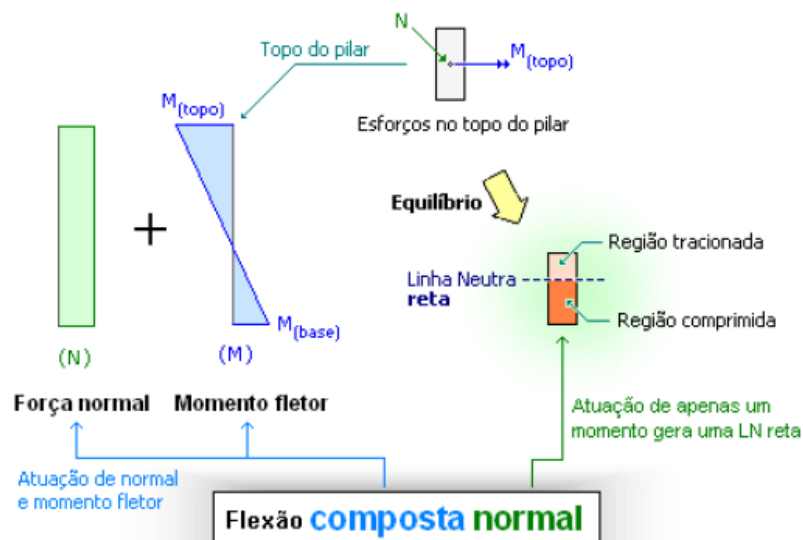
No caso dos pilares de canto, em virtude da não continuidade das vigas que chegam nas duas bordas do pilar, existe basicamente uma situação de projeto de

flexão composta oblíqua (FUSCO, 1981). Portanto, deve-se considerar duas excentricidades na direção principais  $x$  e  $y$ .

## 2.4 Flexão Composta Reta

De acordo com FUSCO (1981), flexão composta é a flexão acompanhada de força normal, tendo na seção transversal uma fibra comprimida e outra fibra tracionada, se o plano de atuação do momento fletor coincide com um dos eixos de simetria da seção, tem-se a flexo-compressão reta. Logo a linha neutra é perpendicular a este eixo.

Figura 2.7: Flexão composta reta



Fonte: Kimura (2010, p. 45)

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Desenvolvimento do algoritmo

Utilizou-se o software Mathcad prime 7, para a implementação do algoritmo. O mathcad prime 7 é um software matemático voltado para área de engenharia, ele permite uma linguagem de programação de alto nível, permitindo aos usuários implementar os seus próprios algoritmos, o mesmo foi utilizado para comparar as diferenças de resistências, utilizando diagrama parábola-retângulo e diagrama retangular simplificado.

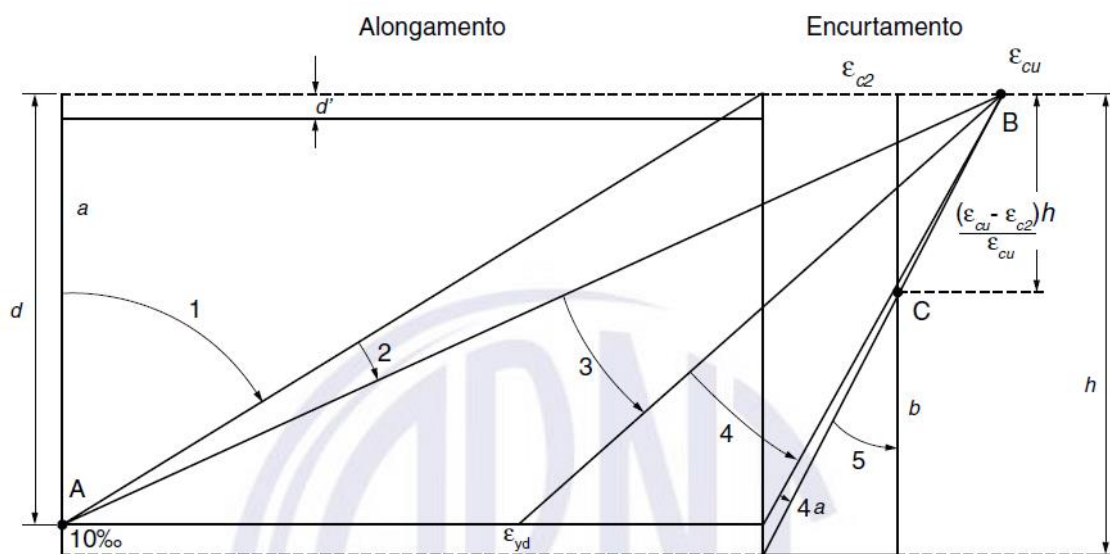
Nesse trabalho, o programa foi de fundamental importância para obtenção de resultados, sem ele não seria possível obter resultados preciso e rápidos.

As metodologias empregadas nesse trabalho se encontram nos trabalhos de mestrados, MARLON (2005), FERREIRA (2017) e no livro curso de concreto armado Vol. 3, JOSÉ MILTON.

#### 3.2 Domínios de deformação

Como a NBR 6118:2014, limita a deformação do aço e do concreto, a Figura 3.1 mostra todas as posições possível do diagrama de deformações ao longo da seção transversal da peça de concreto armado, até esgotamento da capacidade resistente da seção, as quais passam necessariamente por um dos três pontos, A, B e C.

Figura 3.1: Domínios de estado limite último de uma seção transversal



Fonte: ABNT NBR 6118: 2014 (p. 122)

O ponto A corresponde a uma deformação de alongamento do aço de  $\varepsilon_s=10\text{‰}$ , que define o estado limite por deformação plástica excessiva, ou seja, alongamento máximo do aço.

O ponto B do diagrama domínios de deformação do concreto, corresponde ao encurtamento último de  $\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$ , define o estado limite último de ruptura do concreto, ele é caracterizado pelo o esmagamento do concreto.

O ponto C corresponde ao encurtamento último de  $\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰}$ , a peça está completamente comprimida, ou seja, a linha neutra não corta a seção.

### 3.3 Parâmetro de deformação adimensional D

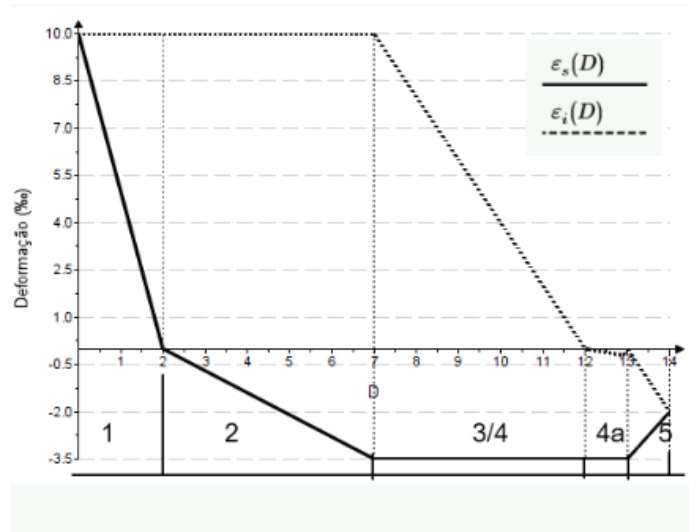
Para facilitar a implementação do algoritmo, foi utilizado parâmetro de deformação D, pois foi possível representar todos os domínios de deformação da NBR 6118:2014 no intervalo de 0 a 14, conforme a Tabela 3.1 em função de uma única variável adimensional D.

Segundo MARLON (2005), as deformações extremas superior e inferior  $\varepsilon_s(D)$  e  $\varepsilon_i(D)$  respectivamente define,

As deformações das fibras extremas correspondes ao estado limite último podem ser convenientemente expressas em função de um único parâmetro adimensional, D (MUSSO, 1987). É apresentada abaixo procedimento ligeiramente modificado de modo a incluir o domínio 4<sub>a</sub> (MARLON, 2005, p. 28).

Podendo ser expressas em funções lineares, como mostra a figura 3.2, para um intervalo de 0 a 14.

Figura 3.2: Gráfico das funções periódicas do parâmetro D na seção considerada



Fonte: Adaptado de Marlon,2005, (P. 29)

Como geralmente a seção dos pilares estão submetidos a compressão, a convenção de sinais adotada foi positiva para compressão e negativa para tração.

Tabela 3.1: Correspondência entre os domínios do ELU e D

Dom	D	$y_s$	$\varepsilon_s(D)\%$	$y_i$	$\varepsilon_i(D)\%$
Reta A	D=0	$y_{sup}$	-10	$y_{min}$	-10
1	$0 \leq D < 2$	$y_{sup}$	$5D-10$	$y_{min}$	-10
2	$2 \leq D < 7$	$y_{sup}$	$0,7D-1,4$	$y_{min}$	-10
3/4	$7 \leq D \leq 12$	$y_{sup}$	3,5	$y_{min}$	$2D-24$
4a	$12 < D < 13$	$y_{sup}$	3,5	$y_{min}$	$3,5\delta(D-12)$
5	$13 \leq D \leq 14$	$y_{sup}$	$23-1,5D$	$y_{inf}$	$2D-26$
Reta B	D=14	$y_{sup}$	2	$y_{inf}$	2

Fonte: Adaptado de Marlon,2005, (P. 29)

Onde:

$y_s$  = Distância da fibra extrema comprimida ao centro de gravidade da peça;

$y_i$  = Distância da fibra extrema tracionada ao centro de gravidade da peça.

Para o cálculo da deformação no domínio 4a, tem-se que.

$$\frac{3,5}{h} = \frac{\varepsilon_{4a}}{(y_{inf} - y_{min})} \quad (3.1)$$

Fazendo-se

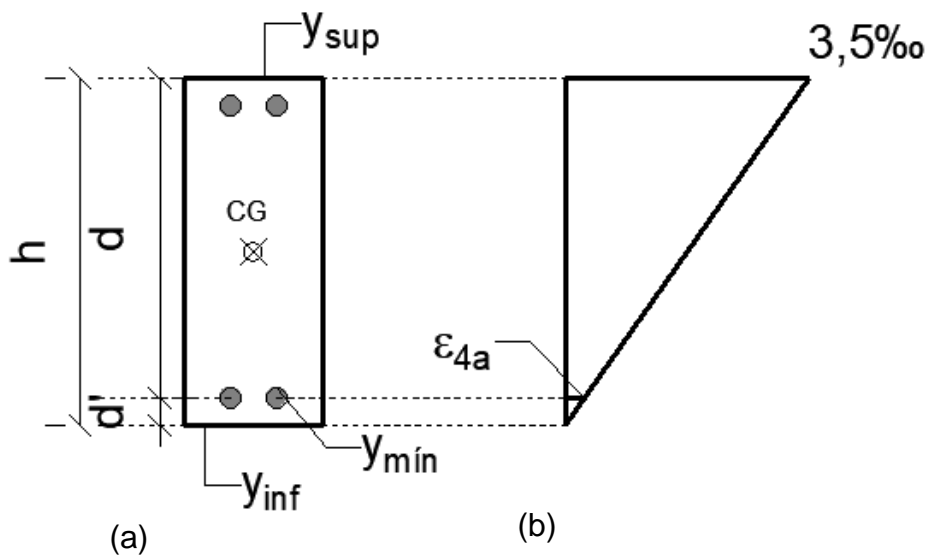
$$(y_{inf} - y_{min}) = d'$$

Definindo o parâmetro geométrico  $\delta = \frac{d'}{h}$  a equação 3.1, pode ser escrita na forma.

$$\varepsilon_{4a} = 3,5\delta \quad (3.2)$$

A dedução das variáveis da equação 3.1 podem ser vistas na figura (3.3).

Figura 3.3: Seção transversal com armadura duplamente simétrica (a); Variáveis 4a (b)



Fonte: Elaborada pelo autor

Onde,  $y_{min}$  = Distância da armadura inferior ao centro de gravidade da peça (CG).

### 3.4 Roteiro para traçado do diagrama de interação

Nesse capítulo é mostrado os principais passos construtivos do diagrama de interação. No início é pedido dados da seção, cobrimento,  $f_{ck}$ ,  $f_{yk}$ , diâmetro do estribo e diâmetro da armadura longitudinal, de posse desses dados começa-se a análise da seção visando à obtenção das deformações das fibras extremas da mesma.

#### 3.4.1 Cálculo das deformações

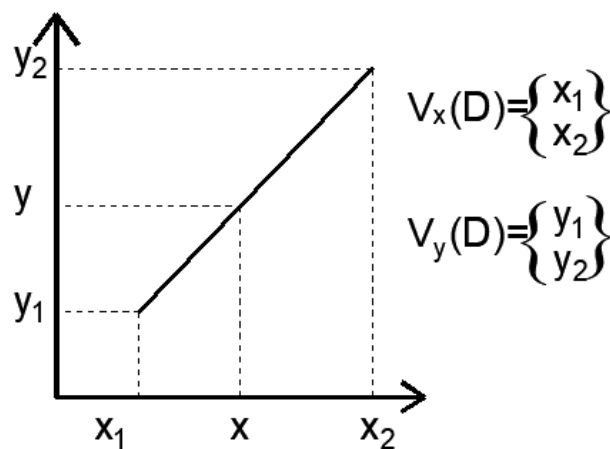
Definido o domínio de deformações nos extremos da seção  $\varepsilon_s(D)$  e  $\varepsilon_i(D)$ , dessa forma, é possível calcular as deformações para um ponto genérico da seção de ordenada  $y$ . Em seguida, são calculadas as tensões resistentes do concreto e aço.

Segundo a hipótese básica de dimensionamento, a seção permanece plana antes e depois da deformação, ou seja, a deformação em cada ponto é proporcional a sua distância à linha neutra. Assim fica fácil de determinar as deformações na seção por interpolação linear.

O software Mathcad Prime 7, fornece uma função linterp que retorna um valor linearmente interpolado em  $x$  dados vetores de  $V_x$  e  $V_y$ .

$$y = \text{linterp}(V_x, V_y, x) \quad (3.3)$$

Figura 3.4: Vetores na ordem crescente



Fonte: Elaborada pelo autor

Definido os vetores das fibras, pode-se agrupar em  $y_f(D)$  e  $\varepsilon_f(D)$ , em dois vetores.

$$y_f(D) = \begin{Bmatrix} y_i(D) \\ y_s(D) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

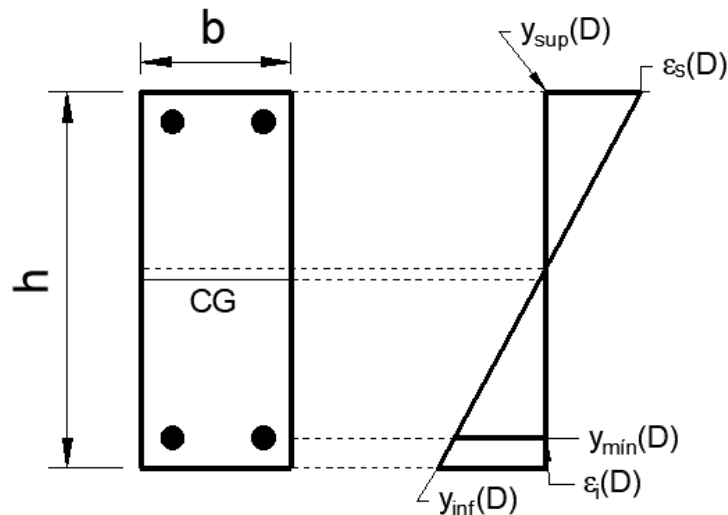
$$\varepsilon_f(D) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_i(D) \\ \varepsilon_s(D) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Conhecidos os vetores  $y_f(D)$  e  $\varepsilon_f(D)$ , a deformação de um ponto da seção é obtida por

$$\varepsilon(y, D) = \text{linterp}(y_f(D), \varepsilon_f(D), y) \quad (3.6)$$

Onde o  $y_i$  pode assumir  $y_{\text{inf}}(D)$  ou  $y_{\text{min}}(D)$ , como mostra a Figura 3.5.

Figura 3.5: Deformações nas fibras



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.4.2 Cálculo dos esforços resultante das tensões no concreto

Para o cálculo dos esforços resistentes do concreto, utilizando o diagrama parábola-retângulo, é calculado por integração das tensões no concreto para o esforço normal  $N_{Rd}^c(D)$  e momento fletor  $M_{Rd}^c(D)$ , em função do estado limite último D, como mostra as equações 3.7 e 3.8.

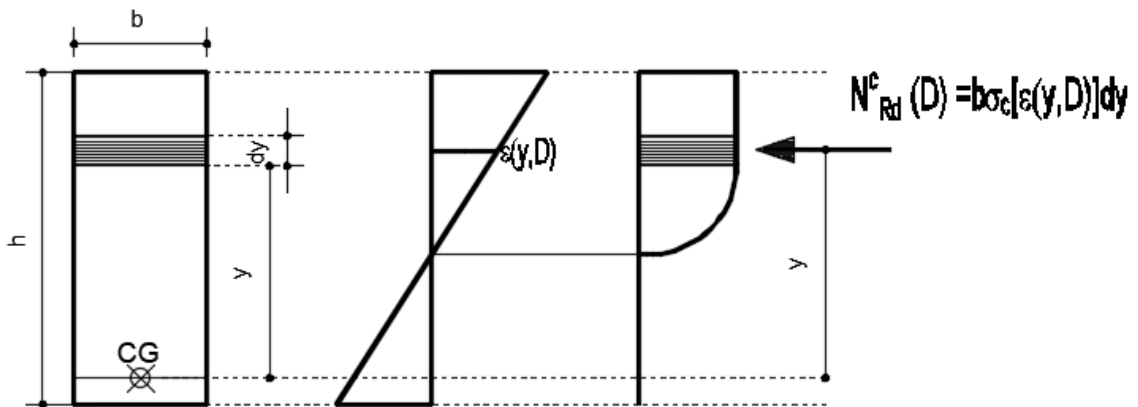
$$N_{Rd}^c(D) = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma_c[\varepsilon(y, D)] dy \quad (3.7)$$

$$M_{Rd}^c(D) = \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma_c[\varepsilon(y, D)] y dy \quad (3.8)$$

Onde:

- $N_{Rd}^c(D)$  – força resistente normal de compressão no concreto;
- $b$  – largura da seção;
- $\sigma_c[\varepsilon(y, D)]$  – tensão resistente no concreto em função da coordenada genérica  $y$ , estado limite último  $D$ ;
- $M_{Rd}^c(D)$  – Momento fletor resistente no concreto;
- $y$  – braço de alavanca, como está ilustrado na Figura 3.6.

Figura 3.6: Integração das tensões no concreto



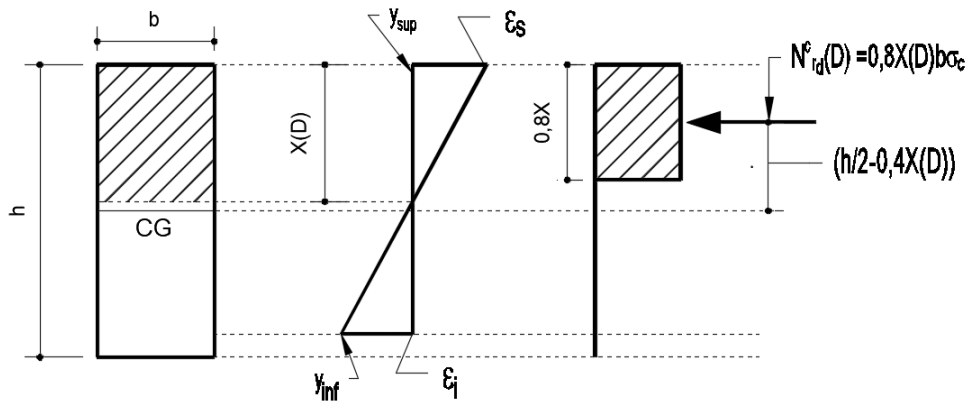
Fonte: Elaborada pelo autor

O cálculo dos esforços resistente no concreto utilizando o diagrama retangular (simplificado), podem ser deduzidas diretamente da Figura 3.7.

$$N_{rd}^c(D) = 0,8x(D)b\sigma_c \quad (3.9)$$

$$M_{rd}^c(D) = 0,8x(D)b\sigma_c \left( \frac{h}{2} - 0,4x(D) \right) \quad (3.10)$$

Figura 3.7: Resultante das tensões no concreto



Fonte: Elaborada pelo autor

Onde:

- $N_{rd}^c(D)$  – força resistente normal de compressão no concreto;
- $b$  – largura da seção transversal;
- $\sigma_c = 0,85 * f_{cd}$  – tensão resistente constante do concreto comprimido;
- $M_{rd}^c(D)$  – Momento fletor resistente do concreto;
- $(h/2 - 0,4X(D))$  – braço de alavanca, como mostra a Figura 3.7.

A determinação da linha neutra em função do parâmetro  $D$ , é demonstrado na equação 3.11

$$\frac{x(D)}{\varepsilon_s(D)} = \frac{y_{sup}(D) - y_{inf}(D)}{\varepsilon_s(D) - \varepsilon_i(D)} \quad (3.11)$$

Simplificando a equação 3.11.

$$x(D) = \frac{\varepsilon_s(D)}{\varepsilon_s(D) - \varepsilon_i(D)} (y_{sup}(D) - y_{inf}(D)) \quad (3.12)$$

### 3.4.3 Cálculo dos esforços resultante das tensões na armadura

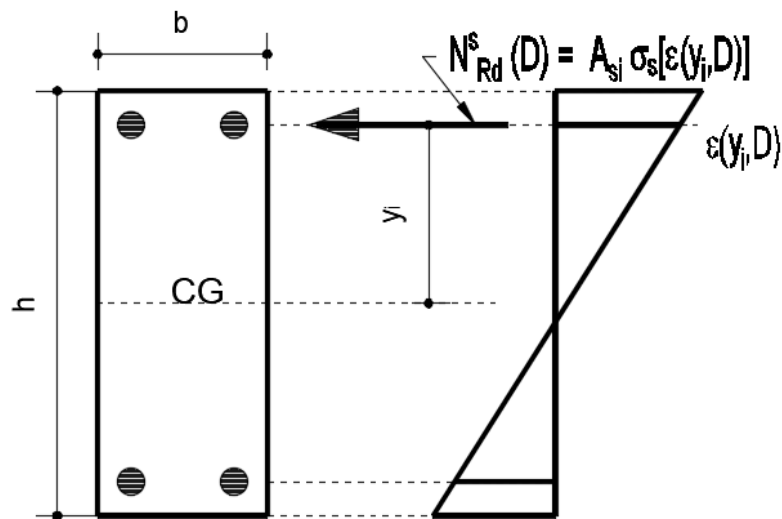
Para os esforços resistentes relativos ao aço, considera-se que cada camada de armadura ofereça a sua contribuição para a resistência final da seção transversal

da peça. Dessa forma, para calcular os esforços na seção consiste no somatório da resistência oferecida para cada camada de armação, ou seja, em função da coordenada de cada camada, para aquele estado limite último  $D$ , é dada a deformação. Assim, é calculado as tensões resistentes normais  $N_{Rd}^s(D)$ , e para determinar o momento fletor resistente  $M_{Rd}^s(D)$ , basta multiplicar pela coordenada da  $y_i$  i-ésima camada, como está nas equações 3.14.

$$N_{Rd}^s(D) = \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_s[\varepsilon(y_i, D)] \quad (3.13)$$

$$M_{Rd}^s(D) = \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_s[\varepsilon(y_i, D)] y_i \quad (3.14)$$

Figura 3.8: Integração das tensões na armação



Fonte: Elaborada pelo autor

Onde:

- $N_{Rd}^s(D)$  – força resistente normal na armação;
- $A_{si}$  – área de aço da i-ésima camada de armadura;
- $\sigma_s[\varepsilon(y_i, D)]$  – tensão resistente da armadura em função da coordenada da i-ésima camada e do estado limite último  $D$ ;
- $M_{Rd}^s(D)$  – momento fletor resistente da armadura;
- $y_i$  – braço de alavanca da coordenada da i-ésima camada a partir do centroide da seção.

### 3.4.4 Equações de equilíbrio

No item anterior foram mostradas as equações para o cálculo do esforço normal resistente e momento fletor resistente, para o concreto e aço. Para calcular a resistência da seção transversal é preciso somar os esforços resultante do concreto e do aço, essas expressões fornecem resistência total da seção:

$$N_{Rd}(D) = N_{Rd}^c(D) + N_{Rd}^s(D) = \int_{-h/2}^{h/2} b\sigma_c[\varepsilon(y, D)]d_y + \sum_{i=1}^n A_{si}\sigma_s[\varepsilon(y_i, D)] \quad (3.15)$$

$$M_{Rd}(D) = M_{Rd}^c(D) + M_{Rd}^s(D) = \int_{-h/2}^{h/2} b\sigma_c[\varepsilon(y, D)]yd_y + \sum_{i=1}^n A_{si}\sigma_s[\varepsilon(y_i, D)]y_i \quad (3.16)$$

E por fim, utilizando o diagrama retangular de tensões para concreto, pelas seguintes equações 3.17 e 3.18.

$$N_r(D) = N_r^c(D) + N_{Rd}^s(D) = 0,8x(D)b\sigma_c + \sum_{i=1}^n A_{si}\sigma_s[\varepsilon(y_i, D)] \quad (3.17)$$

$$M_r(D) = M_r^c(D) + M_{Rd}^s(D) = 0,8x(D)b\sigma_c\left(\frac{h}{2} - 0,4x(D)\right) + \sum_{i=1}^n A_{si}\sigma_s[\varepsilon(y_i, D)]y_i \quad (3.18)$$

### 3.4.5 Estrutura do algoritmo

O fluxograma apresentado na figura 3.9 mostras como o algoritmo se encontram estruturado. A estrutura do algoritmo está toda detalhada no apêndice A para futuros trabalhos na área.

- 1) Detalhar geometria da seção transversal
- 2) Para D variando de 0 a 0,1 até 14
- 3) Ache a distribuição de deformação na seção correspondentes ao estado limite último D
  - a)  $\varepsilon(y, D)$ , para tensão no concreto utilizando o diagrama parábola-retângulo
  - b)  $x(D)$ , linha neutra, para tensão no concreto utilizando o diagrama retangular
  - c)  $\varepsilon(y_i, D)$ , tensão no aço
- 4) Ache os esforços resultantes das tensões no concreto:

- a)  $N_{Rd}^c(D)$ , esforço resultante normal, utilizando o diagrama parábola-retângulo
- b)  $M_{Rd}^c(D)$ , momento fletor resistente, utilizando o diagrama parábola-retângulo
- c)  $N_r^c(D)$ , esforço resultante normal, utilizando o diagrama retangular
- d)  $M_r^c(D)$ , momento fletor resistente, utilizando o diagrama retangular

5) Ache os esforços resultantes das tensões na armação:

- a)  $N_{Rd}^s(D)$ , esforço resistente normal
- b)  $M_{Rd}^s(D)$ , momento fletor resistente

6) Ache os esforços resultantes totais da seção:

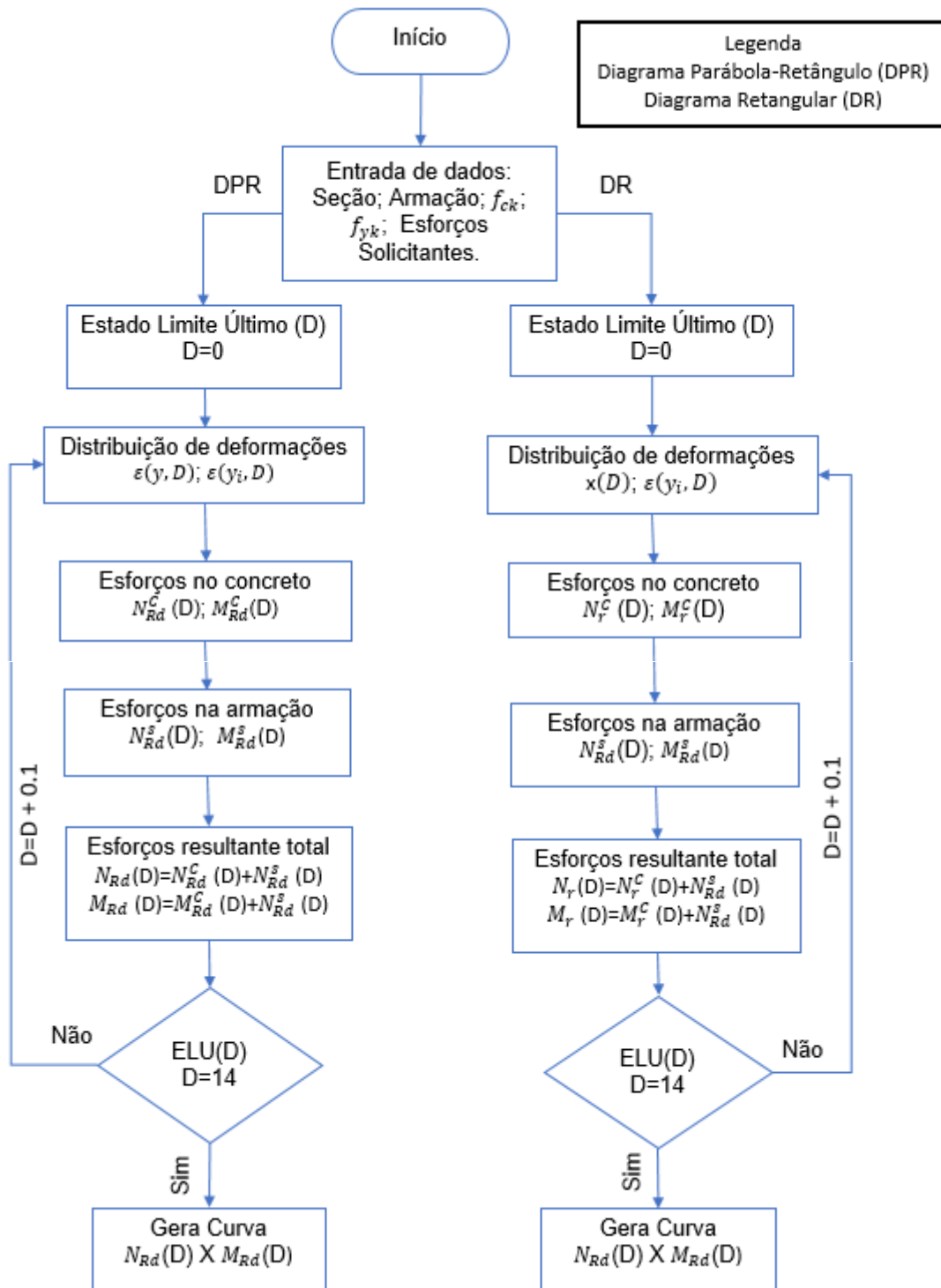
- a) Para diagrama parábola-retângulo

$$N_{Rd}(D) = N_{Rd}^c(D) + N_{Rd}^s(D); \quad M_{Rd}(D) = M_{Rd}^c(D) + M_{Rd}^s(D)$$

- b) Para diagrama retangular

$$N_r(D) = N_r^c(D) + N_{Rd}^s(D); \quad M_{Rd}(D) = M_r^c(D) + M_{Rd}^s(D)$$

Figura 3.9: Fluxograma para o cálculo do diagrama de interação

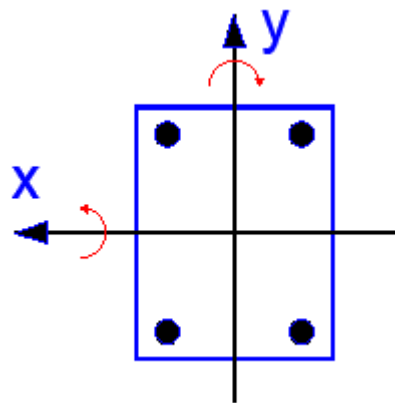


Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.5 Convenções

Vale ressaltar de novo que a convenção de sinais adotada nesse trabalho é positiva para forças e tensões de compressão e negativa para forças e tensões de tração, como as maiorias da vez os sinais são ao contrário do que foi usado aqui. Por ser um pilar que está geralmente submetido a flexo-compressão, justifica adotá-lo positivo para compressão, para os momentos foram adotado sinal segundo a regra da mão direita, como está representada na Figura 3.10.

Figura 3.10: Sentido dos momentos fletores



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.6 Interface do programa

O algoritmo desenvolvido apresenta uma interface fácil de usar e intuitiva, bastante simples. As variáveis do problema estão divididas em quatro partes: geometria, materiais, esforços solicitante e armação, como está apresentado nos subitens.

#### 3.6.1 Geometria

Na entrada de dados geométrico da seção transversal, só precisa inserir, altura (h), largura (b) e cobrimento (cob), tudo em centímetro (cm).

### 3.6.2 Materiais

Na entrada de dados dos materiais, são inseridos os valores do  $f_{ck}$  resistência característica à compressão do concreto em MPa e  $f_{yk}$  resistência característica ao escoamento do aço em MPa, o programa converte esses valores em valores de cálculo, com os seus coeficientes de minoração  $\gamma_c=1,40$  e  $\gamma_s=1,15$ , respectivamente.

### 3.6.3 Esforços solicitantes

Na entrada de dados dos esforços solicitantes, são informados esforço normal e momento fletor com seus valores de cálculo majorado de 1,4. Como estão apresentadas na Figura 3.11.

Figura 3.11: entrada de dados- Geometria, Materiais e Esforço Solicitantes

<u>Geometria</u>		
$h := 50 \text{ cm}$	$b := 20 \text{ cm}$	$cob := 3.7 \text{ cm}$
<u>Materiais:</u>		
$f_{ck} := 20 \text{ MPa}$	$f_{yk} := 500 \text{ MPa}$	
<u>Esforços solicitantes</u>		
$N_{sd}$	$M_{sd}$	
$(kN)$	$(kN \cdot m)$	+
200	80	

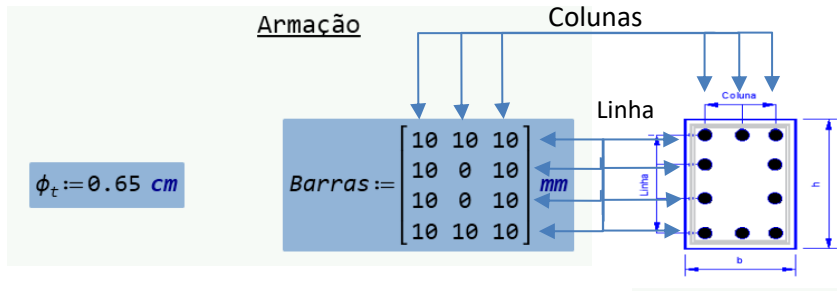
Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.6.4 Armação

A entrada de dados da armação, são informados primeiros um diâmetro do estribo em centímetro (cm), depois é inserido os diâmetros das barras longitudinais

em milímetro (mm) em forma de matriz semelhante a um detalhamento de uma seção transversal de um pilar. Como está apresentado na Figura 3.12.

Figura 3.12: entrada de dados – Armação

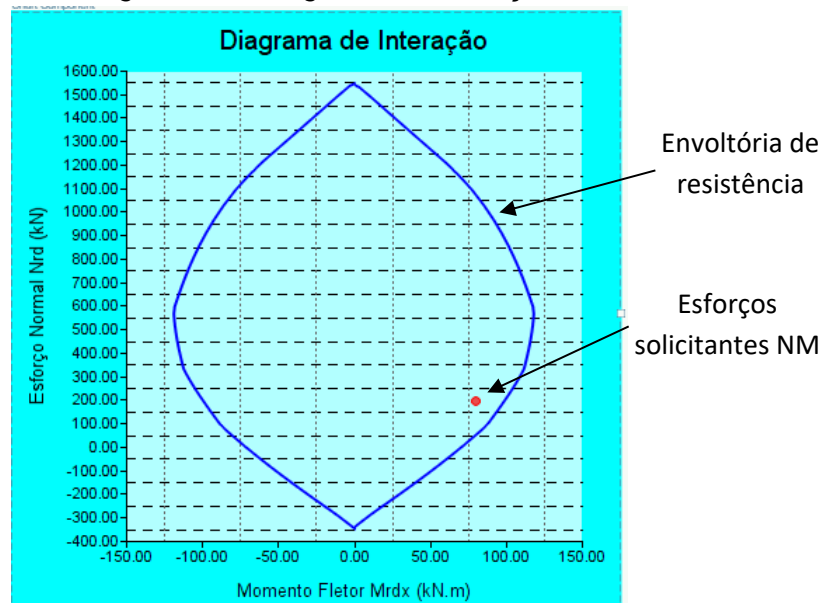


Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.7 Saída de resultados

O algoritmo implementado no Mathcad plota todo esforço resistente que rompe a seção estado limite último (ELU), para o caso de flexão composta reta (FCR). Além disso, permite visualizar os esforços solicitantes no gráfico, para verificação da segurança. Figura 3.13.

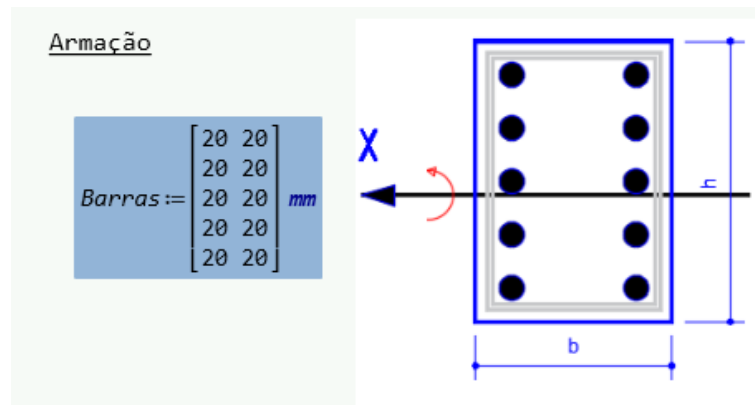
Figura 3.13: Diagrama de interação



Fonte: Elaborada pelo autor

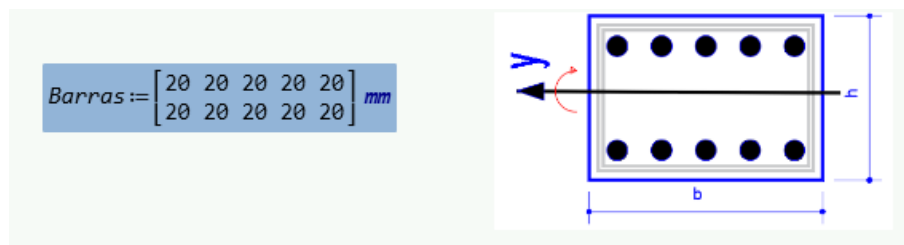
Se o momento é em torno de  $x$  ( $M_{rdx}$ ) a altura é  $h$  e largura é  $b$ , como mostra a Figura 3.14, se o momento for em torno de  $y$  ( $M_{rdy}$ ), as dimensões invertem e a matriz também Figura 3.15.

Figura 3.14: Momento em torno de  $x$



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.15: Momento em torno de  $y$



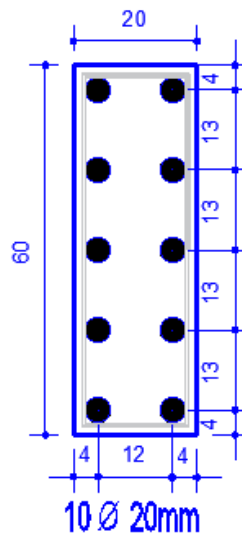
Fonte: Elaborada pelo autor

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este item pretende analisar as diferenças entre os diagramas de interação de esforços resistentes gerado a partir da utilização do diagrama parábola-retângulo ou do diagrama retangular simplificado do concreto.

Para fazer a comparação foi realizado um estudo de caso para uma seção modelo Figura 4.1, para isso, foram adotados uma seção retangular com armadura distribuído em duas faces opostas.

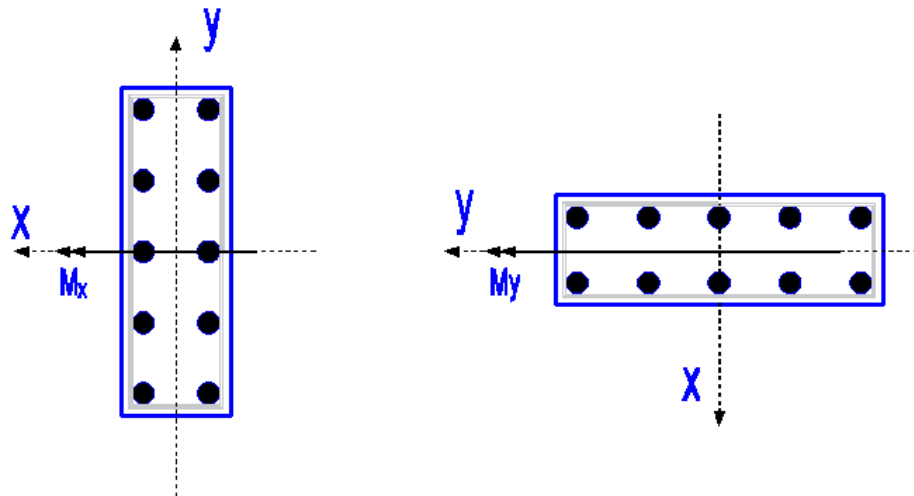
Figura 4.1: Seção transversal retangular para estudo de caso



Fonte: Elaborada pelo autor

A fim de avaliar as diferenças entre diagramas de interação são influenciados pela variação da classe de resistência do concreto, pela, a posição do pilar e pelo aumento do domínio de deformação. Adotou-se duas maneiras de análise de forma analisar os momentos resistentes nas duas direções, ou seja, X maior inércia e Y menor inércia figura 4.2, variando a classe de resistência do concreto entre 20 a 50 MPa e o aumento dos domínios de deformação de 3, 4, 4a e 5.

Figura 4.2: Seção transversal retangular do pilar nas duas direções



Fonte: Elaborada pelo autor

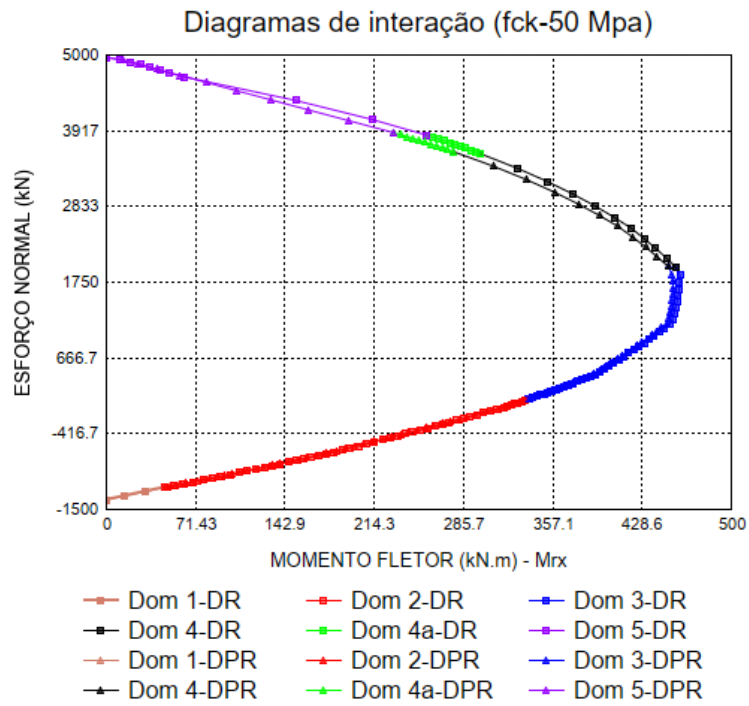
#### 4.1 Análise comparativa entre os diagramas de interação de esforços resistentes

Foram determinados para a seção descrita no item 4, os diagramas de interação esforço normal – momento fletor, como para cada classe de resistência do concreto foi elaborado um diagrama de interação, por ficar muitas figuras no corpo do texto, dessa forma, decidiu-se apresentar somente os digramas de interação de  $f_{ck} = 50$  MPa os restantes das figuras se encontram no apêndice B.

##### 4.1.1 Comparação entre os diagramas de interação na direção de maior inércia

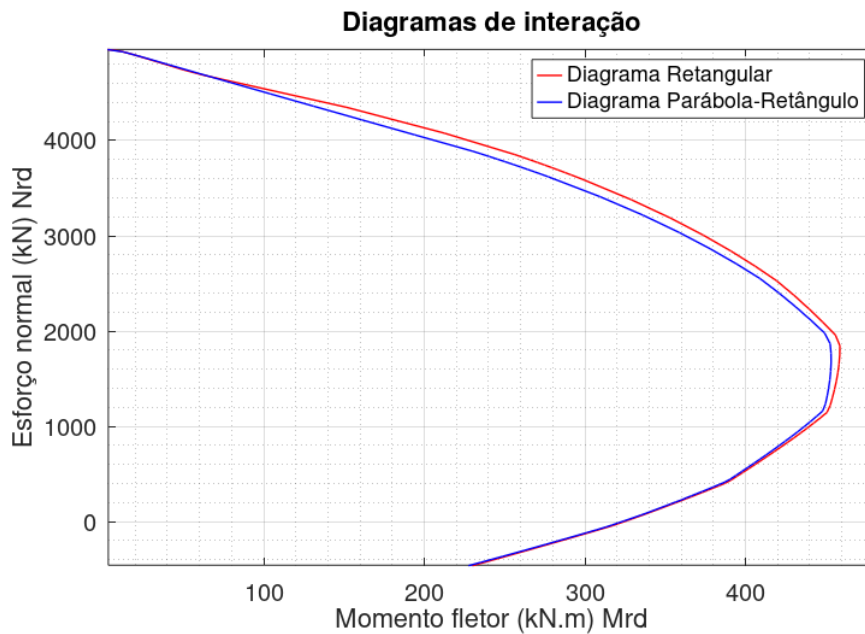
Observa-se na Figura 4.3, que os resultados referentes ao domínio 1 (marrom) e uma boa parte do domínio 2 (Vermelha), sobrepõem a curva sobre a outra, era de se esperar, como não há participação do concreto atração somente armadura de aço resistem aos esforços. Ainda, no domínio 5 (roxo) uma parte final, notou-se a sobreposição, devido à seção transversal está inteiramente comprimida com pequena excentricidade. Já no final domínio 3 (azul), início do domínio 4 (preto) e domínio 4a (verde) observa-se um afastamento das curvas.

Figura 4.3: Comparação da curva gerada pelo diagrama Parábola-Retângulo e a curva gerada pelo diagrama retangular



Fonte: Elaborada pelo autor

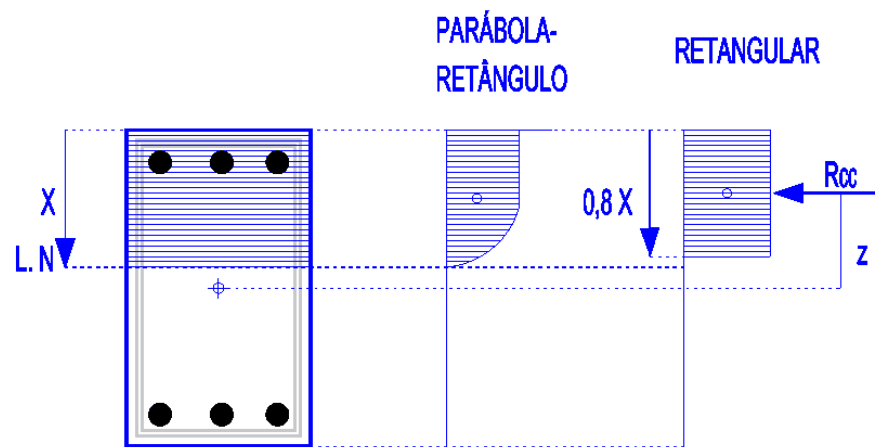
Figura 4.4: Detalhe mostrando as diferenças entre as curvas da Figura 4.3



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 4.4 pode-se notar que o diagrama retangular simplificado apresentou esforços resistentes superiores ao diagrama parábola-retângulo, isso se deve, a redução da linha neutra, reduzindo a linha neutra eleva-se o centroide do diagrama retangular, elevando o centroide aumenta o braço de alavanca em relação ao centroide da seção transversal e conseqüentemente maior é o momento fletor, como explica a Figura 4.5.

Figura 4.5: Comparação entre os diagramas de tensão do concreto

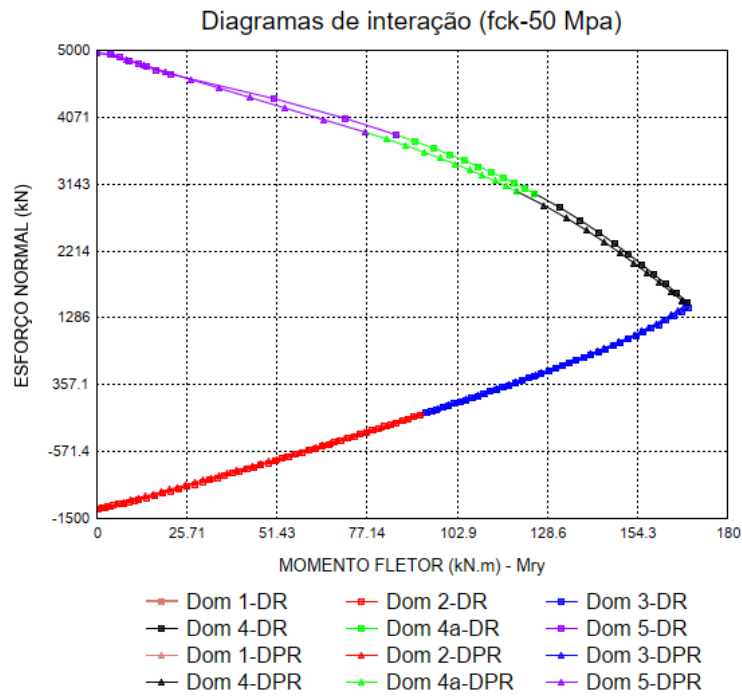


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 4.1.2 Comparação entre os diagramas de interação na direção de menor inércia

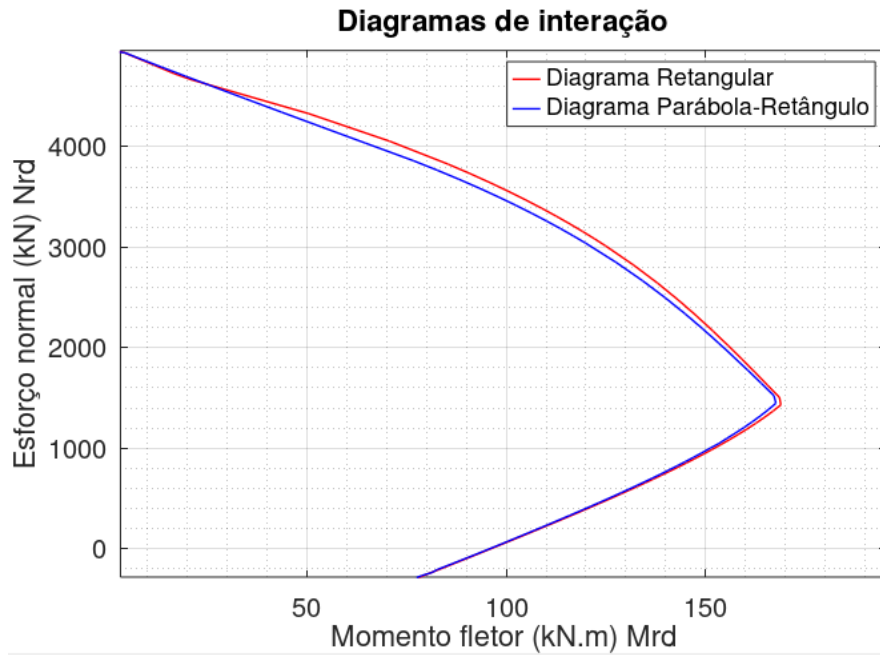
Observa-se na Figura 4.6, que os resultados são os mesmos observados no subitem 4.1.1, a única diferença são os momentos que são menores, que diagrama de interação na direção de maior inércia, como era de se esperar, como as armaduras estão próximo do centro da seção transversal, menor é o braço de alavanca resultando em momentos menores.

Figura 4.6 : Comparação da curva gerada pelo diagrama Parábola-Retângulo e a curva gerada pelo diagrama retangular



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.7: Detalhe mostrando as diferenças entre as curvas da Figura 4.6



Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4:1: Comparação entre os momentos resistentes da seção

Resistência do Concreto (MPa)	Domínios de deformação	M <sub>rd,x</sub> (kN.m)		Variação percentual (%)	M <sub>rd,y</sub> (kN.m)		Variação percentual (%)
		DPR	DR		DPR	DR	
20	3	235,70	235,54	-0,07	63,7	63,62	-0,13
	4	289,76	292,46	0,93	115,18	115,74	0,49
	4a	166,43	175,29	5,32	72,54	74,55	2,77
	5	141,00	151,47	7,43	46,95	50,44	7,43
30	3	269,89	269,67	-0,08	73,82	73,7	-0,16
	4	342,92	346,96	1,18	132,49	133,35	0,65
	4a	203,34	216,63	6,54	88,32	91,34	3,42
	5	170,73	186,44	9,20	56,86	62,1	9,22
40	3	304,09	303,78	-0,10	83,94	83,78	-0,19
	4	396,09	401,47	1,36	149,8	150,91	0,74
	4a	240,26	257,98	7,38	104,1	108,12	3,86
	5	200,47	221,41	10,45	66,77	73,75	10,45
50	3	338,29	337,91	-0,11	94,06	93,86	-0,21
	4	449,25	455,98	1,50	167,1	168,5	0,84
	4a	277,17	299,32	7,99	119,8	124,9	4,26
	5	230,21	256,38	11,37	76,68	85,41	11,38

DPR= Diagrama Parábola-retângulo; DR= Diagrama Retangular; Variação percentual= (DR-DPR)/DRP

Fonte: Elaborada pelo autor

Observa-se na Tabela 4.1, que quanto maior o domínio deformação e resistência do concreto a compressão, maiores são variação percentual entre os momentos. Perceba-se que no domínio 3 a uma invenção de valores, o diagrama parábola-retângulo passa a ser maior, com diferença pequena no máximo 0,21%, e no domínio 4, 4a e 5 o diagrama retangular passa ser superior, com diferença máximo de 11,38% no início do domínio 5.

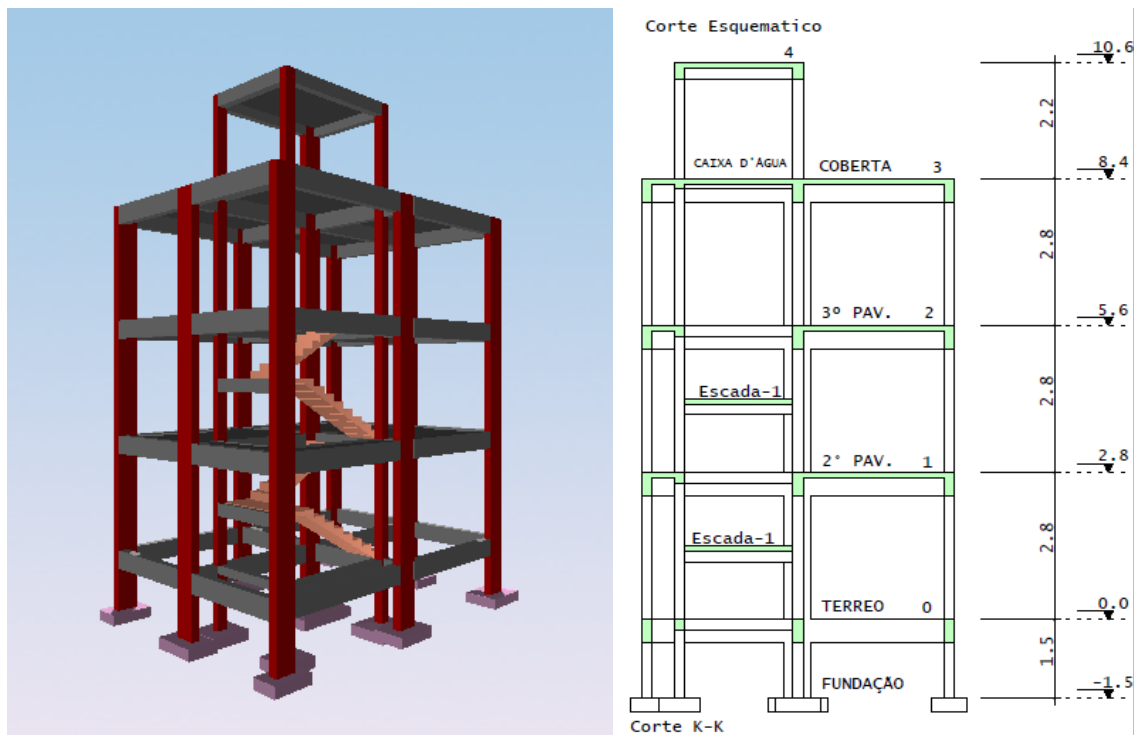
Observa-se que as maiores diferenças de momentos ocorreram na direção de maior inércia (M<sub>rd,x</sub>). Nota-se que os momentos em torno do eixo x e y, o diagrama retangular simplificado apresentou momentos resistentes superiores, devido ao fato da redução da linha neutra, com está exemplificado Figura 4.5, resultando em um diagrama retangular com centroide elevado em relação à linha neutra. Assim ocasionando um maior braço de alavanca para um binário resistente que equilibra o momento fletor da seção transversal.

## 4.2 Validação do programa

Com o intuito de validar o algoritmo desenvolvido, será feita uma comparação entre os resultados da ferramenta desenvolvida e um software comercial. Para isso, foi utilizado o programa TQS (versão 22.12) estudante, por ser uma ferramenta muito utilizado no Brasil, para dimensionamento de estrutura de concreto armado, protendido e em alvenaria estrutura.

Para estudo de caso foi feito modelagem de um edifício no programa TQS. O edifício é composto por um pavimento térreo, vigas baldrame, 2 pavimentos tipo, uma cobertura com acesso a caixa d'água, todas as lajes possuem espessura de 10 cm, a distância entre os pisos é constante e igual a 2,80 m, totalizando 10,60 metros de altura, acima do nível do solo como está apresentado na Figura 4.8.

Figura 4.8: Representação tridimensional e corte esquemático da estrutura

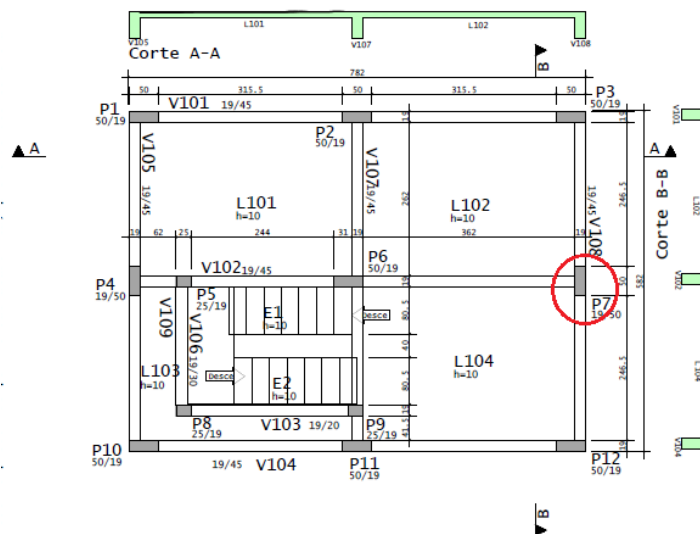


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 4.2.1 Exemplo numérico

Como exemplo numérico será considerado o pilar P7 do primeiro andar tipo, ou seja, entre o térreo e o primeiro andar do edifício, a escolha dele foi por ele ser um pilar de extremidade, esse pilar é solicitado por flexão composta reta, cuja localização está indicada na planta de forma estrutural. Figura 4.9.

Figura 4.9: Planta de forma estrutural



Fonte: Elaborada pelo autor

#### 4.2.2 Diagrama interação: Flexão composta reta

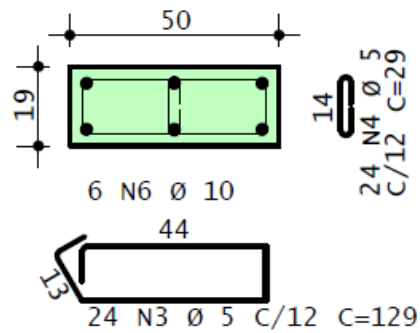
A fim de avaliar a confiabilidade do algoritmo, foram comparados diagramas de interação da seguinte forma:

- Variando a resistência do concreto entre C20 a C50 MPa;
- Seção e armadura constante;
- Variando o domínio 1 (tração máxima), 3/4 (fim do domínio 3 e início do 4 Flexão máxima) e o domínio 5 (compressão máxima).

Os dados do pilar P7 são:

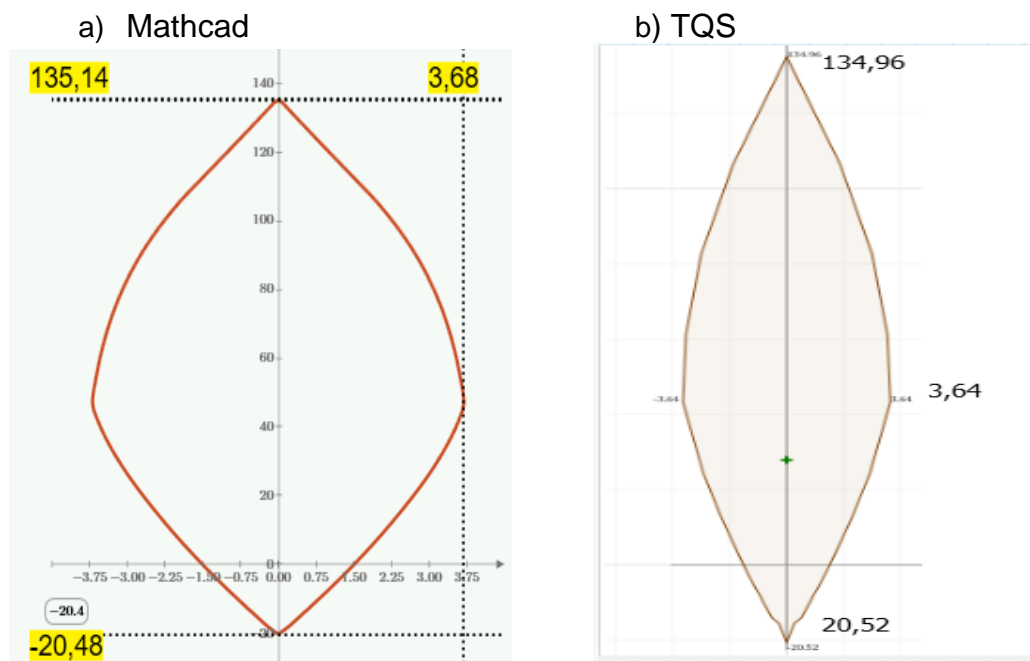
- Seção transversal de 19x50 cm;
- Armadura longitudinal de 6  $\varnothing$  10 mm;
- estribo de  $\varnothing$  5 mm;
- Altura útil  $d'=4$  cm.

Figura 4.10: Detalhamento do pilar P7



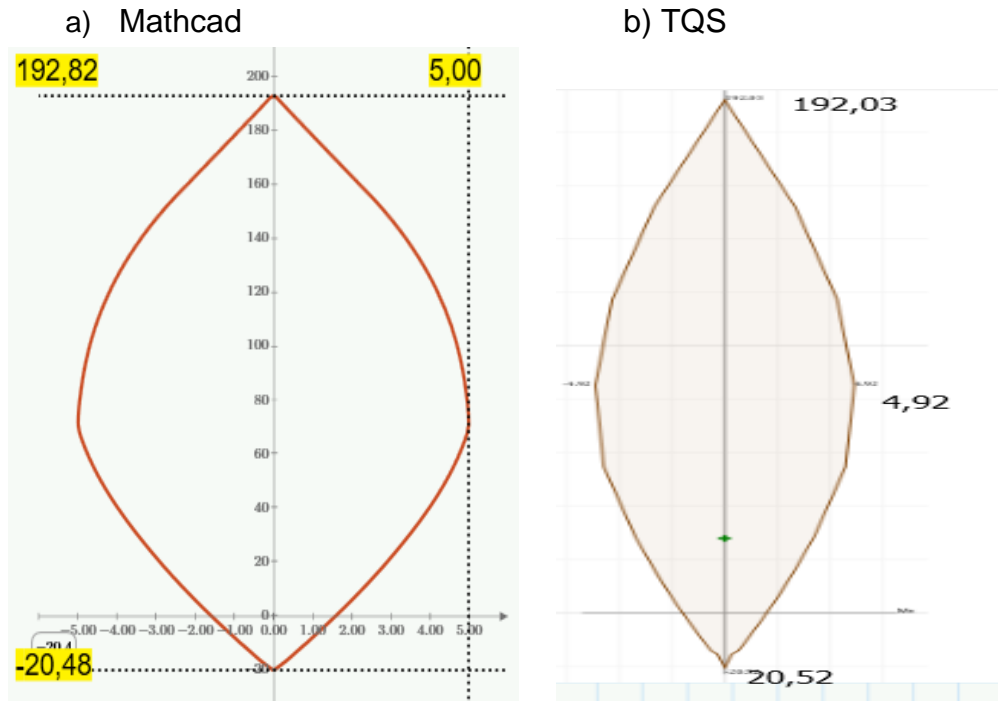
Fonte: Elaborada pelo autor

São apresentados na sequencia nas Figuras 4.11 a 4.14, os diagramas de interação para seção mostrada na Figura 4.10, com  $f_{ck}=20$  MPa,  $f_{ck}=30$  MPa,  $f_{ck}=40$  MPa e 50 MPa respectivamente, O diagrama de tensões no concreto utilizado é a parábola retângulo, é o que software TQS usa e a unidades utilizadas tf e tf.m.

Figura 4.11: Diagrama de interação para concreto com  $f_{ck}=20$  MPa

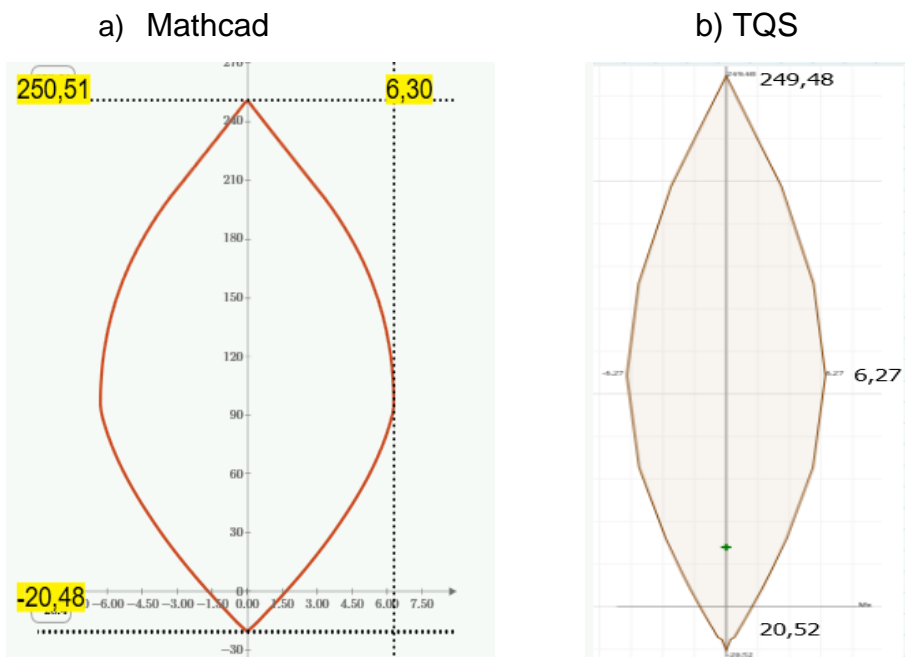
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.12: Diagrama de interação para concreto com  $f_{ck}=30$  MPa



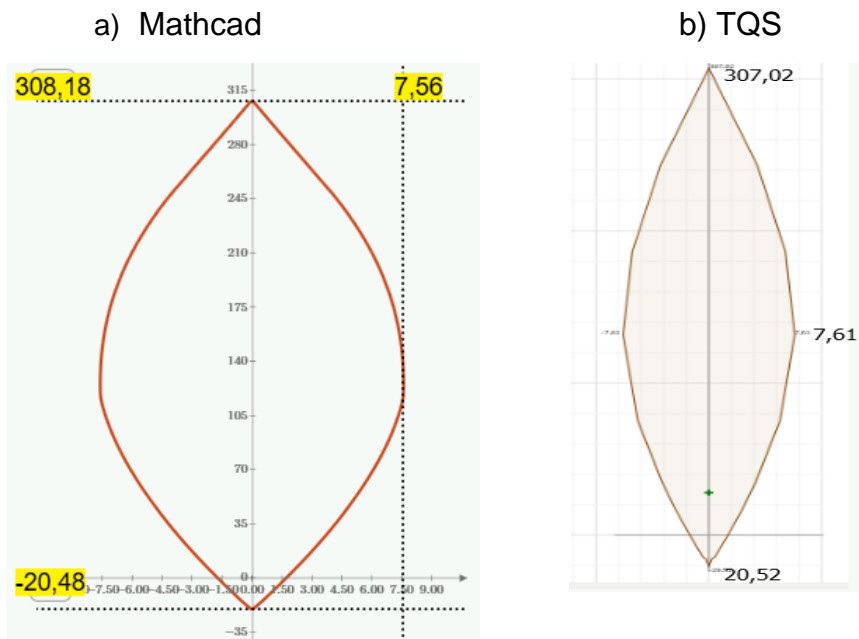
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.13: Diagrama de interação para concreto com  $f_{ck} = 40$ MPa



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.14: Diagrama de interação para concreto com  $f_{ck}=50$  MPa



Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela abaixo apresenta todos os dados analisado na comparação dos diagramas interação, entre o TQS e o algoritmo implementado no Mathcad

Tabela 4:2: Comparação entre os diagramas interação gerados pelo TQS e Mathcad

Resistência do concreto (MPa)	Domínios de deformação	Esforços de tração (tf), flexão (tf m) e compressão (tf) respectivamente		Variação percentual (%)
		TQS	Mathcad	
20	1	20,52	20,48	-0,2
	3/4	3,64	3,68	1,1
	5	134,96	135,14	0,1
30	1	20,52	20,48	-0,2
	3/4	4,92	5	1,6
	5	192,03	192,82	0,4
40	1	20,52	20,48	-0,2
	3/4	6,27	6,3	0,5
	5	249,48	250,51	0,4
50	1	20,52	20,48	-0,2
	3/4	7,61	7,56	-0,7
	5	307,02	308,18	0,4

TQS; Mathcad; Variação percentual= (Mathcad – TQS)/TQS

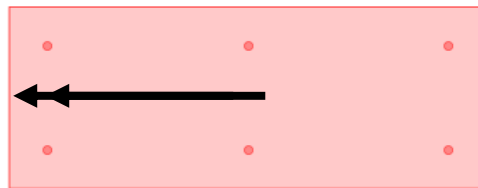
Fonte: Elaborada pelo autor

Os dados analisados na tabela 4.2, mostra que os valores obtidos no TQS chegam a ser muito próximos dos valores encontrado no Mathcad, verificou-se que a máxima variação percentual foi 1,6% e a mínima de 0,1%, desta forma, estes resultados validam o programa para flexo compressão reta. Vale salientar que os programas aqui comparados não apresentam mesmo cálculo utilizado no TQS, por exemplo, discretização da seção do concreto.

#### 4.2.3 Exemplo de verificação da capacidade resistente da seção para os esforços solicitantes

O Pilar utilizado para verificação da capacidade resistente à flexo compressão reta, foi o mesmo usado no item anterior P7, com seção 19x50 cm, cobrimento de 3 cm, estribo de 5 mm, concreto com  $f_{ck}= 30$  MPa e o aço  $f_{yk}= 500$  MPa.

Figura 4.15: Seção do pilar P7

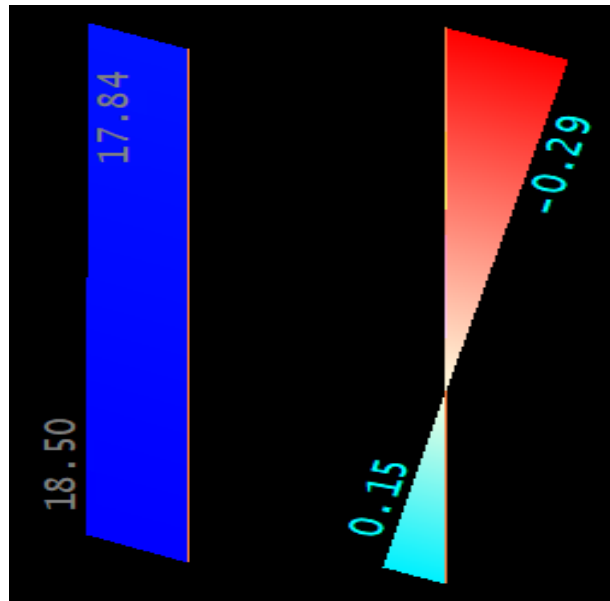


6 ø 10

Fonte: Elaborada pelo autor

Os esforços normais e momentos fletores solicitantes para cargas verticais, todas permanentes e acidentais do pilar P7, entre o térreo e o primeiro andar tipo são;  $N_{sd}= 17,84$  tf (topo),  $N_{sd}= 18,50$  tf (base),  $M_{sd}= -0,29$  tf.m (topo) e  $M_{sd}= 0,15$  tf.m (base).

Figura 4.16: Esforços normais e momentos fletores solicitantes



Fonte: Elaborada pelo autor

De posse desses dados que foram mencionados nos subitens 4.2.3, podemos verificar a envoltória de resistência do pilar, o resultado é apresentado no gráfico da Figura 4.17. Para tensão no concreto a compressão foi adotado o diagrama parábola-retângulo.

Figura 4.17: Diagrama de interação esforço normal - momento fletor



Fonte: Elaborada pelo autor

Observa-se no diagrama de interação, que a segurança do pilar P7 está garantida, pois os pares de esforços solicitantes N, M respectivamente esforço normal e momento fletor caiu dentro do diagrama, ou seja, os esforços solicitantes no topo e na base são inferiores aos esforços resistentes, na qual seção consegue suportar.

## **5 CONCLUSÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES**

### **5.1 Conclusões**

A comparação dos diagramas de interação, foi visto que nos domínios 4, 4a e início domínio 5, o diagrama retangular simplificado tiveram momentos resistentes superiores ao do diagrama parábola retângulo, momento resistente maior representa necessitar menos armadura conduzindo o dimensionamento da seção solicitadas à flexo compressão reta ligeiramente contra a segurança e permitindo economia. Já o diagrama parábola-retângulo apresentou momentos resistentes inferiores, ou seja, seção precisará mais armaduras, portanto, são antieconômicos comparado com os resultados obtidos com o uso do diagrama retangular simplificado. No entanto, uso do diagrama parábola retângulo torna se mais seguro o dimensionamento da peça.

De acordo com os resultados e discussões apresentados nesse trabalho, conclui-se que as variações percentuais dos diagramas de interação, nos domínios 3, 4 e 4<sup>a</sup>, são mais razoáveis chegando a um máximo de 7,99%, já no início domínio 5 chega ser mais expressiva, sendo de no máximo 11,38%, em termos de engenharia que os dois métodos possuem variação percentual considerada adequada, considerando os coeficientes de majoração, minoração respectivamente esforços solicitantes e resistentes de 1,40, justifica a utilização do diagrama retangular simplificado por várias normas a exemplo da NBR 6118:2014 e europeia EM 1992-1-1/2004 para concreto armado.

Interessante observado nesse trabalho, que os diagramas de interação com o uso do diagrama retangular simplificado não foram conservadores, esperava-se que o diagrama retangular simplificado por ser uma simplificação trouxesse resultados conservadores a favor da segurança, que nas maiorias da vez os processos simplificados são conservadores, o que não ocorreu aqui.

Conforme os resultados e discussão apresentados nesse trabalho, é possível concluir que o algoritmo implementado no Mathcad Prime 7 e comparado com o TQS, obteve resultados bastante satisfatório, com uma diferença máxima de 1,6% indicando a veracidade dos resultados. Entretanto, o algoritmo desenvolvido, apesar de apresentar bons resultados, deve ser mais testado, em outras palavras, comparar com outros softwares.

## **5.2 Recomendações para futuros trabalhos**

Para implementar o algoritmo desenvolvido e estudo sobre pilares de concreto armado, algumas sugestões são listadas a seguir:

- Fazer o mesmo estudo que foram feitos neste trabalho, utilizando a classes de concreto C55 a C90
- Implementação de novas seções transversais para pilares, como por exemplo, seção circular.
- Integrações das tensões no concreto pelo método das fibras.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, JOSÉ MILTON de. **Curso de concreto armado**. 3. Ed. V.3. Rio Grande: Dunas, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118:2014. Projeto de Estrutura de Concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT 2014.

CARDOSO JÚNIOR, SANDER DAVID. **Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado**. 2014. 62 p. Monografia (especialista em Gestão de Projetos de Sistemas Estruturais) - Curso de Engenharia Civil – Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 2014.

DE BARROS CAVALCANTI, MARLON. **Modelos de verificação à flexão de estruturas protendidas**. 2005. 90 P. Dissertação (Mestrado) -Curso Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005. Disponível em:< <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/5739>>. Acesso em 11 jan. 2022.

EN 1992-1-1. (2004). Eurocode 2. **Design of concrete structures – Part 1-1** General rules and rules for buildings.

FERREIRA, PRISCILA FEITOSA DE SÁ. **Estacas de seção circular semienterradas submetidas a cargas laterais**. Dissertação de mestrado – Universidade Federal de Pernambuco – Programa de pós-graduação em Engenharia Civil, Recife, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/25294>. Acesso em 10 jun. 2022.

FONSECA, Y. F. e SILVA, A. S. C. Comparison between resistant load contours generated considering the parabolic-rectangular (DPR) and the rectangular (DR) stress-strain diagrams for rectangular sections under combined axial compression and biaxial bending. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais** [online]. 2018, v. 11, n. 03 Acessado 11 janeiro 2022, pp. 455-473. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1983-41952018000300002>>.

FUSCO, P. B. **Estrutura de concreto – Solicitações normais**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A. 1981.

KIMURA, A. e. **Apostila do curso de Pós-graduação em projeto de estruturas de concreto: Módulo EE05 – Pilares**. FESP – Faculdade de Engenharia de São Paulo, 2010.

MALACARNE, F. **Vigas de concreto armado pela NBR 6118:2014**: Estudo do ganho obtido com o aumento da resistência do concreto, 2014. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/110123>. Acesso em 13 fev. 2022.

MAZETTO, GILHARDE DA SILVA. **Estudo da flexo-compressão para pilares em concretos de alto desempenho**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina – Centro Tecnológico. Programa de pós-graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/185375>. Acesso em 20 fev. 2022.

PTC MATHCAD PRIME. Mathcad prime 7. Disponível em:< <https://www.mathcad.com/pt/capabilities>>. Acesso em: 20 abr. 2022.

TQS INFORMÁTICA LTDA. **CAD TQS V 22.12 – Estudante – softwares CAD para o cálculo estrutural de concreto armado**. Disponível em:<<https://www.tqs.com.br/>>. Acesso em: 10 mai. 2022.

## Apêndice A

Roteiro para o traçado dos diagramas de interação implementado no Mathcad prime 7

### DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO PARA PILARES SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA RETA

#### Geometria

$$h := 60 \text{ cm}$$

$$b := 20 \text{ cm}$$

$$cob := 2.5 \text{ cm}$$

#### Materiais:

$$f_{ck} := 50 \text{ MPa}$$

$$f_{yk} := 500 \text{ MPa}$$

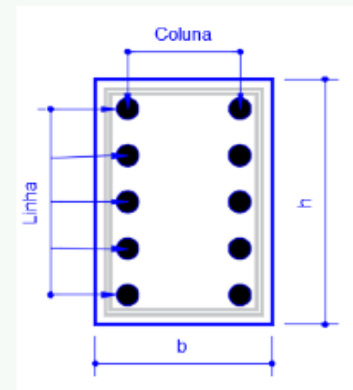
#### Esforços solicitantes

$N_{sd}$	$M_{sd}$
(kN)	(kN·m)
200	80

#### Armação

$$\phi_t := 0.5 \text{ cm}$$

$$Barras := \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \\ 20 & 20 \\ 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \text{ mm}$$



$$d'_1 := cob + \phi_t + \frac{Barras_{1,1}}{2}$$

Números de camadas de armadura

$$n_c := \text{rows}(Barras) = 5$$

Números de colunas

$$n_b := \text{cols}(Barras) = 2$$

Área de cada barras

$$A_{sb} := \pi \cdot \frac{Barras^2}{4}$$

Área de barras por camadas

$$A_{sc} := \sum_{i=1}^{n_b} A_{sb}^{(i)}$$

$$i := 1 .. n_c$$

Número de barras por camada

$$n_i := \frac{A_{sc_i,1}}{A_{sb_{1,1}}}$$

Espaçamento entre as camadas

$$s := \frac{(h - 2 \cdot d'_1)}{n_c - 1} \quad \delta := \frac{d'_1}{h} \quad (\text{Parâmetro geométrico adimensional})$$

$$i := 1 \dots n_c$$

Distancia do centro da camada i até aborda comprimida

$$d_i := d'_1 + s \cdot (n_c - i) \quad \beta_i := \frac{d_i}{h} \quad (\text{Parâmetro geométrico adimensional})$$

Distancia do centro da camada i até aborda comprimida (adimensional)

$$\beta_i := \delta + \frac{1 - 2 \cdot \delta}{n_c - 1} \cdot (n_c - i)$$

Coordenada de cada camadas

$$y_i := \frac{h}{2} - d_i \quad \eta_i := \left( \frac{y_i}{h} \right) \quad (\text{Parâmetro geométrico adimensional})$$

Coordenada de cada camadas (adimensional)

$$\eta_i := \left( \frac{1}{2} - \beta_i \right)$$

Propriedades do concreto:

$$f_c := 0.85 \cdot \frac{f_{ck}}{1.4} = 30.357 \text{ MPa} \quad \varepsilon_{cu} := 3.5$$

$$E_s := 210000 \text{ MPa}$$

Propriedades da armadura:

$$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{1.15} = 434.783 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{yd} := \frac{f_{yd}}{E_s} \cdot 1000 = 2.07$$

Área total da armadura

$$A_{st} := \sum_{i=1}^{n_c} A_{sc_i} = 0.0031 \text{ m}^2$$

Número total de barras:

$$nt := \frac{A_{st}}{A_{sb_{1,1}}} = 10$$

Taxa mecânica

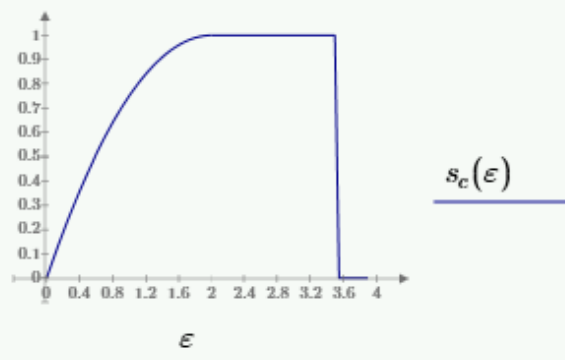
$$\omega := \frac{A_{st}}{b \cdot h} \cdot \frac{f_{yd}}{f_c} = 0.375$$

Diagrama de tensão-deformação do concreto

$$s_c(\varepsilon) := \begin{cases} \text{if } \varepsilon \leq 0 \\ \quad \| s \leftarrow 0 \\ \text{else if } 0 < \varepsilon \leq 2 \\ \quad \| s \leftarrow 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \\ \text{else if } 2 < \varepsilon \leq 3.5 \\ \quad \| s \leftarrow 1 \\ \text{else if } \varepsilon > 3.5 \\ \quad \| s \leftarrow 0 \\ \quad \| s \end{cases}$$

$$s_c(\varepsilon) = \frac{\sigma_c}{f_c} \quad (\text{Fator de adimensional})$$

$$\varepsilon := 0, 0.05 \dots 3.9$$

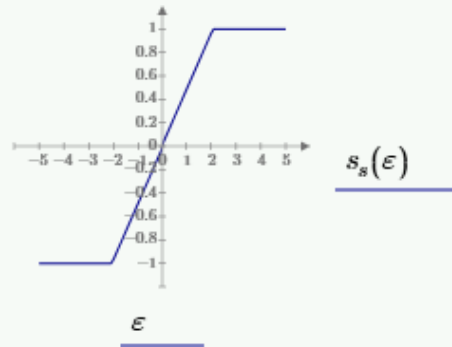


## Diagrama de tensão-deformação armadura

$$s_s(\varepsilon) := \begin{cases} \text{if } |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} s \leftarrow \frac{E_s}{f_{yd} \cdot 1000} \cdot \varepsilon \end{array} \right. \\ \text{else if } |\varepsilon| > \varepsilon_{yd} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} s \leftarrow \text{sign}(\varepsilon) \end{array} \right. \end{cases}$$

$$s_s(\varepsilon) = \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \quad (\text{Fator de dimensional})$$

$$\varepsilon := -5, -4.9 \dots 5$$



## Domínios de deformação na seção transversal

$$\varepsilon f(D) := \begin{cases} \text{if } 0 \leq D < 2 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 5 \cdot D - 10 \\ e_1 \leftarrow -10 \end{array} \right. \\ \text{else if } 2 \leq D < 7 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 0.7 \cdot D - 1.4 \\ e_1 \leftarrow -10 \end{array} \right. \\ \text{else if } 7 \leq D \leq 12 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 3.5 \\ e_1 \leftarrow 2 \cdot D - 24 \end{array} \right. \\ \text{else if } 12 < D < 13 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 3.5 \\ e_1 \leftarrow 3.5 \cdot \delta \cdot (D - 12) \end{array} \right. \\ \text{else if } 13 \leq D \leq 14 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 23 - 1.5 \cdot D \\ e_1 \leftarrow 2 \cdot D - 26 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$yf(D) := \begin{cases} \text{if } 0 \leq D < 13 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} y_2 \leftarrow \frac{h}{2} \\ y_1 \leftarrow d'_1 - \frac{h}{2} \end{array} \right. \\ \text{else if } 13 \leq D \leq 14 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} y_2 \leftarrow \frac{h}{2} \\ y_1 \leftarrow \frac{-h}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\eta f(D) := \frac{yf(D)}{h} \quad (\text{Coordenada adimensional})$$

$$\eta := \frac{y}{h} \quad (\text{Coordenada adimensional})$$

Valor da deformação para uma altura  $y$

$$\varepsilon(y, D) := \text{linterp}(yf(D), \varepsilon f(D), y)$$

Valor da deformação para uma altura  $y$  ( adimensional)

$$\varepsilon(\eta, D) := \text{linterp}(\eta f(D), \varepsilon f(D), \eta)$$

Para Diagrama Parábola-retângulo

Esforço normal

$$N_{rd}(D) := b \cdot h \cdot f_c \cdot \left( \int_{-0.5}^{0.5} s_c(\varepsilon(\eta, D)) d\eta + \omega \cdot \sum_{i=1}^{n_c} \left( \frac{n_i}{nt} \cdot s_s(\varepsilon(\eta_i, D)) \right) \right)$$

Momento fletor

$$M_{rd}(D) := b \cdot h^2 \cdot f_c \cdot \left( \int_{-0.5}^{0.5} s_c(\varepsilon(\eta, D)) \cdot \eta d\eta + \omega \cdot \sum_{i=1}^{n_c} \left( \frac{n_i}{nt} \cdot \eta_i \cdot s_s(\varepsilon(\eta_i, D)) \right) \right)$$

Para Diagrama retangular simplificado

Linha neutra para dado  $D$  (adimensional)  $\xi(D) = \frac{x(D)}{h}$  (Fator adimensional)

$$\xi(D) := \frac{\varepsilon f(D)_2}{\varepsilon f(D)_2 - \varepsilon f(D)_1} \cdot (\eta f(D)_2 - \eta f(D)_1)$$

$$r_c(D) := \begin{cases} \text{if } 0 \leq D \leq 2 \\ \quad \parallel r \leftarrow 0 \\ \text{else if } 2 < D < 13.304 \\ \quad \parallel r \leftarrow 0.8 \cdot \xi(D) \\ \text{else if } D \geq 13.304 \\ \quad \parallel r \leftarrow 1 \\ \parallel r \end{cases}$$

$$\beta_c(D) := \begin{cases} \text{if } 0 \leq D \leq 2 \\ \quad \parallel d \leftarrow 0 \\ \text{else if } 2 < D < 13.304 \\ \quad \parallel d \leftarrow 0.4 \cdot \xi(D) \\ \text{else if } D \geq 13.304 \\ \quad \parallel d \leftarrow 0.5 \\ \parallel d \end{cases}$$

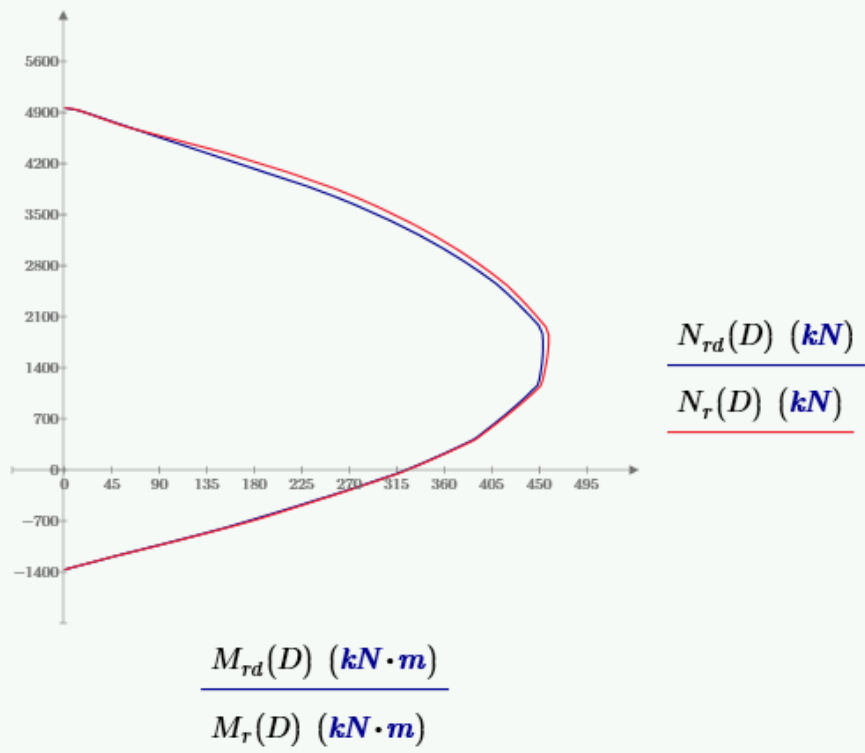
Esforço normal

$$N_r(D) := b \cdot h \cdot f_c \cdot \left( r_c(D) + \omega \cdot \sum_{i=1}^{n_c} \left( \frac{n_i}{nt} \cdot s_s(\varepsilon(\eta_i, D)) \right) \right)$$

Momento fletor

$$M_r(D) := b \cdot h^2 \cdot f_c \cdot \left( r_c(D) \cdot (0.5 - \beta_c(D)) + \omega \cdot \sum_{i=1}^{n_c} \left( \frac{n_i}{nt} \cdot \eta_i \cdot s_s(\varepsilon(\eta_i, D)) \right) \right)$$

$$D := 0, 0.1 \dots 14$$



## Apêndice B

Diagramas de interação para classes de resistência do concreto de 20 MPa, 30 MPa, e 40 MPa.

Figura 0.1: Diagramas de interação N, M<sub>x</sub>, 20MPa

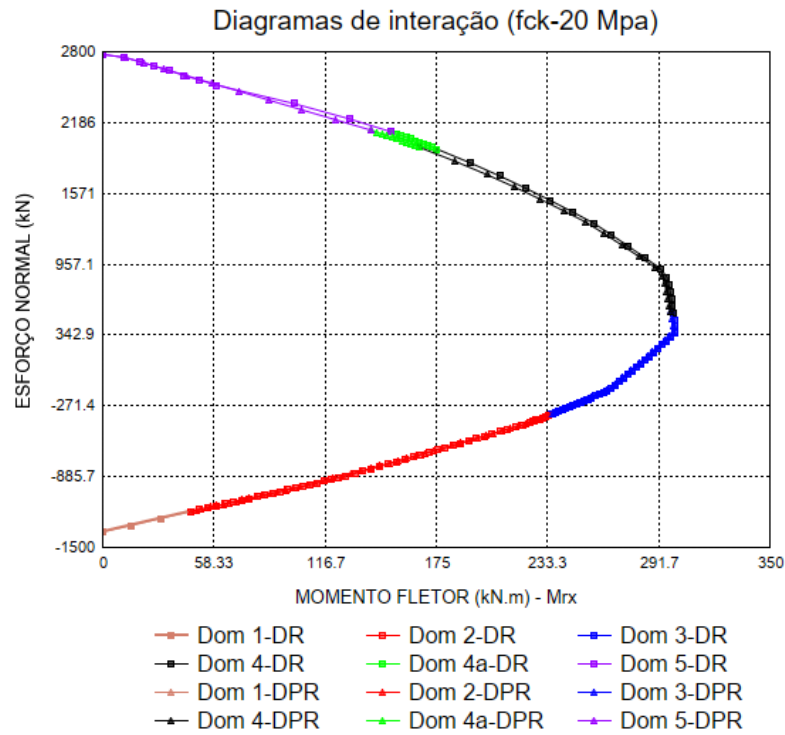
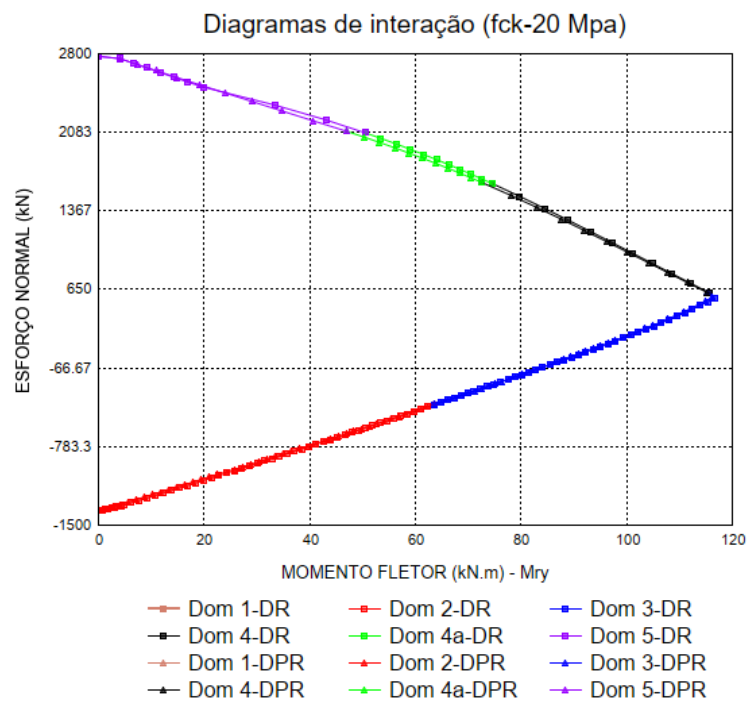
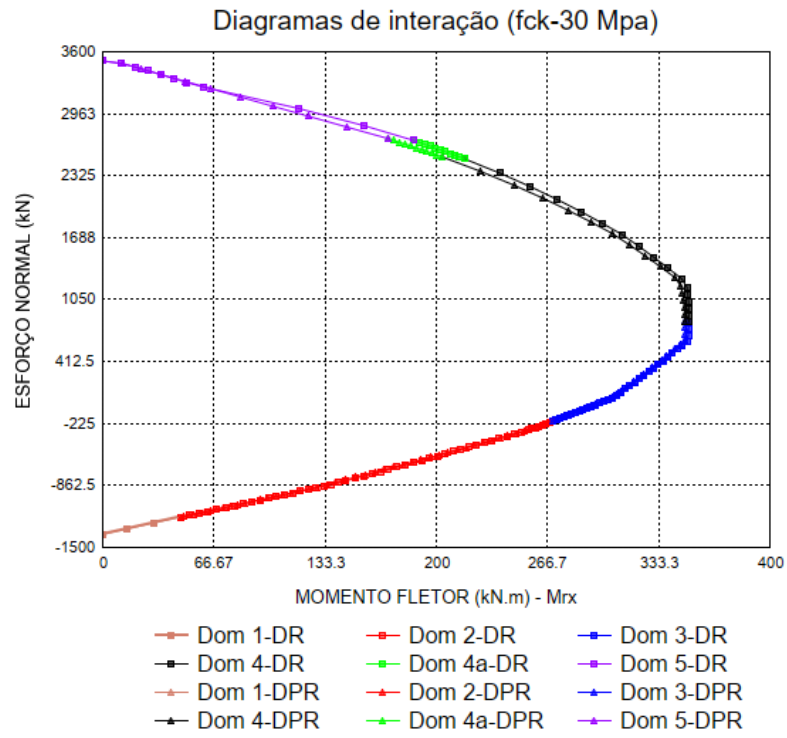


Figura 0.2: Diagramas de interação N, M<sub>y</sub>, 20MPa



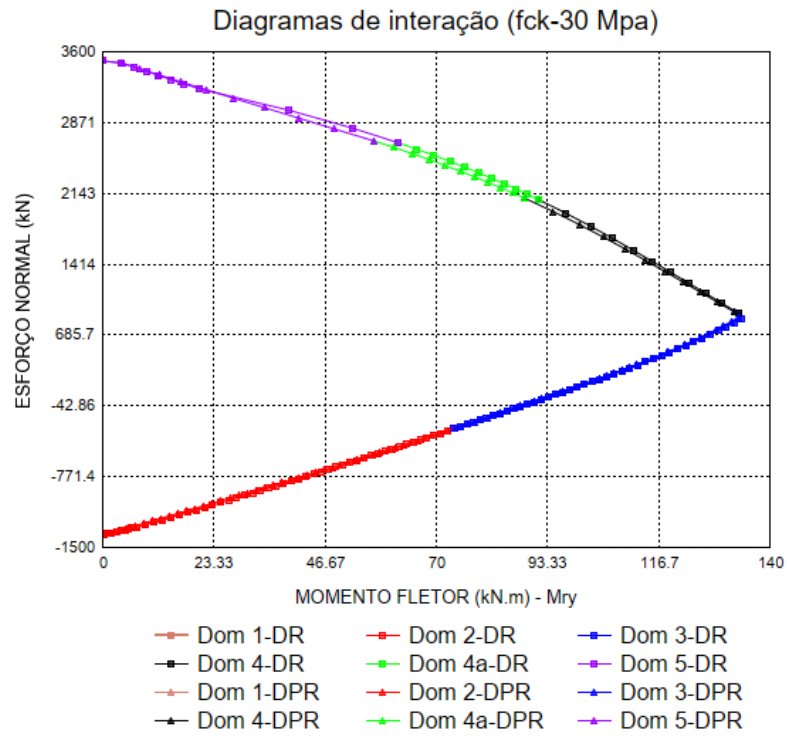
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 0.3: Diagramas de interação N, Mx , 30MPa



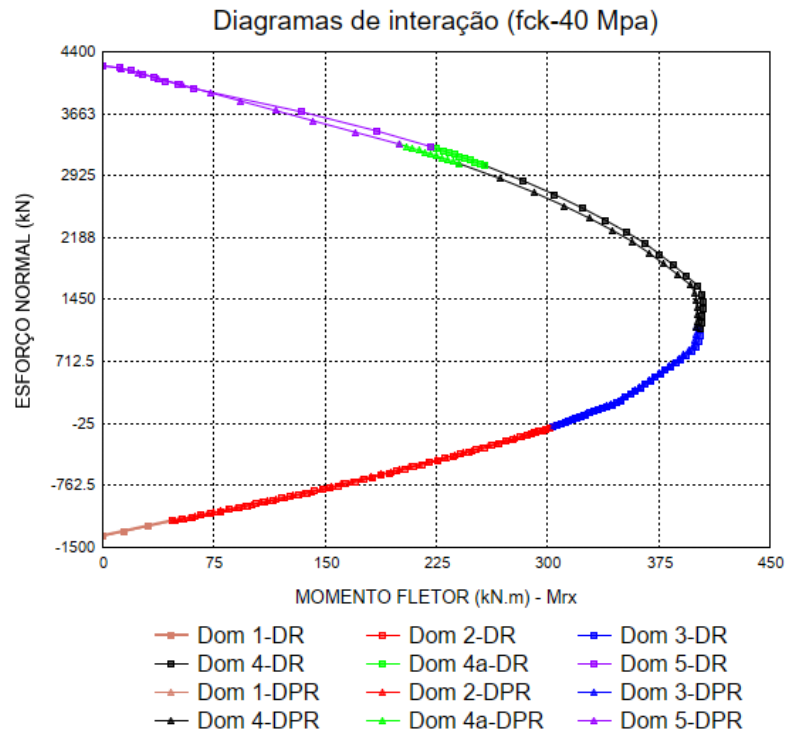
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 0.4: Diagramas de interação N, My , 30MPa



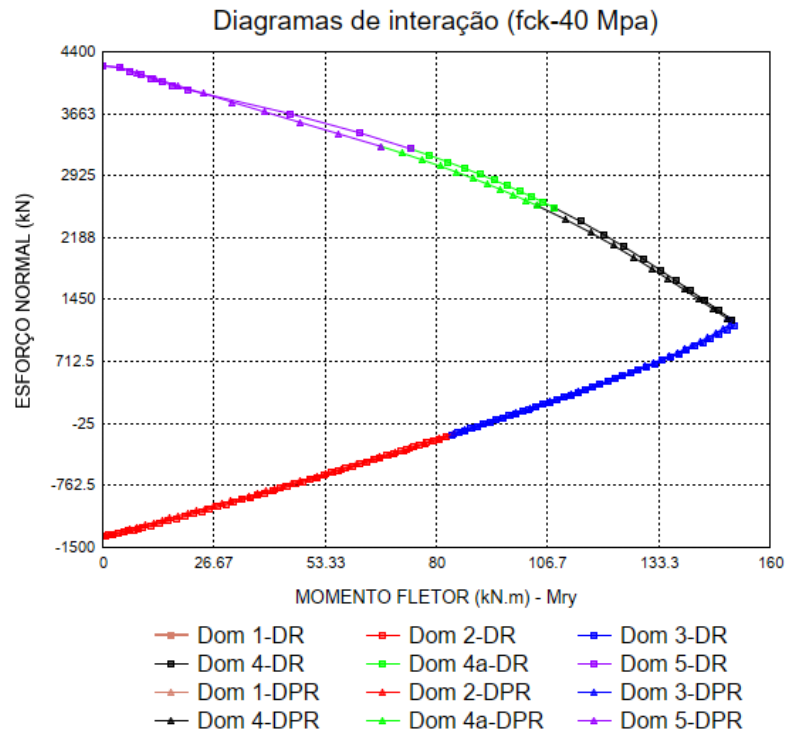
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 0.5: Diagramas de interação N, Mx , 40MPa



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 0.6: Diagramas de interação N, My , 40MPa



Fonte: Elaborada pelo autor