INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS
***CAMPUS* MACEIÓ**
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DOUGLAS FLOERING BREDA GONÇALVES

APLICAÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS EM PROBLEMAS REAIS

MACEIÓ, AL
2024

DOUGLAS FLOERING BREDA GONÇALVES

APLICAÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS EM PROBLEMAS REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento
Coorientador: Prof. Me. Hugo Santos Nunes
IFAL

MACEIÓ, AL
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
***Campus* Maceió**
Biblioteca Benevides Monte

519.2
G635a Gonçalves, Douglas Floering Breda.
Aplicações de variáveis aleatórias contínuas em problemas reais [recurso eletrônico] / Douglas Floering Breda Gonçalves. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 525 KB). – 2024.

Trabalho acadêmico com 52 folhas.
Inclui figuras e referências.
Orientação: Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento.
Coorientação: Prof. Me. Hugo Santos Nunes.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, Maceió, 2024.

1. Matemática. 2. Probabilidade. 3. Variáveis Aleatórias Contínuas – Aplicações. 4. Distribuições de Probabilidade. I. Título.

Franciane Monick Gomes de França
Bibliotecária – CRB 4/1831

DOUGLAS FLOERING BREDA GONÇALVES

APLICAÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS EM PROBLEMAS REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 01/08/2024

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
ARLYSON ALVES DO NASCIMENTO
Data: 07/02/2025 14:20:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento (Orientador)
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

gov.br Documento assinado digitalmente
HUGO SANTOS NUNES
Data: 07/02/2025 14:47:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Hugo Santos Nunes
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

gov.br Documento assinado digitalmente
RAFAEL DO SACRAMENTO LOPES
Data: 07/02/2025 14:43:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Rafael do Sacramento Lopes
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Dedico esse trabalho aos meus amigos e professores do curso de Matemática do IFAL e aos meus familiares que me acompanharam nessa aventura.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer inicialmente a Solange Floering Brêda, minha mãe, por me buscar incontáveis vezes no IFAL a noite e pelo apoio incondicional aos meus estudos, sem dúvida fizeram total diferença em minha formação. Agradecer ao meu orientador, professor Arlyson pelos conselhos, incentivos e puxões de orelha quase diários. Gostaria de agradecer ao meu co-orientador Professor e Amigo Hugo Nunes, por sempre se fazer presente e tirar minhas dúvidas durante o trabalho. Agradecer aos meus colegas de curso, pelos anos de amizade e comprometimento para com a matemática, em especial ao meu amigo Anderson Silva, uma das pessoas mais apaixonadas pela matemática que já conheci, e que tenta fazer todos se apaixonarem igualmente por ela, sem ele boa parte dos códigos desse trabalho não teriam sido feitos, corrigidos e otimizados, gostaria de agradecer imensamente ao professor Rafael por me estender a mão oferecendo ajuda, revisar o trabalho, fazer incontáveis criticas construtivas e propor diversas mudanças que contribuíram para o bom andamento do trabalho.

Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não é a posse, mas o ato de chegar lá, que nos dá a maior satisfação.

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo explorar as aplicações das variáveis aleatórias contínuas em problemas reais, abordando conceitos fundamentais de probabilidade e suas distribuições. O estudo inicia com uma introdução ao conceito de probabilidade, eventos e espaço amostral, avançando para as regras aditivas e multiplicativas que regem a combinação de eventos. No decorrer do trabalho, são discutidas as variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidade, com foco nas diferenças entre distribuições discretas e contínuas. Particular atenção é dada às variáveis aleatórias contínuas. Nesse contexto, são apresentados conceitos como a função densidade de probabilidade, esperança, variância e desvio padrão, essenciais para a análise dessas variáveis. O Estudo explora três distribuições de probabilidade contínuas: a distribuição Uniforme, a Normal e a Exponencial, detalhando suas características e comportamentos em diferentes cenários. Na última parte do trabalho, são apresentadas aplicações práticas dessas distribuições em contextos reais, demonstrando a utilidade das variáveis aleatórias contínuas na modelagem de fenômenos em diversas áreas como finanças, engenharia, ciência de dados, entre outras.

Palavras-chave: Probabilidade. Variáveis Aleatórias Contínuas. Distribuições de Probabilidade. Aplicações.

ABSTRACT

The present work aims to explore the applications of continuous random variables in real problems, addressing fundamental concepts of probability and their distributions. The study begins with an introduction to the concept of probability, events and sample space, moving on to the additive and multiplicative rules that govern the combination of events. During the work, random variables and their probability distributions are discussed, focusing on the differences between discrete and continuous distributions. Particular attention is paid to continuous random variables. In this context, concepts such as the probability density function, expectation, variance and standard deviation are presented, which are essential for the analysis of these variables. The Study explores three continuous probability distributions: the Uniform, the Normal and the Exponential distribution, detailing their characteristics and behavior in different scenarios. In the last part of the work, practical applications of these distributions in real contexts are presented, demonstrating the usefulness of continuous random variables in modeling phenomena in various areas such as finance, engineering, data science, among others.

Keywords: Probability. Continuous Random Variables. Probability Distributions. Applications.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFAL	Instituto Federal de Alagoas
DCET	Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
PRPGI	Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação

LISTA DE SÍMBOLOS

π	Letra grega Pi
τ	Letra grega Tau
ε	Letra grega épsilon
e	Número de Euler
i	Número imaginário
$\in$	Pertence
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$\therefore$	Portanto
$\Rightarrow$	Implica que
$\iff$	Se, e somente se
$\neq$	Diferente
$\leq$	Menor que ou igual que
$\geq$	Maior que ou igual que
$\approx$	Aproximadamente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As variáveis aleatórias contínuas são fundamentais na teoria da probabilidade e na estatística, desempenhando um papel crucial na modelagem de fenômenos tanto naturais quanto artificiais. Sua história remonta aos primórdios da matemática e da teoria da probabilidade a partir de Girolamo Cardano (1501-1576).

Vamos inicialmente, através de alguns autores da história da matemática, tentar construir um panorama histórico sobre a teoria da probabilidade e estatística. Essa abordagem histórica permite compreender como os conceitos probabilísticos foram sendo formulados e adaptados ao longo do tempo para atender a diferentes demandas da sociedade. Destacamos a importância da evolução histórica e científica na reflexão sobre o impacto cultural e técnico da probabilidade no contexto educacional e acadêmico brasileiro.

De acordo com Eves (2011), Cardano era um personagem extraordinário da História da Matemática, pois estudou e escreveu sobre aritmética, astronomia, física, medicina e outros assuntos. Segundo os principais pesquisadores da história da matemática, o início da teoria de probabilidades teve sua motivação nos jogos de azar, "Cardano escreveu um manual do jogador em que abordou algumas questões interessantes de probabilidade" (Howard, 2011, p.37)

A Lei do espaço amostral e o cálculo em forma de fração também foram formulados por Cardano,

> "a regra geral para o cálculo dos possíveis resultados obtidos em eventos aleatórios como sendo a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao evento". (TOMAZ, 2011 apud NEVES; VAN DER GELD; CHAQUIAM, 2018, p. 09).

No século XVII, Blaise Pascal e Pierre de Fermat iniciaram os estudos sobre o cálculo de probabilidades, os teóricos se aprofundaram em resolver problemas envolvendo possibilidades, abrindo um leque de pesquisas para outros ramos.

Contudo, foi apenas no século XVIII, com os trabalhos de Abraham de Moivre, que surgiram as bases da teoria das probabilidades. No século XIX, Pierre-Simon Laplace e Carl Friedrich Gauss deram importantes contribuições para o desenvolvimento dessa teoria, estabelecendo conceitos fundamentais como a distribuição normal.

> "o matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), que introduziu a probabilidade no mundo da "Matemática" oficialmente, em seu livro Théorie Analytique des Probabilités (Teoria Analítica das Probabilidades) de 1812, e partir deste, os estudos da probabilidade ganharam outra dimensão de pesquisa". (EVES, 2011, p. 468).

Laplace escreveu e publicou diversos artigos sobre a teoria da probabilidade, reunindo as ideias de Bernoulli, De Moivre, Bayes, Lagrange, entre outros importantes matemáticos. Foi uma sistematização dos conhecimentos e obras de teóricos que estudaram sobre probabilidade e que fortaleceram os estudos que Laplace defendia.

> "a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis." (Queiroz; Coutinho, 2007, p.35).

Definição dada por Laplace, amplamente utilizada, presente no ensino até os dias atuais. Foi a partir de Laplace que as disciplinas, cálculo de probabilidade e estatística, interagiram e chegou ao desenvolvimento da análise combinatória.

Segundo Stigler, o desenvolvimento da teoria das probabilidades nos séculos XVII e XVIII estabeleceu as bases para a compreensão moderna da incerteza e da modelagem estatística, sendo fundamental o trabalho de pioneiros como Pascal, Fermat, de Moivre, Laplace e Gauss. (Stigler, 1990).

Stigler discute como os avanços na teoria das probabilidades começaram a tomar forma com contribuições fundamentais desses pensadores na consolidação das ideias probabilísticas aplicadas em diversos campos, não mais voltados apenas para jogos de azar.

O conceito de variáveis aleatórias contínuas foi formalizado no início do século XX, com os trabalhos de matemáticos como Émile Borel e Norbert Wiener, que desenvolveram a teoria das probabilidades moderna. Esses matemáticos introduziram uma definição mais rigorosa de variáveis aleatórias contínuas, que será explorada no presente trabalho, juntamente com suas propriedades e, sobretudo, suas aplicações.

Segundo Junqueira (2015), no início do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento do conhecimento, nessa época, na Rússia, surgiu a célebre escola de San Petersburgo e nela matemáticos como Kolmogorov (1903-1987) "que axiomatizou corretamente a Teoria das Probabilidades e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional".(Junqueira, 2015, p.04).

> "A partir de Kolmogorov, o desenvolvimento das probabilidades tem seu crescimento exponencial, sendo hoje um ramo importante da matemática" (ALMEIDA, 2005, p. 15).

A importância das variáveis aleatórias contínuas na matemática e nas ciências aplicadas é inquestionável. Elas são usadas para modelar uma ampla gama de fenômenos, desde processos físicos e naturais até sistemas financeiros e econômicos. Além disso, são essenciais em áreas como engenharia, medicina e computação.

Dentre as principais aplicações, destaca-se a modelagem de fenômenos físicos, como o movimento de partículas em um fluido, o comportamento de materiais em diferentes condições e o desempenho de sistemas mecânicos. Na economia e finanças, as variáveis aleatórias contínuas são usadas para modelar o comportamento de mercados financeiros, preços de ativos e riscos de investimento, por exemplo. Em resumo, as variáveis aleatórias contínuas desempenham um papel central na modelagem e análise de fenômenos complexos em diversas áreas do conhecimento.

> "A história da probabilidade revela uma relação intrínseca entre a evolução do conhecimento matemático e a busca de respostas para problemas cotidianos, desde os jogos de azar no período renascentista até as aplicações científicas contemporâneas" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 80).

Depois da construção desse panorama histórico acerca do desenvolvimento da probabilidade, este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No capítulo dois, são abordados os conceitos fundamentais de probabilidade, essenciais para a compreensão do tema. Inicialmente, introduzimos importantes noções, como experimento aleatório, espaço amostral e contagem de pontos amostrais. Em seguida, definimos a probabilidade, suas regras aditivas e multiplicativas, além do conceito de independência de eventos. Cada um desses tópicos é acompanhado de diversos exemplos ilustrativos.

No capítulo três, iniciamos o estudo das variáveis aleatórias, destacando sua importância na teoria da probabilidade. Diferenciamos variáveis aleatórias discretas e contínuas, sendo esta última o foco principal do trabalho. Introduzimos a função densidade de probabilidade, que descreve o comportamento dessas variáveis, e exploramos sua relação com o cálculo de integrais. Além disso, abordamos com maior rigor as medidas de tendência central para variáveis aleatórias contínuas, como esperança, variância e desvio padrão. Por fim, apresentamos alguns dos principais modelos de distribuição de probabilidade, como a distribuição uniforme e a distribuição exponencial.

O capítulo quatro é dedicado às aplicações. Nele, exploramos o papel das variáveis aleatórias contínuas em contextos reais, como a distribuição de renda em uma população, a demanda diária de um produto em um supermercado e a posição de uma imperfeição em componentes circulares, considerando suas variações no processo de fabricação. Destacamos, assim, a relevância dessas variáveis em diversas áreas do conhecimento, incluindo engenharia, economia, ciências sociais e naturais, além da análise de dados.

2 NOÇÕES DE PROABILIDADE

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórico-matemática necessária para a realização e compreensão do presente trabalho, revisando conceitos iniciais fundamentais. Iniciaremos com a definição moderna de Probabilidade, discutindo suas propriedades. Em seguida, abordaremos o papel central das variáveis aleatórias, com foco nos casos contínuos e nas principais distribuições no estudo da estatística e da probabilidade, explorando os conceitos fundamentais dessas importantes ferramentas. Neste Capítulo a principal referência é (Walpole, 2009).

2.1 PROBABILIDADE

De acordo com as noções da estatística, um *experimento* refere-se a qualquer processo ou procedimento que gera um conjunto de dados observáveis. Pode envolver a repetição de uma ação ou situação sob determinadas condições para analisar e registrar os resultados. Os experimentos são conduzidos para estudar padrões e comportamentos em fenômenos onde os resultados não podem ser previstos com certeza, pois estão sujeitos a variações aleatórias e à probabilidade, como por exemplo, o lançamento de uma moeda onde podemos obter dois possíveis resultados: cara ou coroa. Com isso, vamos definir o conjunto que é formado por todos os experimentos possíveis.

2.1.1 ESPAÇO AMOSTRAL

Definição 2.1. *O conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento estatístico é chamado de espaço amostral e é representado pelo símbolo $\mathscr{S}$.*

Cada resultado é chamado de *elemento* do espaço amostral. Se o espaço amostral contém um número finito de elementos, podemos representá-lo listando seus membros, separados por vírgulas, e delimitando-os entre chaves.

Exemplo 2.1. *No lançamento de um dado de 6 faces não viciado de forma aleatória, o espaço amostral deste experimento é:*

$$\mathscr{S}_1 = \{1,2,3,4,5,6\},$$

que representa os possíveis resultados que podem ser obtidos no experimento. Se estivermos interessados em saber se o número será par ou ímpar, o espaço amostral terá simplesmente:

$$\mathscr{S}_2 = \{par,\ ímpar\}.$$

2.1.2 EVENTOS

Para qualquer experimento dado, podemos estar interessados na ocorrência de certos eventos em vez de no resultado de um elemento específico do espaço amostral. Para cada evento, atribuímos uma coleção de pontos amostrais, que constituem um subconjunto do espaço amostral. Tal subconjunto representa todos os elementos para os quais o evento é verdadeiro.

Definição 2.2. *Um evento é um subconjunto de um espaço amostral.*

O número de elementos do evento é representado por $n(A)$, sendo A o evento em questão, ele pode conter:

a) nenhum elemento, isto é, $n(A) = 0$, ou;

b) todos os elementos de um espaço amostral, isto é, $n(A) = n(\mathscr{S})$.

Exemplo 2.2. *Em um lançamento de um dado de* 6 *faces não viciado. Podemos fazer as seguintes observações:*

a) O evento "sair um número par" é dado por $A = \{2,4,6\}$*, onde* $n(A) = 3$.

b) O evento "sair um número menor que 5" é dado por $A = \{1,2,3,4\}$*, onde* $n(A) = 4$.

c) O evento "sair um número maior que 6" é dado por $A = \varnothing$*, onde* $n(A) = 0$.

O complemento de um evento em probabilidade refere-se ao conjunto de todos os resultados no espaço amostral que não pertencem ao evento em questão. Em outras palavras, se o evento A representa um conjunto de possíveis resultados, o complemento de A é o conjunto de resultados em que o evento A não ocorre.

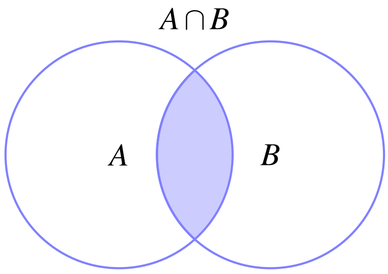
Definição 2.3. *O complemento de um Evento A relacionado a* $\mathscr{S}$ *é o subconjunto de todos os elementos de* $\mathscr{S}$ *que não estão em A. Denotamos o complemento de A pelo símbolo* A'.

Exemplo 2.3. *Considere que uma moeda comum (não viciada) é jogada e assumimos que ela só pode cair com uma de suas faces voltada para cima, então ela pode mostrar ou "cara" ou "coroa". Como esses dois eventos são as únicas possibilidades que podem ocorrer, eles são, por definição, complementares.*

Definição 2.4. *A interseção de dois eventos A e B, denotada pelo símbolo* $A \cap B$*, é o evento que contém todos os elementos comuns a A e B.*

Exemplo 2.4. *Imagine que temos dois grupos em que ambos os grupos existem pessoas que usam óculos, e estamos interessados exatamente nesse grupo de pessoas, logo na interseção.*

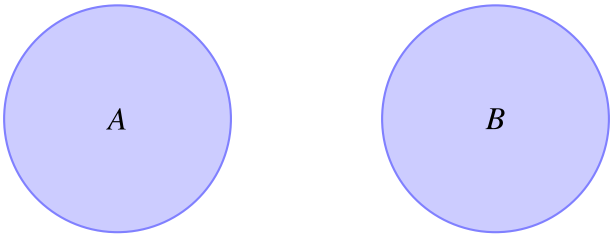
Figura 1 – Eventos com elementos em comum.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.5. *Dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, ou disjuntos, quando* $A \cap B = \varnothing$*, ou seja, quando não possuem elementos em comum.*

Figura 2 – Eventos mutuamente exclusivos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.5. *É comum estarmos interessados, por exemplo, na ocorrência de pelo menos um de dois eventos associados a um experimento. Considere que no lançamento de um dado, tivemos os seguintes eventos:*

$$A = \{2, 4, 6\} \quad e \quad B = \{4, 5, 6\},$$

podemos estar interessados na ocorrência de A ou B, ou ambos. Tal evento, chamado de união de A e B, ocorrerá se o resultado for um elemento do subconjunto:

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}.$$

Definição 2.6. *A união de dois eventos A e B, denotada pelo símbolo* $A \cup B$*, é o evento que contém todos os elementos que pertencem a A ou B, ou a ambos.*

Exemplo 2.6. *Seja P o evento no qual um funcionário de uma empresa, selecionado aleatoriamente, é ruivo. Seja Q o evento no qual o funcionário selecionado tem mais de 30 anos. Então o evento* $P \cup Q$ *é o conjunto de todos os funcionários ruivos, ou que tem mais de 30 anos, ou que satisfazem ambos.*

2.1.3 CONTAGEM DE PONTOS AMOSTRAIS

A contagem de pontos amostrais está intimamente ligada à combinatória, pois muitos problemas de probabilidade envolvem a determinação do número de resultados possíveis (pontos amostrais) de um experimento. A combinatória fornece as ferramentas matemáticas para contar esses resultados de maneira eficiente, especialmente quando o número de possibilidades é grande.

Definição 2.7. *Seja o fatorial de n elementos onde $n \in \mathbb{N}$, para todo $n \geq 2$, denotado como $n!$. Temos que:*

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1.$$

Combinações são amplamente usadas em áreas como estatística e probabilidade. Em um problema de combinações, o que importa são quais elementos estão no grupo, e não a sequência em que são escolhidos. A fórmula usada para calcular o número de combinações é dada no seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja A um conjunto definido por $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, com seus elementos distintos entre si, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$. Seja também p a quantidade de elementos dos subconjuntos de A que desejamos contar, onde $n \geq p$. Definimos como combinação simples de n elementos tomados p a p, denotado por $C_{n,p}$ a contagem de subconjuntos possíveis de A e calculamos por:*

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,.$$

Exemplo 2.7. *Um menino pede à sua mãe cinco cartuchos de videogame de sua coleção de dez jogos de fliperama e cinco de jogos de esportes. Quantas maneiras possíveis existem para que a mãe dele pegue três jogos de fliperama e dois de esportes, respectivamente?*

Solução. O número de maneiras de selecionar três cartuchos entre dez é:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120.$$

O número de maneiras para selecionar dois cartuchos dentre cinco é:

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$$

Desta forma, temos

$$120 \cdot 10 = 1200 \text{ maneiras.}$$

2.2 PROBABILIDADE DE UM EVENTO

Definição 2.8. *Se um experimento pode resultar em qualquer um de N diferentes resultados equiprováveis, e se exatamente n desses resultados correspondem ao Evento A, então a probabilidade do evento A é:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

Definição 2.9. *A probabilidade de um evento A é a soma das probabilidades de todos os pontos amostrais em A. Por isso:*

a) $0 \leq P(A) \leq 1$. *b)* $P(\varnothing) = 0$. *c)* $P(S) = 1$.

Além disso, se $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *é uma sequência de eventos mutuamente exclusivos, então:*

d) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$.

Exemplo 2.8. *Em uma pesquisa sobre a preferência de determinado refrigerante* 25 *estudantes escolheram o refrigerante A,* 10 *o refrigerante B,* 10 *o refrigerante C e* 8 *o refrigerante D. Se uma pessoa é selecionada aleatoriamente para responder a uma pergunta, determine a probabilidade de que o estudante escolhido goste:*

a) De refrigerante A,

b) De refrigerante B ou D.

O número total de estudantes que responderam à pesquisa é 53, todos com a mesma chance de serem selecionados. Já que 25 dos 53 estudantes estão escolhendo o refrigerante A, a probabilidade do evento é:

$$P(A) = \frac{25}{53} = 0,47.$$

Já que 18 dos 53 estudantes optaram por B ou D, segue que a probabilidade de B e D é: $P(B) = \frac{10}{53}$ e $P(D) = \frac{8}{53}$. Então,

$$\begin{aligned} P(B \cup D) &= P(B) + P(D) \\ &= \frac{10}{53} + \frac{8}{53} = \frac{18}{53} = 0,33. \end{aligned}$$

Substituindo os valores

Exemplo 2.9. *Uma moeda é jogada duas vezes. Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos uma cara?*

Solução. O espaço amostral para esse evento é:

$$S = \{CC, CK, KC, KK\},$$

onde C = cara e K = coroa. Se a moeda for honesta, cada um desses resultados poderá ocorrer igualmente. Se A representa o evento da ocorrência de pelo menos uma cara, então:

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

2.2.1 REGRAS ADITIVAS

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela regra da adição de probabilidades.

Teorema 2.2. *Se A e B são dois eventos, então:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Do mesmo modo, temos que dado dois eventos, A e B, de um espaço amostral S, tem-se que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

em que:

a) $n(A)$ é o número de elementos do evento A.

b) $n(B)$ é o número de elementos do evento B.

c) $n(A \cap B)$ é o número de elementos de A interseção com B.

d) $n(A \cup B)$ é o número de elementos de A união com B.

Dividindo todos os membros da igualdade acima por $n(S)$, que corresponde ao número de elementos do espaço amostral, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B))}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}.$$

Mas,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = P(A \cup B).$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Note que a regra da adição pode ser simplificada, se, e somente se, os eventos A e B forem disjuntos (ou mutuamente exclusivos):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

pois, neste caso,

$$A \cap B = \varnothing \;\; \Rightarrow \;\; P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0.$$

Exemplo 2.10. *Dois dados de* 6 *lados serão lançados simultaneamente, e a soma dos resultados obtidos será anotada. Nessa situação, qual é a probabilidade de o resultado ser um número múltiplo de* 3 *ou maior que* 8*?*

Solução. Sejam os eventos dados por:

$$\begin{aligned} A &= \text{Um número múltiplo de 3.} \\ B &= \text{Um número maior que 8.} \end{aligned}$$

Temos que há 12 resultados múltiplos de 3 e 10 resultados maiores que 8, ou seja:

$$\begin{aligned} A &= (1,2);(2,1);(1,5);(5,1);(2,4);(4,2);(3,3);(3,6);(6,3);(4,5);(5,4);(6,6). \\ B &= (3,6);(6,3);(4,5);(5,4);(5,5);(4,6);(6,4);(5,6);(6,5);(6,6). \end{aligned}$$

Assim:

$$n(A) = 12 \qquad \text{e} \qquad n(B) = 10.$$

A interseção, que são os resultados maiores que 8 e múltiplos de 3, ou seja, o 9 que se repete 4 vezes e o 12, logo:

$$A \cap B = (3,6);(6,3);(4,5);(5,4);(6,6).$$

$$n(A \cap B) = 5.$$

Sabemos também que nosso espaço amostral é composto por 36 resultados, que são as somas que vão de 2 até 12,

$$\begin{array}{cccccc} (1,1); & (1,2); & (1,3); & (1,4); & (1,5); & (1,6) \\ (2,1); & (2,2); & (2,3); & (2,4); & (2,5); & (2,6) \\ (3,1); & (3,2); & (3,3); & (3,4); & (3,5); & (3,6) \\ (4,1); & (4,2); & (4,3); & (4,4); & (4,5); & (4,6) \\ (5,1); & (5,2); & (5,3); & (5,4); & (5,5); & (5,6) \\ (6,1); & (6,2); & (6,3); & (6,4); & (6,5); & (6,6). \end{array}$$

Logo:

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= \frac{n(A)}{n(\Omega)}+\frac{n(B)}{n(\Omega)}-\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} \\ &= \frac{12}{36}+\frac{10}{36}-\frac{5}{36} \\ &= \frac{17}{36}. \end{aligned}$$

Corolário 2.1. *Se A e B são mutuamente exclusivos, então:*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

O Corolário 2.1 é resultado imediato do Teorema 2.2, já que se A e B são mutuamente exclusivos $A\cap B=\varnothing$.

Teorema 2.3. *Se A e A' são eventos complementares, então:*

$$P(A)+P(A')=1.$$

Sabemos que $A\cup A'=\Omega$ onde Ω é o espaço amostral, logo $P(A\cup A')=1$. Temos também que A e A' são mutuamente exclusivos, logo

$$P(A\cup A')=P(A)+P(A'),$$

comparando temos:

$$P(A)+P(A')=1\Rightarrow P(A')=1-P(A).$$

Perceba que sendo A e B dois eventos tais que,

$$P(A)+P(B)=1,$$

não implica A e B serem complementares, pois ainda há a possibilidade de:

$$A\cap B\neq\varnothing.$$

Definição 2.10 (Probabilidade Condicional)**.** *A probabilidade de um evento B ocorrer quando sabemos que algum evento A ocorreu é chamada de probabilidade condicional e é denotada por* $P(B\mid A)$.

Para calcular a probabilidade $P(B\mid A)$, ou seja, a probabilidade de que B ocorra dado que A ocorre ou simplesmente a probabilidade de B dado A, utilizamos:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}. \tag{1}$$

Essa probabilidade só existe se os eventos possuírem o mesmo espaço amostral (diferente do vazio) e se B não for um evento impossível. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.11. *Em um baralho normal com* 52 *cartas queremos calcular as seguintes probabilidades:*

a) $A =$ *Retirar um Rei.*

b) $B =$ *Não retirar um número.*

c) $C =$ *Uma carta de Copas.*

Solução.

a) Como existem 4 reis no baralho, um de cada naipe nossa probabilidade é calculada e simplificada da seguinte maneira:
$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

b) Não retirar um número está relacionado diretamente com as cartas especiais do baralho, são elas, As, Valete, Dama e Rei, totalizando 12, por isso:
$$P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

c) Uma carta de Copas representa um dos 4 naipes do baralho de 52 cartas, logo:
$$P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Agora veja como o espaço amostral irá ser reduzido quando pensamos em probabilidades condicionais a eventos anteriores:

a) $P(B \mid A)$ Retirar um Rei, dado que sabemos que não saiu um número. Se já sabemos que não saiu um número, o espaço amostral é reduzido para as 12 cartas especiais mencionadas anteriormente. Assim,
$$P(B \mid A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

b) $P(C \mid A)$ Probabilidade de sair Rei, dado que saiu uma carta de Copas. Por sua vez, o espaço amostral é reduzido apenas para as 13 cartas do naipe de Copas. Assim,
$$P(C \mid A) = \frac{1}{13}.$$

Veja que $P(A)$ se manteve igual a $P(C \mid A)$, nesse caso o evento A é independente do evento C. Vamos agora tratar de eventos independentes e mostrar como as probabilidades condicionais estão relacionadas.

2.2.2 EVENTOS INDEPENDENTES

Definição 2.11. *Dois Eventos A e B são independentes se, e somente se,*

$$P(B \mid A) = P(B) \quad ou \quad P(A \mid B) = P(A),$$

desde que as probabilidades condicionais existam. Caso contrário, A e B serão dependentes.

Exemplo 2.12. *Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer coroa e um número primo?*

Solução. Para resolver o problema, analisamos os espaços amostrais possíveis e favoráveis.

- Evento A: Obter "Coroa"no lançamento de uma moeda.
- Evento B: Obter um número primo no lançamento de um dado.

No lançamento da moeda, há dois resultados possíveis: {Coroa, Cara}. Assim,

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Os números primos entre 1 e 6 são: {2, 3, 5}. Total de números possíveis no dado: 6. Assim,

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Imagine que você joga a moeda primeiro e obtém "Coroa". Isso não muda em nada a probabilidade de o dado mostrar 2, 3 ou 5, porque o dado é lançado de forma completamente separada. Assim, não há relação causal ou dependência entre esses eventos. Os eventos são considerados independentes quando a ocorrência de um deles não influencia ou altera a probabilidade de ocorrência do outro.

Portanto, a probabilidade de ocorrer "Coroa"e um número primo é dada por

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Podemos notar que, no Exemplo acima, o evento é independente, ou seja, um pode ocorrer sem a interferência do outro.

2.2.3 REGRAS MULTIPLICATIVAS

Multiplicando a Equação (1) por $P(A)$ obtemos a importante regra multiplicativa a seguir, que nos permite calcular a probabilidade de que dois eventos ocorrerão.

Teorema 2.4. *Se em um experimento ambos os eventos A e B podem ocorrer, então:*

$$P(A \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B \mid A),$$

desde que $P(A) > 0$.

Então, a probabilidade de que ambos A e B ocorram é igual à probabilidade de que A ocorra multiplicada pela probabilidade condicional de que B ocorra, dado que A ocorre. Em outras palavras, não importa qual evento é atribuído a A e qual é atribuído a B.

Teorema 2.5. *Dois eventos A e B são independentes se, e somente se,*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Portanto, para obter a probabilidade de que ambos os eventos ocorrerão, simplesmente determinamos o produto de suas probabilidades individuais.

Para mais detalhes consulte o Capítulo 2-Probabilidade, pág. 39 de (**Walpole**).

Exemplo 2.13. *Uma urna contém* 2 *bolas brancas,* 3 *pretas e* 4 *verdes. Se duas bolas são retiradas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de ambas serem verdes?*

Solução. Considerando os dados:

- Bolas brancas: 2.
- Bolas pretas: 3.
- Bolas verdes: 4.

O total de bolas na urna é dado por:

$$\text{Total} = 2 + 3 + 4 = 9.$$

Para calcular a probabilidade de retirar uma bola verde na primeira extração, temos:

$$P(1^{\text{a}} \text{ bola verde}) = \frac{\text{Número de bolas verdes}}{\text{Total de bolas}} = \frac{4}{9}.$$

Como a extração é feita com reposição, a probabilidade de retirar uma bola verde na segunda extração permanece a mesma:

$$P(2^{\text{a}} \text{ bola verde}) = \frac{\text{Número de bolas verdes}}{\text{Total de bolas}} = \frac{4}{9}.$$

Como os eventos são independentes, a probabilidade conjunta de retirar duas bolas verdes é:

$$P(\text{duas bolas verdes}) = P(1^{\text{a}} \text{ bola verde}) \times P(2^{\text{a}} \text{ bola verde}) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}.$$

Portanto, a probabilidade de que ambas as bolas retiradas da urna sejam verdes, ao realizar as extrações com reposição, é

$$P(\text{duas bolas verdes}) = \frac{16}{81}.$$

É importante observar que a probabilidade de retirar uma bola verde na segunda extração não é afetada pela retirada da bola verde na primeira extração. Isso caracteriza os eventos como independentes.

3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

As variáveis aleatórias são fundamentais na teoria da probabilidade e na estatística, pois permitem modelar e quantificar incertezas em fenômenos aleatórios. Começaremos definindo o que é uma variável aleatória e discutindo como ela pode ser utilizada para modelar fenômenos em diversas áreas do conhecimento. Em seguida, avançaremos para a compreensão das distribuições de probabilidade, que descrevem como os valores de uma variável aleatória estão distribuídos.

Definição 3.1 (Variável Aleatória)**.** *Uma variável aleatória é uma função real (isto é, que assume valores em $\mathbb{R}$), definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa um número real a cada evento de Ω.*

Uma variável aleatória é considerada discreta se ela pode assumir um número finito ou contável de valores. Isso significa que os valores que a variável pode assumir são isolados e podem ser listados. Por exemplo, o número de caras ao lançar uma moeda três vezes é uma variável aleatória discreta, pois pode assumir os valores 0, 1, 2 ou 3. As variáveis aleatórias discretas são frequentemente descritas por uma função de massa de probabilidade (fmp), que atribui a cada valor possível da variável a probabilidade correspondente.

Por outro lado, uma variável aleatória é classificada como contínua se ela pode assumir qualquer valor em um intervalo ou conjunto contínuo de números. Isso significa que existem infinitos valores possíveis que a variável pode assumir dentro de um intervalo específico. Um exemplo comum de variável aleatória contínua é a altura de indivíduos, que pode variar em um intervalo contínuo. As variáveis aleatórias contínuas são descritas por uma função de densidade de probabilidade (fdp), que permite calcular a probabilidade de a variável assumir valores dentro de um intervalo específico, em vez de valores exatos.

O entendimento das variáveis aleatórias é essencial para a análise de dados e a tomada de decisões em situações de incerteza. A escolha entre variáveis aleatórias discretas e contínuas depende da natureza do fenômeno que está sendo modelado e das características dos dados disponíveis.

3.1 VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Definição 3.2. *O conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ é uma função de probabilidade, função de massa de probabilidade ou distribuição de probabilidade da variável discreta X, se para cada resultado possível x,* *a)* $f(x) \geq 0$.

(A função deve assumir valores não negativos).

b) $\sum_x f(x) = 1$.

(O somatório de todas as probabilidades é igual a 1, representando 100%).

c) $P(X = x) = f(x)$.

(A probabilidade da variável aleatória X assumir o valor x é igual a $f(x)$).

Definição 3.3. *A função de distribuição acumulada $F(X)$ de uma variável aleatória discreta X, que tem distribuição de probabilidade $f(x)$ é:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum f(x),$$

para $-\infty < x < \infty$.

Exemplo 3.1. *Imagine que em uma obra se devolvem três capacetes de segurança, aleatoriamente, para três funcionários, que já os haviam usado anteriormente. Se Sandro, João e Bruno recebem, nessa ordem, um dos capacetes, liste os pontos de amostragem para as possíveis ordens nas quais os capacetes podem ter sido devolvidos e determine o valor m da variável aleatória M que representa o número de combinações corretas (entre capacetes e seus donos).*

Solução. Temos três capacetes devolvidos aleatoriamente para três funcionários, sendo Sandro (S), João (J) e Bruno (B). Os capacetes podem ser devolvidos em qualquer ordem para os três funcionários.

As permutações possíveis dos três capacetes são:

$$\{(S,J,B),(S,B,J),(J,S,B),(J,B,S),(B,S,J),(B,J,S)\}.$$

A variável aleatória M é definida como o número de combinações corretas entre capacetes e funcionários. Vamos determinar M para cada ponto amostral:

- $M = 3$ (Todos corretos):
  - (S,J,B): Todos os capacetes são devolvidos corretamente.
- $M = 2$ (Dois corretos):
  Não há casos em que exatamente 2 capacetes estão corretos, porque se dois capacetes estiverem corretos, o terceiro também estará.
- $M = 1$ (Um correto):
  - (S,B,J): Apenas S recebeu o capacete correto.

- (J,S,B): Apenas B recebeu o capacete correto.
- (B,J,S): Apenas J recebeu o capacete correto.

- $M = 0$ (Nenhum correto):
  - (J,B,S): Nenhum capacete foi devolvido corretamente.
  - (B,S,J): Nenhum capacete foi devolvido corretamente.

Espaço amostral	m
SJB	3
SBJ	1
BJS	1
JSB	1
JBS	0
BSJ	0

Com base no espaço amostral, a distribuição de probabilidade de M é dada por:

$$P(M=0) = \frac{1}{3}, \quad P(M=1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(M=3) = \frac{1}{6}.$$

A função de distribuição acumulada $F(m)$ é calculada para os diferentes intervalos de m:

- Para $m < 0$:
$$F(m) = 0.$$
- Para $0 \leq m < 1$:
$$F(m) = P(M \leq 0) = P(M=0) = \frac{1}{3}.$$
- Para $1 \leq m < 3$:
$$F(m) = P(M \leq 1) = P(M=0) + P(M=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$
- Para $m \geq 3$:
$$F(m) = P(M \leq 3) = P(M=0) + P(M=1) + P(M=3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1.$$

Portanto, a função de distribuição acumulada de M é:

$$F(m) = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq m < 1, \\ \frac{5}{6}, & 1 \leq m < 3, \\ 1, & m \geq 3. \end{cases}$$

Perceba que a função de distribuição acumulada é uma função monótona não decrescente, definida não apenas para os valores assumidos para a variável aleatória dada, mas também para todos os valores reais.

3.2 VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

Vamos analisar o comportamento de uma variável aleatória contínua em relação a uma variável discreta e como esse, por sua vez, será descrito pela sua função densidade de probabilidade.

Definição 3.4. *Uma função densidade de probabilidade é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *A área total sob o gráfico de $f(x)$ é igual a 1, ou seja,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

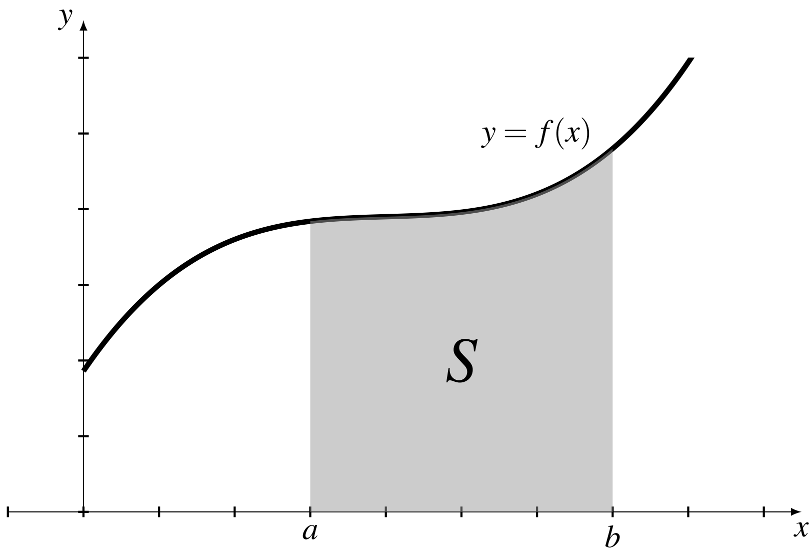
3. *Dada uma função $f(x)$ satisfazendo as propriedades acima, então $f(x)$ representa alguma variável aleatória contínua X, de modo que $P(a \leq X \leq b)$ é a área sob a curva limitada pelos pontos a e b, como ilustra a Figura 3, isto é,*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A integral, como é amplamente reconhecido, representa a área sob o gráfico da função. Esse entendimento permite uma análise mais profunda das propriedades e aplicações das funções de densidade em contextos probabilísticos. Para deixar clara a relação entre a função densidade de probabilidade e a respectiva variável aleatória X, usaremos a notação $f_X(x)$, quando for necessário.

Uma primeira observação importante que pode ser vista imediatamente da interpretação geométrica de probabilidade como área sob a curva densidade de probabilidade é a seguinte: se

Figura 3 – Área sob o gráfico de f no intervalo $[a,b]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

X é uma variável aleatória contínua, então a probabilidade do evento $X = a$ é zero, ou seja, a probabilidade de X ser exatamente igual a um valor específico é nula. Isso pode ser visto como sendo o evento $\{X = a\}$ e isso corresponde a um segmento de reta e tal segmento tem área nula. Em termos de integral, esse resultado corresponde ao fato de que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Como consequência, temos as seguintes igualdades:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

Exemplo 3.2. *Suponha que se deseje medir o erro de um experimento em laboratório, e que seja a variável aleatória contínua X, cuja função de densidade de probabilidade é dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & se \quad -1 < x < 2 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} .$$

a) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$ *b) Determine* $P(0 < X \leq 1)$.

Solução.

a) Como $f(x) = 0$ fora do intervalo $(-1,2)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x + 0 \\
&= \left.\frac{x^3}{9}\right|_{-1}^{2} \\
&= \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) A probabilidade de $P(0 < X \leq 1)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P(0 < X \leq 1) &= \int_{0}^{1} \frac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{x^3}{9}\right|_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Definição 3.5. *A função de distribuição acumulada $F(x)$ de uma variável aleatória contínua X, com função densidade $f(x)$, é:*

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}$$

Além disso, a probabilidade de X estar em um intervalo $[a,b]$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P(a \leq X \leq b) &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

A definição é a mesma vista para o caso discreto; a diferença é que, para variáveis contínuas, a função de distribuição acumulada é uma função contínua, sem saltos. Para deixar clara a relação entre a função de distribuição acumulada e a respectiva variável aleatória X, usaremos a notação $F_X(x)$, quando for necessário.

Exemplo 3.3. *Considere a função densidade de probabilidade, Exemplo anterior, dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & se \quad -1 < x < 2 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} .$$

Determine a função de distribuição acumulada $F(x)$ e use para avaliar $P(0 < X \leq 1)$.

Solução. A função de distribuição acumulada é dada pela integral da função densidade de probabilidade:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Calculando $F(x)$ em diferentes intervalos:

a) Para $x < -1$:

$$F(x) = 0.$$

b) Para $-1 \leq x < 2$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^3}{9}\right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{x^3}{9} - \frac{(-1)^3}{9} \\ &= \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{x^3+1}{9}. \end{aligned}$$

c) Para $x \geq 2$:

$$F(x) = 1.$$

Note que, para $x \geq 2$, a função de distribuição acumulada é constante e igual a 1. Isso ocorre porque, ao integrar a função densidade de probabilidade $f(x)$ sobre todo o intervalo de definição, a soma total das probabilidades é 1. Assim, quando x é maior ou igual a 2, isso significa que consideramos todos os valores possíveis da variável aleatória X, resultando em uma probabilidade acumulada de 1. Em outras palavras, a probabilidade de X assumir um valor menor ou igual a 2 é total, ou seja, todos os eventos possíveis já foram contabilizados.

Assim, a função de distribuição acumulada $F(x)$, ilustrada na Figura 4, é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1 \\ \frac{x^3+1}{9}, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}.$$

Para avaliar $P(0 < X \leq 1)$, utilizamos a função de distribuição acumulada:

$$P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0).$$

Calculando $F(1)$:

$$F(1) = \frac{1^3+1}{9} = \frac{2}{9}.$$

De modo análogo, temos que $F(0)$:

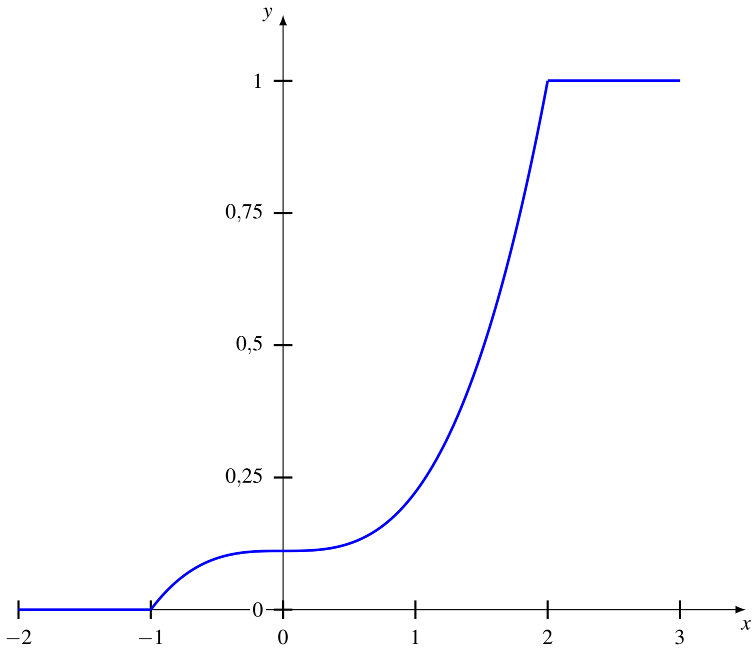
$$F(0) = \frac{0^3+1}{9} = \frac{1}{9}.$$

Portanto, a probabilidade é:

$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 1) &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

O que está de acordo com o resultado obtido usando a função densidade do exemplo anterior, como queríamos demonstrar.

Figura 4 – Gráfico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Existe uma relação entre a função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada, que é consequência do Teorema Fundamental do Cálculo. Por definição, temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo resulta que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x),$$

isto é, a função densidade de probabilidade é a derivada da função de distribuição acumulada.

Como no caso discreto, valem as seguintes propriedades para a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1.$$

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0.$$

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b).$$

4 MEDIDAS DE TENDÊNCIA E ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES

A estatística e a teoria das probabilidades desempenham um papel crucial na análise de incertezas em diversas áreas do conhecimento, como economia, engenharia, ciências da saúde e inteligência artificial. Quando se trata do estudo de variáveis contínuas, é fundamental compreender a distribuição dos valores dessas variáveis, o que pode ser feito por meio de medidas de tendência central e dispersão. Essas medidas são ferramentas essenciais para descrever a distribuição dos dados e interpretar padrões estatísticos.

4.1 MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DISPERSÃO PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Entre as principais medidas, destacam-se a esperança matemática (média), a variância e o desvio padrão. A esperança matemática representa o valor médio esperado de uma variável aleatória, sendo um indicador do centro da distribuição. No entanto, a média por si só pode não ser suficiente para descrever um conjunto de dados, já que diferentes distribuições podem ter o mesmo valor médio, mas comportamentos distintos.

Para medir a variabilidade dos dados em relação à média, utilizamos a variância, que indica o quão dispersos estão os valores. Uma variância alta sugere uma ampla dispersão dos dados em torno da média, enquanto uma variância baixa indica que os valores estão mais concentrados. Complementando essa análise, o desvio padrão, que é a raiz quadrada da variância, fornece uma medida de dispersão na mesma unidade da variável original, facilitando a interpretação e comparação dos dados.

Essas medidas não são relevantes apenas no âmbito teórico, mas têm aplicações práticas em diversas áreas. Na economia e finanças, a média é utilizada para estimar retornos esperados de investimentos, enquanto a variância e o desvio padrão são essenciais para avaliar riscos e volatilidade dos mercados. Na engenharia e controle de qualidade, essas medidas permitem monitorar processos produtivos para garantir conformidade com padrões de qualidade. Na medicina e epidemiologia, são amplamente empregadas para analisar distribuições de variáveis fisiológicas e modelar o crescimento de doenças, contribuindo para decisões clínicas e estratégias de saúde pública. Além disso, em ciência de dados e inteligência artificial, desempenham um papel crucial na normalização de dados e na construção de modelos preditivos.

Portanto, o entendimento e o cálculo preciso dessas medidas são fundamentais para a análise estatística e a interpretação de características probabilísticas. Neste capítulo, exploraremos a definição e as propriedades da esperança matemática, variância e desvio padrão para variáveis contínuas investigadas, enfatizando suas aplicações e importância em diversos contextos.

A esperança, ou valor esperado, de uma variável aleatória X é uma medida que representa a média ponderada de todos os possíveis valores que X pode assumir, considerando suas respectivas probabilidades. Para variáveis contínuas, com função densidade de probabilidade $f_X(x)$, a esperança é dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx.$$

A esperança fornece uma noção central de tendência para a variável aleatória. É um dos principais parâmetros usados na descrição de distribuições de probabilidade e é fundamental em campos como economia, engenharia e ciências sociais. Por exemplo, em finanças, o valor esperado de retornos de um investimento ajuda a tomar decisões informadas sobre risco e retorno.

A variância de uma variável aleatória X é uma medida que quantifica a dispersão dos valores de X em relação à sua média (esperança). É calculada como:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Para variáveis contínuas, a fórmula pode ser expressa como:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x)\, dx.$$

A variância fornece informações sobre a variabilidade dos dados. Uma variância baixa indica que os valores estão próximos da média, enquanto uma variância alta indica que os valores estão mais dispersos. Na prática, entender a variância é essencial para avaliar a estabilidade e a confiabilidade de um modelo.

O desvio padrão σ_X é a raiz quadrada da variância e fornece uma medida de dispersão na mesma unidade que a variável original:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

O desvio padrão é amplamente utilizado em estatística para expressar a quantidade de variação ou dispersão em um conjunto de dados. Ele é especialmente útil em inferência estatística, como na construção de intervalos de confiança e na realização de testes de hipóteses. Em finanças, o desvio padrão é frequentemente usado como uma medida de risco.

4.2 MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO

A distribuição contínua é um conceito em estatística e teoria das probabilidades que se refere a variáveis aleatórias que podem assumir um número infinito de valores em um intervalo contínuo. Diferente das distribuições discretas, onde os valores são contáveis, as distribuições contínuas lidam com intervalos e representam fenômenos onde os resultados podem ser qualquer número real dentro de um certo intervalo.

4.2.1 MODELO UNIFORME

A distribuição uniforme contínua é um tipo de distribuição de probabilidade em que todos os valores em um intervalo especificado têm a mesma probabilidade de ocorrer. Essa distribuição é frequentemente utilizada em estatísticas e probabilidade quando não se tem uma razão para favorecer um valor em detrimento de outro dentro de um determinado intervalo.

Para uma variável aleatória contínua X com distribuição uniforme em $[a,b]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in [a,b], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A esperança é dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b x f_X(x)\,dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx.$$

Resolvendo a integral:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx.$$

Sabemos que:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

Aplicando os limites de integração:

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Portanto:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = \frac{b+a}{2}.$$

A variância é:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Primeiro, calculamos $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b x^2 f_X(x)\,dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx.$$

Sabemos que:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$$

Aplicando os limites de integração:

$$\int_a^b x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Portanto:

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right).$$

Substituímos na fórmula da variância:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2.$$

Após simplificação:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

O desvio padrão é:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Exemplo 4.1. *O tempo que um funcionário leva para concluir uma tarefa varia uniformemente entre 10 e 20 minutos. Nesse caso,* $a = 10$ *e* $b = 20$*. Determine a esperança e o desvio padrão.*

Solução. Calculando a esperança:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{10+20}{2} = 15 \text{ minutos}.$$

Calculando a variância:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(20-10)^2}{12} = \frac{100}{12} \approx 8,33.$$

Calculando o desvio padrão:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 2,89 \text{ minutos}.$$

4.2.2 MODELO EXPONENCIAL

A distribuição do modelo exponencial contínuo é uma distribuição de probabilidade contínua que é frequentemente usada para modelar o tempo até a ocorrência de um evento, como o tempo até a falha de um equipamento ou o tempo até a chegada de um cliente em um serviço.

Para uma variável aleatória contínua X com distribuição exponencial, a função de densidade é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde:

- $\lambda > 0$ é a taxa de falha (ou parâmetro de taxa), que representa a média de eventos por unidade de tempo.
- x é a variável aleatória que representa o tempo até o evento.

A esperança é dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X(x)\, dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

Usamos integração por partes. Seja: $u = x$, então $du = dx$, $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$, então $v = -e^{-\lambda x}$.

Pela fórmula de integração por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Aplicando:

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx.$$

O termo $\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty$ tende a 0 quando $x \to \infty$, e sobra:

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Portanto:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

A variância é:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Primeiro, calculamos $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

Usamos integração por partes novamente. Seja: $u = x^2$, então $du = 2xdx$, $dv = \lambda e^{-\lambda x}dx$, então $v = -e^{-\lambda x}$.

Aplicando:

$$\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx.$$

Já calculamos $\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$. Substituindo:

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Agora:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

O desvio padrão é:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Exemplo 4.2. *Neste exemplo, consideramos uma taxa de falha de um equipamento de $\lambda = 0,2$ falhas por hora. Isso significa que, em média, o equipamento falha a cada 5 horas, pois $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,2} = 5$. Determine a esperança e o desvio padrão.*

Solução. A esperança (ou média) $E[X]$ da distribuição exponencial é dada por:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Substituindo $\lambda = 0,2$:

$$E[X] = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ horas.}$$

A variância $Var(X)$ da distribuição exponencial é dada por:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Substituindo $\lambda = 0,2$:

$$Var(X) = \frac{1}{(0,2)^2} = \frac{1}{0,04} = 25.$$

O desvio padrão σ é a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Substituindo a variância calculada:

$$\sigma = \sqrt{25} = 5 \text{ horas.}$$

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, exploraremos as diversas aplicações das variáveis aleatórias contínuas em contextos reais e como elas desempenham um papel fundamental em muitos campos do conhecimento. As variáveis contínuas são uma ferramenta poderosa para a modelagem e análise de fenômenos que variam de maneira contínua. Abordaremos como essas variáveis são aplicadas em áreas como a engenharia, economia, ciências sociais e naturais, além da análise de dados. Nosso objetivo é fornecer uma compreensão abrangente das variáveis aleatórias contínuas e suas aplicações práticas, capacitando o leitor a utilizar esses conceitos de forma eficaz em diferentes situações do mundo real.

Em nosso primeiro exemplo, trataremos da distribuição de renda em uma população e como ela pode ser modelada como uma variável aleatória contínua, denotada por X. Essa variável é acompanhada por uma função densidade de probabilidade (f.d.p.), que descreve a probabilidade de diferentes níveis de renda ocorrerem. No mundo real, a distribuição de renda geralmente não é uniforme, mas segue padrões observáveis. A função de densidade de probabilidade, por sua vez, representa como a renda é distribuída ao longo de todos os valores possíveis, possibilitando análises sobre desigualdade, como a medição da concentração de renda e a avaliação de políticas econômicas.

Essa modelagem é crucial para a compreensão de fenômenos econômicos e para a formulação de políticas de redistribuição mais eficazes, tornando-se uma ferramenta indispensável na análise e resolução de problemas relacionados à distribuição de riqueza e sua relação com o bem-estar social.

Exemplo 5.1. *Considere que em uma determinada localidade, a distribuição de renda (em milhares de reais) seja uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade definida como:*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{1}{10}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{3x}{40} + \dfrac{9}{20}, & \text{se} \quad 2 < x \leqslant 6 \\ 0, & \text{se} \quad x > 6 \end{cases}.$$

a) *Qual a renda média nessa localidade?*

b) *Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a* 3.000 *reais?*

Solução.

a) Utilizando a definição:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{0}^{2} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} xf(x)\mathrm{d}x + 0 \\
&= \int_{0}^{2} x\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{10}\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} x\left(\frac{9}{20} - \frac{3x}{40}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{2} \left(\frac{x^2}{10} + \frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} \left(\frac{9x}{20} - \frac{3x^2}{40}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{20}\right)\Bigg|_{0}^{2} + \left(\frac{9x^2}{40} - \frac{x^3}{40}\right)\Bigg|_{2}^{6} \\
&= \frac{7}{15} + \frac{27}{10} - \frac{7}{10} \\
&= 2{,}4666.
\end{aligned}$$

Logo, a renda média é de $2.466,66$ reais.

b) Para $P(X > 3)$, basta tomarmos a integral na região referente ao evento:

$$\begin{aligned}
\int_{3}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{3}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{3}^{6} \left(\frac{9}{20} - \frac{3x}{40}\right)\mathrm{d}x + 0 \\
&= \left(\frac{9x}{20} - \frac{3x^2}{80}\right)\Bigg|_{3}^{6} \\
&= \left(\frac{9\cdot 6}{20} - \frac{3\cdot 6^2}{80}\right) - \left(\frac{9\cdot 3}{20} - \frac{3\cdot 3^2}{80}\right) \\
&= \frac{27}{20} - \frac{81}{80} = 0,3375.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade é de aproximadamente $33,75\%$ de chance.

Em nosso segundo exemplo de aplicação trazemos a demanda diária de um certo produto em um supermercado, e demonstramos como essa pode ser tratada como uma variável aleatória contínua Y, com uma função de densidade de probabilidade que descreve a probabilidade de diferentes quantidades serem consumidas em um dia típico. A variabilidade natural no consumo, por sua vez, é influenciada por fatores como sazonalidade, promoções e comportamentos de compra dos clientes.

Por exemplo, em dias normais, a demanda pode seguir uma distribuição normal, com uma média representando o consumo típico e um desvio padrão refletindo a variação esperada. Essa modelagem permite que o supermercado faça previsões sobre a quantidade de produto a ser estocada, otimizando a logística e minimizando desperdícios ou problemas no estoque. A análise da densidade de probabilidade ajuda, assim, na tomada de decisões estratégicas de reposição e gestão do supermercado.

Exemplo 5.2. *Considere que a demanda diária de um certo produto em um supermercado, em centenas de quilos, seja uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{2x}{3}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{x}{3} + 1, & \text{se} \quad 1 < x \leq 3 \\ 0, & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}.$$

a) *Qual a probabilidade de se vender mais do que* 150 *kg, num dia escolhido ao acaso?*

b) *Considerando um mês de* 30 *dias, qual valor esperado de venda?*

c) *Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em* 95% *dos dias?*

Solução.

a) Integrando a função utilizando o intervalo adequado, e considerando que 150kg são $1,5$

em centenas de quilos, temos o evento $\{X > 1,5\}$ de interesse.

$$
\begin{aligned}
P(X > 1,5) &= \int_{1,5}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{1,5}^{3} f(x)\mathrm{d}x + 0 \\
&= \int_{1,5}^{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(x - \frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_{1,5}^{3} \\
&= \left(3 - \frac{(3)^2}{6}\right) - \left(1,5 - \frac{(1,5)^2}{6}\right) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{9}{8} \\
&= 0,375.
\end{aligned}
$$

Ou seja, a probabilidade de se vender mais do que 150kg num dia ao acaso é de $37,5\%$.

b) Sejam $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{30}$, os 30 dias independentes e identicamente distribuídos, então o valor esperado é:

$$\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} E(X_i),$$

e sendo $E(X_i)$ dada por:

$$
\begin{aligned}
E(X_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{0}^{1} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} xf(x)\mathrm{d}x + 0 \\
&= \int_{0}^{1} \frac{2x^2}{3}\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} x\left(1 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{2x^3}{9}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^3 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

temos que:

$$\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = 30 \cdot \frac{4}{3} = 40.$$

Assim podemos concluir que o supermercado vende em média, 4 toneladas de arroz por mês.

c) Desejamos encontrar a quantidade m de arroz que satisfaça: $P(X < m) = 0,95$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{m} f(x)\mathrm{d}x &= 0,95 \\
\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{m} f(x)\mathrm{d}x = &\; 0,95 \\
0 + \int_{0}^{1} \frac{2x}{3}\mathrm{d}x + \int_{1}^{m} \left(1 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x = &\; 0,95 \\
\left(\frac{2x^3}{9}\right)\Bigg|_0^1 + \int_{1}^{m} \left(1 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x &= 0,95 \\
\frac{2}{9} + \int_{1}^{m} \left(1 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x &= 0,95 \\
\int_{1}^{m} \left(1 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{37}{60} \\
\left(x - \frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_1^m &= \frac{37}{60} \\
\left(m - \frac{m^2}{6}\right) - \left(1 - \frac{1}{6}\right) &= \frac{37}{60}.
\end{aligned}$$

Logo, a quantidade m é uma das raízes da equação do segundo grau dada por:

$$m - \frac{m^2+5}{6} = \frac{37}{60}.$$

Cuja soluções são:

$$0,1 \cdot (30 - \sqrt{30}) = 2,45228. \qquad \text{e} \qquad 0,1 \cdot (30 + \sqrt{30}) = 3,5477.$$

Como a variável aleatória está definida no intervalo $x \in [0,3]$ e é zero fora desse intervalo, tomamos $m = 2,45228$. Podemos concluir então que o supermercado necessita de 245kg de arroz para que não falte arroz nos dias desejados.

Nosso terceiro exemplo de aplicação aborda a posição de uma imperfeição em componentes circulares, e como pode ser incerta devido a variações no processo de fabricação.

Veremos como modelar essa incerteza, e como a função densidade de probabilidade é usada para descrever a distribuição provável dos ângulos onde a imperfeição pode ocorrer. Essa modelagem é importante para prever o impacto das imperfeições, otimizando o processo de fabricação e melhorando a qualidade do produto.

Exemplo 5.3. *A direção de uma imperfeição em relação a uma linha de referência em um objeto circular como um pneu, um rotor de freio ou um volante normalmente apresenta alguma incerteza. Considere a linha de referência que conecta a válvula do pneu até o ponto central e seja X o ângulo medido no sentido horário até o local da imperfeição. Uma função densidade de probabilidade possível de X pode ser definida como:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{360}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 360 \end{cases}.$$

a) A probabilidade de o ângulo estar entre $90°$ *e* $180°$ *é:*

$$P(90 \leq x \leq 180) = \int_{90}^{180} \frac{1}{360} \mathrm{d}x = \left(\frac{x}{360} \right) \Bigg|_{90}^{180} = \frac{1}{4} = 0,25$$

b) A probabilidade de o ângulo de ocorrência estar dentro de 90° da linha de referência é:

$$P(0 \leq x \leq 90) + P(270 \leq x < 360) = 0,25 + 0,25 = 0,50 = 50\%$$

Por fim, em nossa última aplicação, muitas vezes em problemas práticos do mundo real estamos interessados em fazer medições do tempo de vida útil de uma série de aparelhos eletrônicos.

Exemplo 5.4. *Considere que desejamos medir o tempo de vida útil (em semanas) de um determinado computador, e que esse tempo é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\frac{x}{100}}, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

a) Qual valor da constante λ*?*

b) Encontre a função de distribuição de X*.*

c) Calcule $P(50 < X < 150)$*.*

Solução.

a) Para responder a primeira pergunta temos que nos valer da propriedade que a integral da função densidade em todo intervalo é 1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= 1 \\
\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= 1 \\
0 + \lambda \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-x}{100}}\mathrm{d}x &= 1 \\
\lambda \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} e^{\frac{-x}{100}}\mathrm{d}x &= 1.
\end{aligned}$$

Para calcularmos a integral, usaremos a regra da substituição, faremos $u = \dfrac{-x}{100}$, segue que $\mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{100}$. Portanto ao calcular a integral como uma integral indefinida, teremos:

$$\begin{aligned}
\lambda \lim_{M\to\infty} \int (-100 \cdot e^{u})\mathrm{d}u &= 1 \\
\lambda \lim_{M\to\infty} \int (-100 \cdot e^{u})\mathrm{d}u &= 1 \\
\lambda \lim_{M\to\infty} (-100 \cdot e^{u}) &= 1 \\
\lambda \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{100}{e^{\frac{x}{100}}} \right)\Bigg|_{0}^{M} &= 1 \\
\lambda \lim_{M\to\infty} \left(\frac{-100 + 100 \cdot e^{\frac{M}{100}}}{e^{\frac{M}{100}}} \right) &= 1 \\
\lambda \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{100}{e^{\frac{M}{100}}} \right) + \lambda \lim_{M\to\infty} \left(\frac{100 \cdot e^{\frac{M}{100}}}{e^{\frac{M}{100}}} \right) &= 1 \\
100\lambda &= 1 \\
\lambda &= \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

Retomando a variável u.

b) Substituindo a constante λ encontrada no item (a) e integrando a função, temos:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \frac{1}{100} e^{\frac{-x}{100}} \mathrm{d}x \\ &= 1 - e^{\frac{-t}{100}}. \end{aligned}$$

c) A probabilidade procurada é a função distribuição aplicada no maior menos a função distribuição aplicada no menor:

$$\begin{aligned} P(50 < X < 150) &= F(150) - F(50) \\ &= 1 - e^{\frac{-150}{100}} - [1 - e^{\frac{-50}{100}}] \\ &= e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{-3}{2}} \\ &\approx 0,384. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade da variável X está entre 50 e 150 é aproximadamente $38,4\%$.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, exploramos as aplicações das variáveis aleatórias contínuas em problemas reais, abordando conceitos fundamentais de probabilidade e suas distribuições. Iniciamos com uma revisão teórica dos principais conceitos de probabilidade, diferenciando as distribuições discretas das contínuas, com ênfase nestas últimas.

Nosso objetivo foi tornar o material acessível a leitores com diferentes níveis de conhecimento, combinando explicações introdutórias com conceitos mais avançados. Dessa forma, buscamos oferecer um recurso que auxilie tanto iniciantes quanto aqueles que desejam aprofundar seus estudos.

Analisamos as variáveis aleatórias contínuas em detalhes, destacando conceitos essenciais como função densidade de probabilidade, esperança e variância. Também discutimos distribuições específicas, como a Uniforme e a Exponencial, enfatizando suas aplicações em diferentes contextos.

As aplicações discutidas evidenciam a importância das variáveis aleatórias contínuas na modelagem de fenômenos em diversas áreas, como finanças, engenharia e ciência de dados. Seu uso permite análises mais precisas e fundamentadas, auxiliando na tomada de decisões e no entendimento de processos dinâmicos.

Este estudo reforça a relevância da teoria das probabilidades para aplicações mais complexas, especialmente aquelas que envolvem o cálculo de integrais. O conhecimento dessas distribuições é indispensável em diversas áreas científicas e tecnológicas.

Por fim, esperamos que este trabalho desperte o interesse do leitor por um estudo mais aprofundado sobre distribuições contínuas, como as distribuições Gama e de Poisson. Agradecemos a todos que se dedicaram à leitura deste material e desejamos que o conhecimento compartilhado contribua para seu desenvolvimento acadêmico e profissional.

REFERÊNCIAS

HOWARD, EVES. **Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues**. Campinas: Ed. Unicamp, 2011.

JUNQUEIRA, Ana Lucia Nogueira. A probabilidade que a história nos conta. In: ANAIS do XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, 2015.

QUEIROZ, Cileda de; COUTINHO, Silva. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 50–67, 2007.

STIGLER, Stephen M. **The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.

WALPOLE, Ronald E. **Probabilidade e estatística para engenharia e ciências**. São Paulo: Pearson, 2009.