INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS MACEIÓ

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSIVAN AMORIM DA SILVA

NILCE CRUZ BURMANN

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: ABORDAGEM HISTÓRICA E UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO-SE MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL

MACEIÓ, ALAGOAS

2023

JOSIVAN AMORIM DA SILVA
NILCE CRUZ BURMANN

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: ABORDAGEM HISTÓRICA E UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO-SE MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ª M.ª Vívia Dayana Gomes dos Santos
Coorientador: Prof. Ms. Carlos Alberto Silva dos Santos

MACEIÓ, ALAGOAS

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
Campus Maceió
Biblioteca Benevides Monte

510.07
S586r   Silva, Josivan Amorim da.
Relações métricas no triângulo retângulo : abordagem histórica e uma proposta de ensino utilizando-se material didático manipulável / Josivan Amorim da Silva, Nilce Cruz Burmann. – Maceió, 2023.
47 f.

Orientação: Profa. Ma. Vívia Dayana Gomes dos Santos.
Coorientação: Prof. Me. Carlos Alberto Silva dos Santos.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió. Maceió, 2023.

Arquivo no formato digital em PDF.

1. Matemática – Ensino e aprendizagem. 2. Relações métricas. 3. Teorema de Pitágoras. 4. Triângulo retângulo. I. Burmann, Nice Cruz. II. Título.

Franciane Monick Gomes de França
Bibliotecária CRB-4/1831

JOSIVAN AMORIM DA SILVA

NILCE CRUZ BURMANN

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: ABORDAGEM HISTÓRICA E UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO-SE MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

TCC apresentado em 10 de outubro de 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Vívia Dayana G. dos Santos

Orientador: Prof.ª Ma. Vívia Dayana Gomes dos Santos
Instituto Federal de Alagoas - IFAL

Carlos A Santos

Coorientador: Prof. Me. Carlos Alberto Silva dos Santos
Instituto Federal de Alagoas - IFAL

Rosivaldo Pereira da Silva

Convidado: Prof. Me. Rosivaldo Pereira da Silva
Instituto Federal de Alagoas - IFAL

Dedico este trabalho a todas as pessoas que fizeram e fazem parte da minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso.

À minha mãe e irmãos, que me incentivaram nos momentos difíceis.

Aos professores, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional.

Aos professores M.ª Vivia Dayana Gomes dos Santos e Prof. Ms. Carlos Alberto Silva dos Santos**,** por terem sido meus orientadores e terem desempenhado tal função com dedicação e amizade.

À instituição de ensino Instituto Federal de Alagoas - IFAL, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

Aos meus colegas de curso, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

JOSIVAN AMORIM DA SILVA

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em especial, a Deus por ter sido fiel, concedendo a realização do desejo do meu coração e fazendo com que eu confiasse cada vez mais em sua palavra, que diz: “Eis que diante de ti pus uma porta aberta, que ninguém pode fechar. Mesmo com pouca força, guardaste a minha palavra e não negastes o meu nome” (Ap. 3.8).

Aos meus filhos: Gabriel Burmann e Laís Burmann, que muito me incentivaram a traçar, na caminhada acadêmica, a possibilidade de ser um a docente atuante.

À professora e orientadora Msª Vívia Dayana Gomes dos Santos e ao professor e coorientador Me. Carlos Alberto Silva dos Santos, pela orientação segura e amizade dispensada, por ter acreditado em minha capacidade, o que me proporcionou incomparável formação acadêmica, e pela competência, dedicação, compreensão e exemplo de profissionalismo com que me orientaram na elaboração deste Trabalho de Conclusão de Curso.

A todos os mestres e professores que fizeram parte da minha formação, obrigado pelo ensinamento e exemplo ao longo desta jornada.

Ao Instituto Federal de Alagoas - IFAL, por ter me proporcionado a formação acadêmica, a militância estudantil e por ser uma instituição com responsabilidade e compromisso social.

NILCE CRUZ BURMANN

RESUMO

O estudo que se procede tem por objetivo apresentar uma breve abordagem histórica sobre o teorema de Pitágoras e suas relações métricas o que dele decorrem e apresentar uma proposta didática usando material didático manipulável, antes disso faremos uma reflexão do ensino de matemática na intenção de facilitar a compreensão de conceitos relacionados com relações métricas, através da interação da construção geométrica com o desenvolvimento algébrico. Sabe-se das dificuldades relacionadas à resolução de problemas matemáticos na educação básica. Acredita-se que a incompreensão de conceitos básicos é definidora, quando se trata da questão da aprendizagem. Nessa linha de raciocínio, será utilizada a interação entre desenvolvimento algébrico e construção geométrica, buscando a compreensão de teoremas específicos relacionados a relações métricas do triângulo retângulo e suas aplicações no cotidiano. Em nossa discussão, enfatizaremos as relações métricas e a relação existente entre quadrado do cateto e produto da hipotenusa pela projeção do referido cateto, buscando sempre evidenciar o conceito de área, pela importância deste na resolução de problemas práticos do cotidiano. Almejamos que essa abordagem possa facilitar tanto aos alunos quanto aos professores, o entendimento dos conceitos geométricos que determinam essas relações e não se apoiarem apenas nas “fórmulas” prontas. Espera-se que nossa discussão possa provocar reflexões em relação à prática docente de futuros professores de matemática. E que também contribuirá para formação diferenciada de licenciandos em Matemática, colaborando com maior aproximação com a realidade acadêmica dos alunos.

Palavras chave: Material manipulável. Relações métricas. Teorema de Pitágoras. Triângulo retângulo.

ABSTRACT

The purpose of this study is to present a brief historical approach to the Pythagorean Theorem and its metric relations, who derive from it, and to present a didactic proposal using manipulative didactic material. Understanding of concepts related to metric relations, through the interaction of geometric construction with algebraic development. Difficulties related to solving mathematical problems in basic education are known. It is believed that the lack of understanding of basic concepts is defining when it comes to learning. In this line of reasoning, the interaction between algebraic development and geometric construction will be used, seeking to understand specific theorems related to metric relations of the right triangle and their applications in everyday life. In our discussion, we will emphasize the metric relationships and the existing relationship between the square of the leg and the product of the hypotenuse by the projection of that leg, always seeking to highlight the concept of area, due to its importance in solving practical everyday problems. We aim for this approach to facilitate, both students and teachers, the understanding of the geometric concepts that determine these relationships and not rely only on ready-made “formulas”. It is hoped that our discussion can provoke reflections in relation to the teaching practice of future mathematics teachers. And that will also contribute to the differentiated training of undergraduate students in Mathematics, collaborating with a closer relationship with the academic reality of the students.

Keywords: Manipulable material. Metric relations. Pythagorean Theorem. Right triangle.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO...10

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA...13

2. 1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS...13

2. 2 ENSINO E APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO..16

2. 3 Qual a importância de estudar os conceitos matemáticos...........................20

3. ABORDAGEM HISTÓRICA...22

4 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: CONCEITOS, DEMONSTRAÇÃO E APLICAÇÕES...25

4.1 Elementos...25

4.2 Semelhança...26

4.3 Relações Métricas..27

4.4 APLICAÇÕES DAS RELAÇÕES MÉTRICAS..28

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO...30

5.1 CONSTRUÇÃO DE FIGURAS..30

5.1.1 Construção dos triângulos retângulos...30

5.1.2 Construção dos quadrados..31

5.1.3 Construção dos retângulos..32

5.1.4 Construção de uma base quadrangular...32

5.2 ATIVIDADES EXPERIMENTAIS...33

5.2.1 IMAGENS DAS ATIVIDADES EXPERIMENTAIS UTILIZANDO-SE EVA........39

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS..41

REFERÊNCIAS...42

APÊNDICE...44

1 INTRODUÇÃO

O conteúdo relações métricas no triângulo retângulo é um dos objetos de conhecimento da unidade temática Geometria definida pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC e apresenta as seguintes habilidades:

> ""EF09MA13: Demonstrar relações métricas no triângulo retângulo, entre eles, o teorema de Pitágoras, utilizando inclusive, a semelhança de triângulos; "EF09MA14: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes". (BRASIL, 2019)

Considerando as dificuldades de compreensão nos diversos níveis da Educação Matemática, pode ficar evidente que a proposta do Livro Didático de Matemática não esteja adequada para que haja uma compreensão do conteúdo de Relações Métricas para os alunos do Ensino Fundamental séries finais. O indevido uso do livro didático pode acarretar na distorção dos conteúdos em sala de aula, levando em consideração, que as propostas apresentadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - (PCN), procurando analisar de forma imparcial se o livro didático, quando trata do conteúdo de Relações Métricas enfatiza de forma clara e objetiva o trabalho com os conceitos e definições, e se está adequada para auxiliar o professor no exercício do seu cotidiano. Portanto, em busca de proporcionar mudanças na realidade social do aluno e ajudando a diversificar os métodos de ensino. Podemos contribuir mais para a aprendizagem desses alunos e a melhoria da qualidade no Ensino da Matemática.

Pela forma como as relações métricas são apresentadas aos alunos é bem provável que sejam induzidos a decorar somente as "fórmulas" com o único objetivo de resolver os problemas que são propostos nos livros didáticos ignorando ou até mesmo desprezando as etapas de demonstrações para se chegar a essas relações. Dessa forma, a proposta a ser abordada neste trabalho é sobre como explanar, de forma didática, uma das formas pelas quais essas relações métricas podem ser determinadas a partir do triângulo retângulo.

Diante de algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos nas salas de aulas com os conteúdos de Relações Métricas e aplicação de suas fórmulas, identificamos que, a falta de um material de apoio adequado para auxiliar o professor e os alunos, tem prejudicado no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem do referido conteúdo matemático nos anos finais do Ensino Fundamental séries finais.

Alguns professores não gostam de seguir o livro didático o único motivo que tem provocado tantas falhas quanto ao ensino, porém, percebemos que se os professores não se valem do uso do livro didático de Matemática adotado por algumas escolas públicas, isso acarreta na dificuldade de aprendizagem dos alunos. Sendo assim, o livro didático de Matemática, como um instrumento auxiliar do processo de ensino e de aprendizagem, são ou não adequados para os estudos dos professores e alunos, obedecendo aos quatros eixos: 1) Interdisciplinaridade, 2) Resolução de Problemas, 3) Contextualização e 4) Compreensão dos Conceitos.

Hoje, muito se comenta sobre resolução de problemas, este tema é citado em vários livros didáticos e é uma restrição dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

No livro, *Educação Matemática pesquisa em movimento*, os autores Onuchic e Allevato (2009), afirmam que nos anos passados não se tinha a preocupação de sistematizar os saberes matemáticos com a realidade dos livros e o cotidiano do aluno, por isso, já se recomendavam incluir resoluções de problemas nas atividades elementares de Matemática, conforme pensamento dos teóricos Onuchic e Allevato (2009): "resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar nos anos 80".

Diante do exposto e na preocupação deste ensino mais significativo, percebe- se que o currículo escolar precisa ter em seus propósitos pedagógicos, vivencias que levem os alunos à melhoria de suas aprendizagens e seus vários tipos de compreensão sobre as Relações Métricas no Triângulo retângulo. Desta forma, citamos mais uma vez Onuchic e Allevato (2009) que afirma, portanto, que "outra característica encontrada nesses currículos é o uso de contextos na resolução de problemas como meio de desenvolver os conteúdos Matemáticos e fazer conexões com outras áreas".

Continuando, em seus textos, Onuchic e Allevato (2009) referem-se que a ideia de compreensão se dá passo a passo, construída com soluções rotineiras que se relacionam com o cotidiano do aluno e disso é construído pensamentos Matemáticos que produz do conhecimento a busca pela compreensão dos conceitos Matemáticos. Assim,

> "Os conceitos Matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as ideias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas ideias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e testam através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer." (ONUCHIC E ALLEVATO, p. XX 2009).

Pais (2009) também apresenta uma visão bem semelhante ao que os teóricos anteriores afirmavam. O autor em sua obra Didática da Matemática *Uma análise da influência francesa*, descreve a semelhança quando afirma que,

> "Com base nessa interpretação, o conceito é algo em permanente processo de devir, estamos sempre nós aproximando de sua objetividade, generalidade e universalidade, sem considera-lo uma entidade acabada, tal como concebido por uma visão platônica. O estado de devir explica a formação de conceitos a partir de intenção de compreender o fenômeno da aprendizagem." (PAIS, 2008, p. XX).

Sendo mais objetivo quando dizemos que os eixos apresentados de resolução de problemas, formação de conceitos, interdisciplinaridade e principalmente contextualização, são necessários para que o aluno tenha possibilidades de refletir sobre as indagações apresentadas no livro didático que lhes são apresentados para estudos, nesse contexto, a autora Vasconcelos e Rêgo do texto *A contextualização na sala de aula: Concepções Iniciais*, propõem:

> "A concepção de contexto, abordada pelos PCN, está de acordo com o pensamento de Brousseau (1996), quando ele afirma que o contexto deve estar associado a uma situação que dê sentido aos conhecimentos a serem elaborados, ou oriente a aprendizagem matemática, sendo necessário que os alunos descontextualizem o saber produtivo, para reconhecer nele um conhecimento cultural a ser reutilizado."

O objetivo geral deste Trabalho de Conclusão de Curso é apresentar uma proposta didática para que seja possível abordar as relações métricas no triângulo retângulo envolvendo os conceitos de semelhança de triângulos e cálculos de áreas de figuras planas utilizando-se material manipulável.

Pretendemos com esse trabalho, abordar alguns conceitos geométricos sobre o triângulo retângulo, especificamente as relações métricas e suas aplicações e, dessa forma, levar a uma compreensão mais clara desses conceitos e definições, permitindo que os alunos que estejam cursando o Ensino Fundamental séries finais, possam resolver questões, evitando o hábito de simplesmente decorar as "fórmulas" prontas e não aprender de fato o conteúdo.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Polya (2006) defende ser fundamental o estudante criar hábitos de estudar sozinho e adquira experiência pelo trabalho independente, para que tenha capacidade de decidir qual o caminho mais apropriado diante de uma situação adversa e desafiadora.

A constante ideia de transformar a matemática surge como uma importante ferramenta motivacional no estudo de método de resolução de problemas matemáticos. E essa busca pelo novo e pela descoberta fez com que Polya (2006) desenvolvesse uma heurística que auxiliasse os estudantes na resolução de problemas de matemática.

Segundo Polya (2006) é conveniente distinguir as quatro fases durante a resolução de problemas. Primeiro, é preciso compreender o problema e perceber o que é necessário. Segundo ver como os diversos itens estão relacionados. Como a incógnita está relacionada aos dados, para se ter uma ideia de resolução e estabelecer um plano. Terceiro, executar o plano. Quarto, fazer um retrospecto da resolução completa, resolvendo-os e discutindo-os. Destaca que cada uma dessas fases tem a sua importância, podendo ocorrer ao aluno, eventualmente, uma excelente ideia que o faça saltar todas as etapas e chegar de forma direta e imediata à solução heurística, método ou processo criado com o objetivo de encontrar soluções para um problema.

2.1 TEORIAS DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

O que é Didática? Para respondermos a este questionamento é necessário voltar às origens. A palavra didática provém do grego. O verbo didasko significa ensinar, instruir, expor claramente, demonstrar. O termo didactika é o nominativo e o acusativo plural, neutro, do adjetivo didaktikós, derivado do verbo didasko, e significa o relativo ao ensino, à atividade instrutiva. Portanto, pode-se definir didática como a ciência ou a arte do ensino. Esta análise etimológica volta-se para uma definição de didática como arte ou ciência do ensino. Portanto, ensino parece ser o elemento- chave que identifica o conteúdo da didática.

Didática clássica seria, então, a arte de ensinar o estudo normativo das boas condições da difusão do conhecimento, quando essa difusão se faz através da instituição que o difunde e por iniciativa dela.

Segundo Brousseau (1986), Comenius a definia como “a arte de ensinar”. Para ele, seria um método único, suficiente para todas as matérias. Seria o método natural, válido tanto nas artes como nas línguas. As variações seriam muito insignificantes e não precisariam de métodos especializados.

Não obstante, hoje se sabe que nem a humanidade como um todo, nem cada um dos seres humanos adquire todos os conhecimentos nas mesmas circunstâncias, nem com os mesmos processos.

Na tradução de Comenius, portanto, o estudo do ensino começava, de modo direto, pelo inventário dos princípios gerais da educação e das condições que decorriam racionalmente desses princípios. A consideração do conhecimento ensinado, objeto principal do ensino, só intervinha depois. Em oposição a este conceito de Comenius, Brousseau (1986) define a Didática como uma relação específica entre conteúdos de ensino, a maneira como os alunos adquirem conhecimentos e os métodos. Em vista disso, ele desenvolveu uma teoria para compreender as relações que acontecem entre os alunos, o professor e o saber em sala de aula e, ao mesmo tempo, propôs situações que foram experimentadas e analisadas “cientificamente”.

Em sua teoria, conhecida como Teoria das Situações Didáticas, docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (milieu) em que a situação didática se faz presente.

Brousseau procedeu, assim, no sentido inverso de Comenius. Partiu de traços/vestígios da atividade cultural que produz precisamente tal conhecimento matemático a ser ensinado (um texto) e buscou estabelecer condições para que essa atividade possa ir ao encontro de um modo de aculturação para um jovem iniciante. Dos textos aos problemas, depois as situações matemáticas e, enfim, às condições didáticas que permitem sustentar essas situações e fazê-las produzir a aculturação visada. Para Brousseau (1986), a Didática da Matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como as previsões e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

Poder-se-ia complementar que a Didática da Matemática seria, também, a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um saber matemático por parte de um sujeito.

Brousseau (1986) estudou mais profundamente as condições que levariam um sujeito a usar seus conhecimentos para tomar decisões e a estudar as razões dessas tomadas de decisões. A teoria de Brousseau esclarece a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, permitindo, assim, a compreensão das interações sociais que ocorrem na sala de aula entre alunos e professores e das condições e da forma com que o conhecimento matemático pode ser apropriado e aprendido. Segundo ele, o controle dessas condições permitiria reproduzir e aperfeiçoar os processos de aquisição do conhecimento matemático escolar.

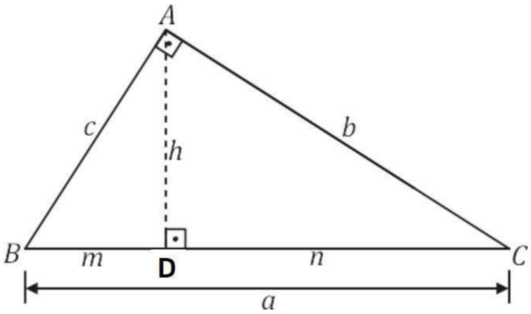
Esta teoria tem, como um dos objetivos primordiais da didática da matemática, a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Assim, o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber. Algum erro cometido pelo aluno, nessa teoria, quando identificado, constitui- se como valiosa fonte de informação para a elaboração de boas questões ou para novas situações problemas que possam atender, mais claramente, os objetivos desejáveis.

Como consideração pertinente para este trabalho, tem-se a preocupação de criar condições favoráveis ao professor, no sentido de promover situações didáticas de ensino-aprendizagem que favoreçam a apreensão de conhecimentos por parte dos alunos, levando o professor a refletir sobre as etapas que Brousseau (1986) considera importantes para tal.

2. 2 ENSINO E APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

As relações métricas no triângulo retângulo são parte da geometria plana e se relacionam às medidas correspondentes em triângulos retângulos. Desta forma, a expressão permite encontrar medidas não conhecidas de um triângulo retângulo. Assim, conseguimos encontrar catetos e a hipotenusa a partir das semelhanças entre as figuras. É importante salientar que essas relações são determinadas a partir dos conceitos de semelhanças de triângulos e proporcionalidade.

Figura 1 - Triângulo retângulo



Fonte: BURMANN

Segundo Santos (2012), As relações métricas são uma importante ferramenta para calcularmos altitudes ou grandes distâncias entre objetos, sem que seja preciso fazer a medição no local.

As relações métricas no triângulo retângulo são relações que ajudam os alunos a aprender o conhecimento geométrico, especificamente as propriedades dos triângulos. Esses atributos estão relacionados entre si, ou deveriam estar no Ensino Fundamental séries finais. Por exemplo, os alunos aprendem geometria plana desde as séries iniciais e, nessa fase já têm conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é de 180°.

> Essas propriedades estão relacionadas entre si, ou deveriam estar durante a educação básica. Por exemplo, o estudante tem contato com a geometria estudante tem contato com a geometria plana desde muito cedo, por exemplo, ao verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é de 180° (geometria euclidiana). (LEIVAS; PEREIRA, 2014).

O triângulo retângulo possui todas as propriedades de qualquer outro tipo de triângulo. Porém, no que se refere às relações métricas, devemos notar que há uma propriedade que é válida somente para esse tipo de triângulo. Segundo Leivas e Pereira (2014, p. 533) citado por Campagnaro (2012, p.45), “Quando dividimos um triângulo retângulo em dois triângulos menores, traçando sua altura em relação à hipotenusa, esses dois triângulos são semelhantes entre si e também em relação ao triângulo maior”.

Esta característica própria desse tipo de triângulo permite a abordagem de uma variedade de conceitos, como casos de semelhança de triângulos Lado, Ângulo, Lado (LAL, LLL, AA), projeções ortogonais de catetos sobre a hipotenusa, lados homólogos e a redefinição de triângulos semelhantes.

Em seu artigo intitulado “Descobrindo relações métricas no triângulo por meio do uso de material manipulável”, os autores Caroline Conrado Pereira e Dr. José Carlos Pinto Leivas (2014, p. 533) afirmam que explorar as relações métricas possibilita trabalhar diversas definições e conceitos geométricos que por algum motivo, não ficam bem esclarecidos para alguns alunos.

> A exploração das relações métricas no triângulo retângulo possibilita trabalhar com conceitos como altura de um triângulo. Observa-se no estudo realizado um grande número de alunos que possuem a ideia que, o triângulo possuir apenas uma altura. Também se pode explorar o triângulo retângulo que leva esse nome, por possui um ângulo interno reto (ângulo de 90º); além disso, mostrar que o lado que se opõe ao ângulo maior é o lado maior, cujo nome é hipotenusa; o nome dos outros lados, os catetos, que juntos formam o ângulo reto. (LEIVAS; PEREIRA, 2014, p. 533).

A aprendizagem deve ser um processo envolvente para o aluno, que constrói, modifica, enriquece e diversifica esquemas de conhecimento já internalizados a respeito de diferentes conteúdos, a partir do significado e do sentido que pode atribuir a esses conteúdos e ao próprio fato de estar aprendendo.

Segundo Coll (2001, p. 8), um esquema de conhecimento é definido como “a representação que uma pessoa possui em um determinado momento de sua história sobre uma parcela da realidade”. Com essa definição, podem se incluir consequências para o entendimento dos conhecimentos prévios dos alunos, tais como:

a) os alunos possuem uma quantidade variável de esquemas de conhecimento e não mostram ter um conhecimento geral, mas, sim, dividido de acordo com suas necessidades e gostos (bastante variados);

b) esses esquemas variam de acordo com os conhecimentos e as informações que os alunos vão acumulando, ao longo de sua trajetória escolar, e também com suas experiências diretas (no meio familiar ou no relacionamento com colegas).

Os esquemas de conhecimento podem apresentar validades diferentes, ao longo do tempo, pois nem sempre estão adequados à realidade do adquirente.

No ensino de Matemática, especificamente no 9º ano do Ensino Fundamental - Anos Finais, inicia-se a abordagem sobre as Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Este conteúdo faz parte do campo da geometria plana e tem como base de referência, o famoso triângulo retângulo, cujos elementos que o identificam, são apresentados e abordados já nos primeiros anos do Ensino Fundamental II, 6º, 7º, 8º e 9º anos.

A abordagem desse conteúdo pode ser mais bem compreendida quando o aluno já possui certo conhecimento prévio, no início do Ensino Fundamental séries finais, sobre alguns conteúdos diretamente relacionados a ele, tais como: proporcionalidade, teorema de Pitágoras, semelhança e congruência de triângulos, entre outros que servem de base para a sua compreensão.

A aprendizagem dessas relações métricas permite ao aluno resolver problemas que busquem determinar as medidas dos segmentos que formam o triângulo retângulo e, dessa forma, estender o aprendizado e aplicá-lo às diversas áreas que exigem a utilização desse conteúdo no campo da geometria plana e, posteriormente, aplicá-los em níveis mais altos de estudo como a engenharia civil, por exemplo.

Sabemos que a partir do triângulo retângulo é que são determinadas essas relações, já que os elementos que o compõem são os itens presentes nessas relações. Dessa forma, o aluno tendo um conhecimento prévio dos conceitos e definição dos tipos de triângulos, a abordagem em sala de aula deve ser mais assimilável e compreendida. Na verdade, o conteúdo não apresenta muita dificuldade, pois já se espera do aluno, certo domínio dos conceitos e definições que são base para a compreensão das relações e suas aplicações na resolução de problemas.

No processo de ensino e aprendizagem de matemática, problemas e exercícios estão presentes praticamente em todos os conteúdos a serem desenvolvidos com os estudantes. Mesmo que os problemas sejam simples, pode trazer um interesse especial pela matemática, pois os alunos podem sentir-se desafiados a resolvê-los e instigá-los a descobrir as soluções e as diferentes formas de resoluções, além de estimular o raciocínio e aumentar o conhecimento matemático.

No entanto, a resolução de problemas e exercícios podem apresentar algumas dificuldades aos estudantes de matemática, tais dificuldades apresentam variados aspectos, tais como a interpretação do problema, a retirada de dados, a identificação de possíveis maneiras de resolução, os fatores condicionantes, as operações que devem ser utilizadas, o procedimento de resolução e a possibilidade de conferir se a resolução está correta.

Desde os tempos antigos que a matemática é utilizada para resolver os problemas que nasciam. Em busca de solucionar as necessidades existentes, as antigas civilizações descobriam de forma intuitiva os números, e utilizavam para contagem de objetos e de animais.

Com os gregos também não foi diferente, surgiu pela necessidade de resolver problemas, mas agora as dimensões de distâncias eram bem maiores, logo empregaram um dos mais importantes teoremas para as demarcações de áreas usada até hoje, que é conhecida como as relações métricas do triângulo retângulo, agregada logo após, ao Teorema de Pitágoras.

Essas relações foram utilizadas também para calcular as distâncias que separam a Terra, a lua e o sol, pois existem relações entre as medidas dos seus lados e a medida dos ângulos internos de um triângulo.

Com tudo isso percebeu-se que o Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre o comprimento dos lados de qualquer triângulo retângulo, ou seja, o teorema de Pitágoras é tanto uma afirmação de áreas quanto de comprimentos.

Muito se discute sobre o ensino da matemática e suas aplicações, métodos e novas didáticas são aplicados para os estudantes que não conseguem assimilar os conteúdos, e muitos aprendem de forma decorativa, mas, não relacionam as aplicações com o cotidiano, pois a sua linguagem é muito abstrata. De acordo com o teórico (Pais, 2005, p.53) o conhecimento passa a ser concebido como sucessão de adaptações que o aluno realiza sob a influência de situações que ele vivencia na escola e na vida cotidiana.

A grande importância entre desenvolvimento geométrico e algébrico é a pratica onde iremos aprender e resolver problemas e sobre tudo compreendê-lo.

> A álgebra tem em sua origem a tendência à generalização e abstração, características importantes que fazem dessa ciência o grande elo entre os diversos campos da matemática, inclusive lógica. (FIORENTINI; MIGUEL, 1993, p.83)

2. 3 Qual a Importância de Estudar os Conceitos Matemáticos

Todo conteúdo de Matemática é introduzido por meio de conceitos. Isso porque a teoria permite que os estudantes organizem, construam e internalizem os conhecimentos que lhes foram apresentados para, enfim, aplicá-los.

Sem esse fundamento, os estudantes tendem a ter mais dificuldade para resolver os exercícios e aprender tópicos mais complexos que dependem justamente dessa base teórica.

Para acertar uma questão sobre Geometria Plana, por exemplo, ter noções de Trigonometria pode fazer toda a diferença.

Isso vale tanto para a Matemática quanto para outras disciplinas, como Física e Química, em que a linguagem matemática pode ser utilizada para resolver problemas. Além disso, a interdisciplinaridade aparece cada vez mais nos vestibulares.

Nesse caso, os conceitos de Matemática são contextualizados com atualidades e tópicos de outras áreas do conhecimento. Logo, a teoria passa a ter um papel fundamental para a compreensão e, consequentemente, a resolução dessas questões.

Por fim, é preciso frisar que o entendimento teórico também dá autonomia aos estudantes, uma vez que eles terão maior facilidade para recordar as fórmulas matemáticas, já que conseguem deduzi-las.

Para aprender qualquer conteúdo, é preciso praticar constantemente. Com os conceitos de Matemática, não é diferente. Os estudantes precisam colocar em prática um conjunto de estratégias para assimilar, fixar e aprofundar essa teoria.

O fluxo da aula de Matemática é invertido através da metodologia de resolução de problemas. Antes de o professor ensinar o conceito, os alunos têm acesso ao problema, levantam hipóteses para resolvê-lo e experimentam diferentes soluções, ou seja, o estudante passa a ser central na construção do seu aprendizado.

Ao contrário do que normalmente é feito, em que a avaliação é focada apenas no resultado, com essa metodologia, o professor avaliará os caminhos percorridos pelos alunos para solucionar o problema.

Desta forma, eles serão envolvidos em um ambiente de investigação, desconstruirão a ideia de que precisam sempre acertar e se sentirão desafiados. Sim, os alunos também podem errar, pois é natural e faz parte do processo de aprendizado.

Porém, como em qualquer outra atividade, tenhamos em mente que é preciso planejar para que a problematização proposta esteja alinhada com o conteúdo em questão.

3. ABORDAGEM HISTÓRICA

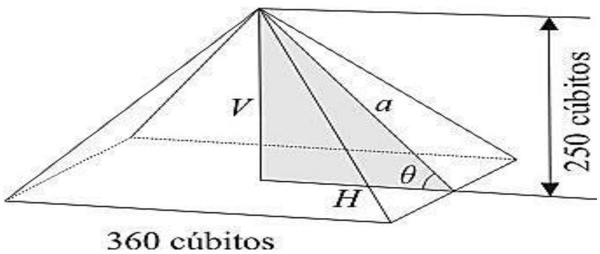
O triângulo retângulo é uma figura geométrica plana conhecida há muito tempo pela humanidade e seu uso sempre esteve presente no cotidiano das atividades que necessitam de cálculos matemáticos para resolver questões de medidas de comprimentos de segmentos ou áreas planas.

De acordo com relatos antigos, os arquitetos egípcios já trabalhavam com os conceitos do triângulo retângulo quando construíam as pirâmides. Havia a necessidade de determinar um ângulo reto com precisão, já que as bases das pirâmides tinham a forma de um quadrado. Dessa forma, eles desenvolveram um método muito curioso em que usavam uma corda com 13 nós espaçados igualmente, os espaços entre os nós eram tomados como unidade de medida e, em seguida, fixavam estacas de madeira no chão, no 1º nó e no 13º nó, no 4º e 8º nó, formando o triângulo. Eles já sabiam que fazendo isso, obtinham um triângulo retângulo.

> [...] No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes**[1], conhecido como Papiro Rhind[1], que data de aproximadamente 1650 a.C. e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo. (COSTA, 1997).

Segundo Costa, 1997, Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra, mas pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo OMV como mostrado na figura abaixo.

Figura 2 - O seqt egípcio



Fonte: Disponível em www.obaricentrodamente.com. Acesso em: 22/01/2023.

Os babilônios também já tinham conhecimento dos conceitos deste tipo de

---

1 O Papiro Ahmes é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia de um antigo papiro do século XIX a.C. que esteve em poder do escriba Ahmes. Foi adquirido no Egito por H. Rhind e por isso é usualmente conhecido como Papiro Rhind (Chace, 1986).

triângulo, pois faziam uso dos conceitos para desenvolverem as teorias relacionadas à Astronomia e ao planejamento de calendários para a época do plantio e colheita na agricultura.

Na China, por volta de 1110 a.C, também foram encontrados fragmentos e anotações com referência a triângulos retângulos que eram usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Porém, os vestígios não permitiram descobrir quais técnicas eles utilizavam.

É interessante mencionar algumas curiosidades sobre os nomes dos elementos que compõem o triângulo retângulo. Hipotenusa, por exemplo, era o nome dado às cordas de um instrumento musical chamado Lira e essas cordas formam um triângulo retângulo com os lados do instrumento. A lira, assim como a harpa, são os instrumentos mais antigos de corda. A palavra “cateto” vem do grego Khatetos (ΚΑΘΗΤΟΣ, κάθετος) que significa “que cai perpendicular”, pois depende de como visualizamos o triângulo retângulo, um dos seus lados menores está na vertical — como algo que cai. Os catetos formam o ângulo reto do triângulo.

Entre as relações métricas destaca-se o famoso Teorema de Pitágoras. Esta relação é bastante aplicada na resolução de diversos problemas que exigem o cálculo de segmentos, perímetro ou áreas de figuras planas, especificamente os triângulos.

Conhecer os elementos do triângulo retângulo é essencial para que se entendam as suas relações e, conforme o termo menciona, relações métricas são as relações entre as medidas dos segmentos que compõem este triângulo.

O matemático e filósofo Pitágoras (569 a.C — 480 a.C), nascido na ilha de Samos, Grécia, desenvolveu suas ideias junto com outro matemático, Tales de Mileto e, dessa forma, introduziram e desenvolveram a matemática como ciência. Pitágoras viajou para vários lugares como Babilônia e Egito e com essas viagens, absorveu muito conhecimento na área de matemática. Fundou uma escola de filosofia e matemática - Escola Pitagórica, onde foi descoberto o teorema de Pitágoras.

Acredita-se que o teorema foi descoberto na Escola Pitagórica, mas não há certeza de que tenha sido Pitágoras, o autor dessa descoberta. Isso se deve ao fato de que toda descoberta ou o que era produzido nesta escola, era de domínio coletivo, mas costumava-se atribuir o feito aos mestres. Além disso, em suas viagens, Pitágoras observou que os egípcios e os babilônios já faziam uso dessa aplicação, assim como os chineses, como foi mencionado antes.

Este teorema tem diversas demonstrações e diferentes modos e áreas de aplicações. O matemático americano Elisha Scott publicou 230 demonstrações no seu livro Pythagorean Proposition em 1940. Hoje sabemos que existem mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, algumas feitas por personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci e até mesmo um presidente dos Estados Unidos (em1817), James Abram Garfield (1831 - 1881). Segundo Lima (2013), não se sabe qual foi o tipo de demonstração usada por Pitágoras, mas acredita-se que ele tenha usado alguma que envolvesse áreas.

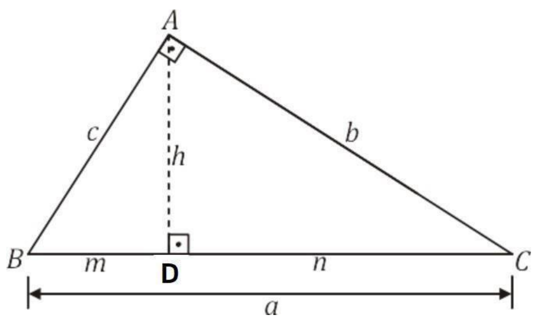
4. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: CONCEITOS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES.

Neste capítulo apresentaremos os principais elementos de um triângulo retângulo, as relações métricas no triângulo retângulo, com uma demonstração utilizando semelhanças de triângulos, o Teorema de Pitágoras, com uma demonstração utilizando as relações métricas no triângulo retângulo, e uma breve aplicação.

4.1 Elementos

Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo $\overline{AD}$ perpendicular em $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, vamos caracterizar os elementos seguintes:

Figura 3 - Triângulo retângulo



Fonte: BURMANN

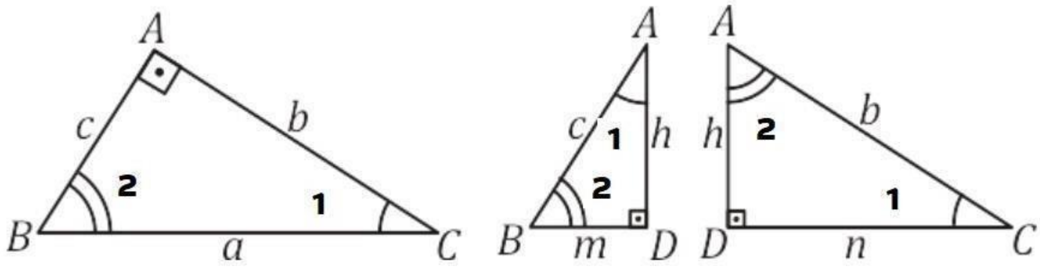
- $\overline{BC} = a$: hipotenusa,
- $\overline{AC} = b$: cateto,
- $\overline{AB} = c$: cateto,
- $\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre à hipotenusa a,
- $\overline{CD} = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa a,
- $\overline{AD} = h$: altura relativa à hipotenusa a.

Notemos que, para simplificar, confundimos um segmento com a sua medida. Assim, dizemos que a é a hipotenusa, podendo ser entendido que aé a medida da hipotenusa.

4.2 Semelhanças

Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois triângulos retângulos DBA e DAC semelhantes ao triângulo ABC.

Figura 4 - Triângulo retângulo



Fonte: BURMANN

De fato, devido à congruência dos ângulos indicados na figura acima, $\hat{B} \equiv \hat{2}$(complementos de $\hat{C}$) e $\hat{C} \equiv \hat{1}$ (complementos de $\hat{B}$) temos:

$ABC \sim DBA$ $ABC \sim DAC$ $DBA \sim DAC$, pois eles têm dois ângulos congruentes. Logo,

$$ABC \sim DBA \sim DAC$$

4.3 Relações métricas

a) Dedução

Com base nas semelhanças dos triângulos citados no item anterior e com os elementos já caracterizados, temos

$$ABC \sim DBA \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \ \textbf{(4)} \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \ \textbf{(2)} \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow ch = bm \ \textbf{(6)} \end{cases}$$

$$ABC \sim DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \ \textbf{(1)} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \ \textbf{(4)} \\ \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow bh = cn \ \textbf{(5)} \end{cases}$$

$$DBA \sim DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow bh = cn \ \textbf{(5)} \\ \frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm \ \textbf{(6)} \\ \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \ \textbf{(3)} \end{cases}$$

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

$b^2 = an$ $\quad$ $c^2 = am$ $\quad$ $h^2 = mn$ $\quad$ $bc = ah$ $\quad$ $bh = cn$ $\quad$ $ch = bm$

b) Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

<u>Demonstração:</u>

Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$$\begin{matrix} b^2 = an \\ c^2 = am \end{matrix} \Rightarrow b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = a \cdot a = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

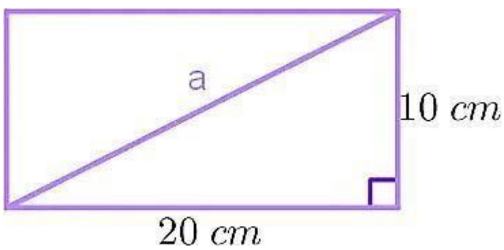
4.4 APLICAÇÕES DAS RELAÇÕES MÉTRICAS

1) Qual é a medida da diagonal de um retângulo cujo lado maior mede 20 cm e o lado menor mede 10 cm?

Solução:

A diagonal de um retângulo divide-o em dois triângulos retângulos. Essa diagonal fica sendo a hipotenusa, como mostra a figura a seguir:

Figura 5 - Aplicação 1



Fonte: BURMANN

Para calcular a medida dessa diagonal, basta usar o teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

$a^2 = 20^2 + 10^2$

$a^2 = 400 + 100$

$a^2 = 500$

a = 22,36cm, aproximadamente.

2) Um triângulo cujas projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 10 e 40 centímetros tem que altura?

<u>Solução:</u>

altura relativa $\mathbf{h^2 = m \cdot n}$

$$h^2 = 40 \cdot 10 \quad \rightarrow \quad h^2 = 400 \quad \rightarrow \quad h = 20 \text{ cm}$$

3) Sabendo que a hipotenusa de um triângulo retângulo mede 16 centímetros e que uma de suas projeções mede 4 centímetros, calcule a medida do cateto adjacente a essa projeção.

Solução:

O cateto adjacente a uma projeção pode ser encontrado a partir de qualquer uma dessas relações métricas: **c^2 = am** ou **b^2 = an**, pois o exemplo não especifica o cateto em questão. Assim:

$c^2 = a \cdot m$
$c^2 = 16 \cdot 4$
$c^2 = 64$
$c = 8$

4) Qual é a área de um triângulo retângulo cujos lados possuem as seguintes medidas: 10, 8 e 6 centímetros?

Solução:

10 centímetros é a medida do maior lado, portanto, esse é a hipotenusa e os outros dois são catetos. Para encontrar a área, é necessário saber a altura, logo, usaremos essa relação métrica para encontrar a altura desse triângulo e depois calcularemos sua área.

$ah = bc$	$A = (10 \times 4,8)/2$
$10 \times h = 8 \times 6$	$A = 48/2$
$10h = 48$	$A = 24$ cm
$h = 48/10$	
$h = 4,8$	

5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo apresentaremos um modelo concreto com material emborrachado (EVA), para mostrar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo.

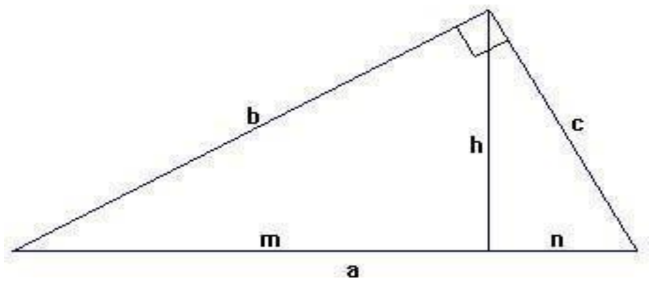
Inicialmente, será apresentada a construção das figuras geométricas que serão necessárias para a obtenção dos modelos apresentados nas atividades de 1 a 5. Esta construção envolveu o conceito de congruência de triângulos. As atividades de 1 a 5 consistem em mostrar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, utilizando o conceito de área das figuras geométricas obtidas. A proposta apresentada não foi aplicada para os alunos do ensino fundamental séries finais, ficando com a sugestão de uma proposta didática.

5.1 CONSTRUÇÃO DE FIGURAS

5. 1. 1 Construção dos triângulos retângulos

Com uma única cor de EVA, deveremos construir quatro triângulos retângulos congruentes de catetos b e c e hipotenusa a, como mostra a Figura 6 abaixo:

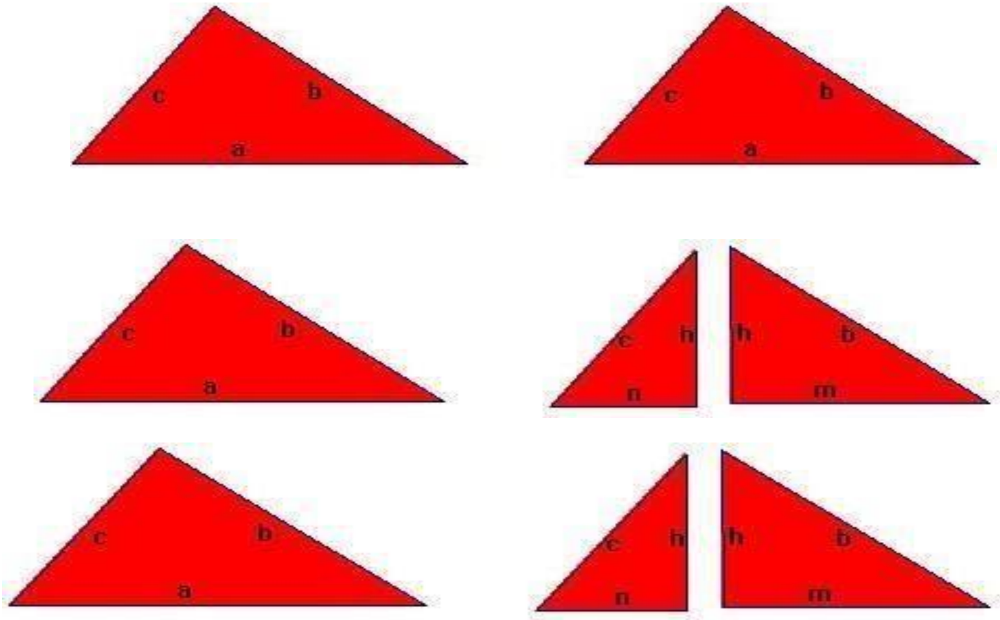
Figura - Triângulo retângulo



Fonte: BURMANN

Dois deles deverão ser recortados na altura relativa à hipotenusa, formando outros quatro triângulos retângulos. As projeções de b e c serão nomeadas por m e n, respectivamente, e a altura de h, como mostra a Figura 7 abaixo:

Figura 7 - Triângulos retângulos para demonstração da atividade

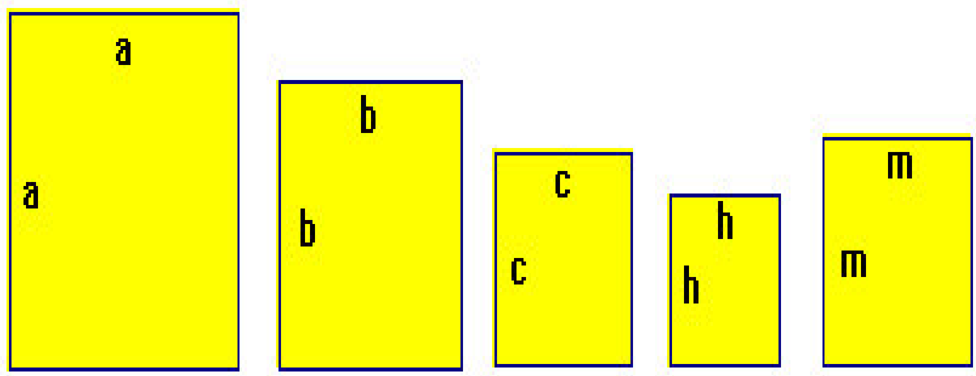


Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

5. 1. 2 Construção dos quadrados

Utilizando EVA, construiremos 5 (cinco) quadrados de lados a, b, c, h e m como mostra a Figura 8 abaixo:

Figura 8 - Quadrados para demonstração da atividade

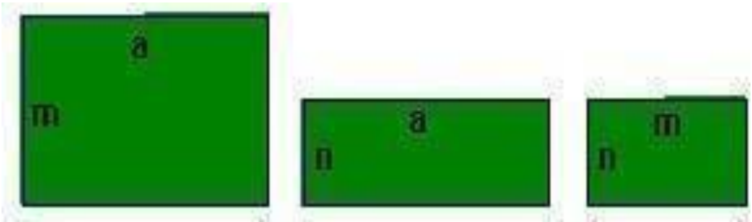


Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

5.1.3 Construção dos retângulos

Com uma terceira cor de EVA, construiremos 3 (três) retângulos de lados a e m, a e n, m e n (Fig. 9), como mostra a Figura 9 abaixo:

Figura 9 - Retângulos para demonstração da atividade



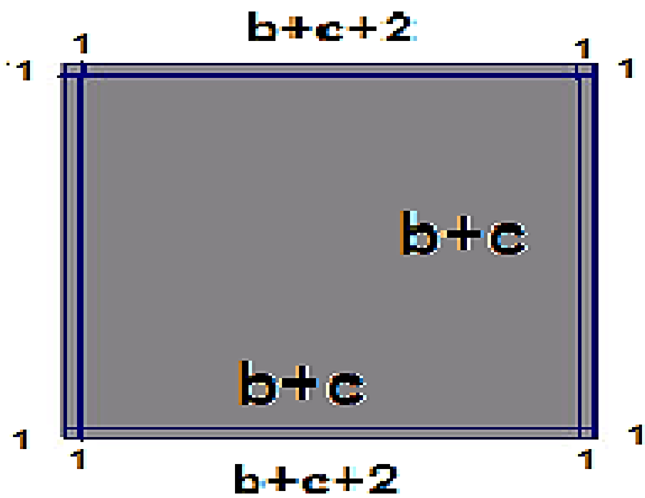
Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023.

5.1.4 Construção de uma base quadrangular

Para finalizar construiremos uma base quadrangular (Fig. 10) com área $(b + c)^2 cm^2$ para auxiliar nas demonstrações, da seguinte maneira:

- Com EVA de qualquer cor foi construído um quadrado de lado $(a + b + 2)cm$.
- Recortaram-se dois retângulos, sendo dois de tamanho $(a + b + 2)cm\ x\ 1cm$ e dois $(a + b)cmx1cm$, que foram colocados nas bordas superior, inferior, lateral esquerda e lateral direita do quadrado de lado $(a + b + 2)cm$, respectivamente.

Figura 10 - Base para demonstração da atividade



Fonte: BURMANN Acesso em: 22/01/23

Para mostrar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no triângulo retângulo, os modelos propostos construídos com material emborrachado (EVA), estão apresentados nas atividades a seguir. A notação utilizada considera o triângulo retângulo da figura 6.

5. 2 ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Para estas atividades utilizamos, em particular as medidas: a = 15 cm, b = 9 cm, c = 9 cm, m = 9,6 cm, n = 5,4 cm, h = 7,2 cm.

ATIVIDADE 1

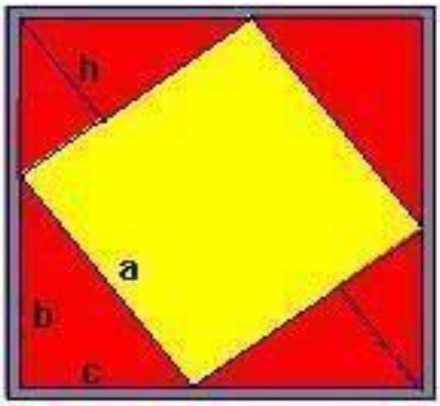
Objetivo: Mostrar o Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Descrição da atividade:

1. Posicionar na base construída de lado **a+b** (Fig. 10), o quadrado de lado **a** (Fig. 8) e todos os triângulos construídos (Fig 7) ,como mostra a Figura 11.

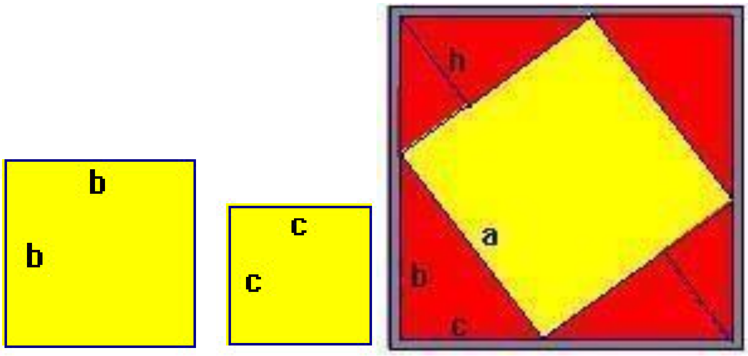
Figura 11 - Atividade 1 – etapa 1.



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

Consideremos o modelo de Pitágoras:

Figura 12 - Atividade 1 – modelo de Pitágoras

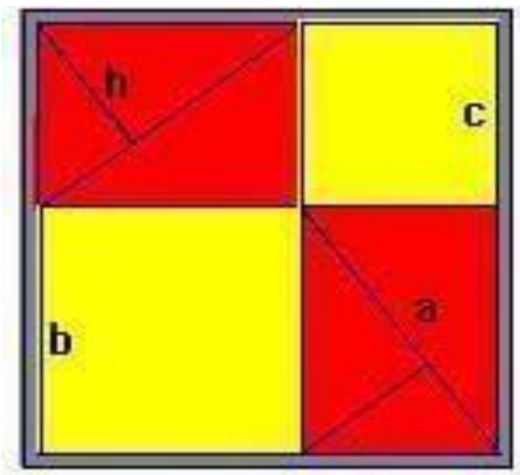


Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

- Retira da figura 11 o quadrado de lado **a** e substituir pelos quadrados de lados **b** e **c**.
- Posicionar os quadrados de lado **b** e **c**, e os triângulos formando um novo triângulo. Logo, a área do quadrado de lado **a** é igual a soma das áreas dos quadrados de lado **b** e **c**, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Figura 13 - Atividade 1 – etapa 3



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

ATIVIDADE 2

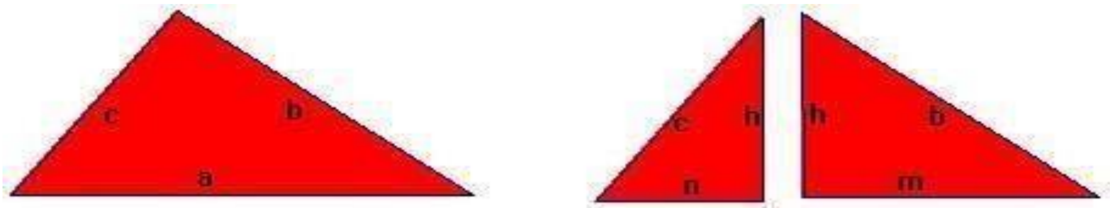
Objetivo: Mostrar que em um triângulo retângulo o produto da hipotenusa pela altura relativa a esta é igual ao produto dos catetos, ou seja,

$$ah = bc.$$

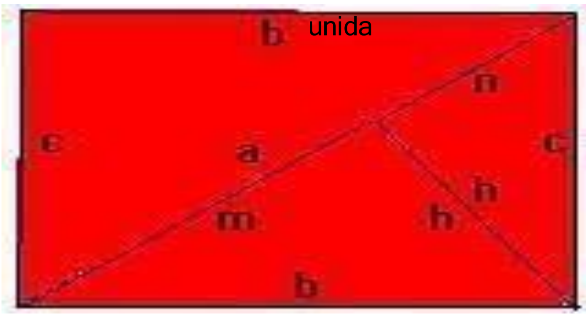
- Unir as hipotenusas dos dois triângulos construídos, utilizando um dos triângulos divido em duas partes, relativo a hipotenusa (Fig 14),obtendo-se um triângulo cuja sua área é representada pelo produto dos catetos **b** e **c** (fig 15)

- A figura 9 é o próprio modelo utilizado para provar a relação pedida. Vejamos:

Figura 14 - Atividade 2 – etapa 1



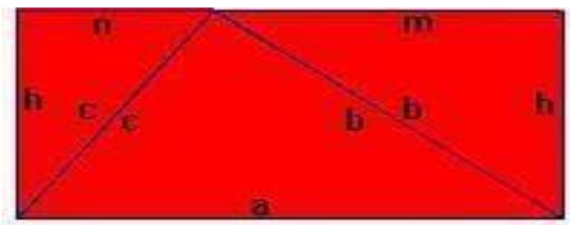
Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023 Figura 15 - Atividade 2 – etapa 1 unida



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

- Posicionar os triângulos da Figura 15, formando um novo retângulo da área **a . h** (Fig 16), de forma que os catetos coincidam **b** e **c**.

Figura16 - Atividade 2 – etapa 3



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

As áreas de figuras distintas formadas por triângulos congruentes são iguais. Logo, de 1 e 2, temos **ah = bc**.

ATIVIDADE 3

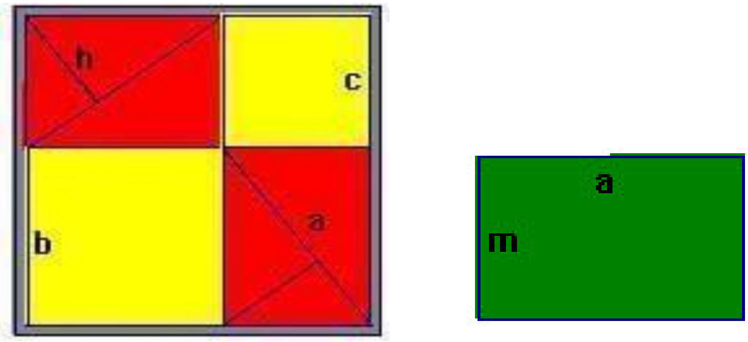
Objetivo: Provar que no triângulo retângulo, a área de um quadrado de lado **b (cateto)** é igual ao produto da hipotenusa e uma projeção.

$$b^2 = am.$$

Descrição da atividade:

Consideremos o modelo:

Figura17 - Atividade 3

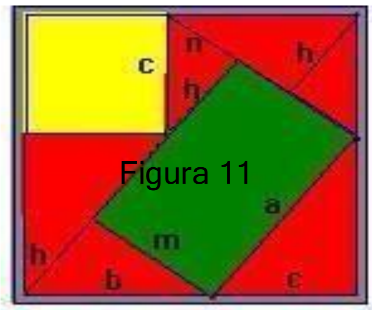


Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

- Posiciona na base construída de lado **a+b** (Fig 10) os quadrados de lado **b** e **c** (Fig 8) e todos os triângulos construídos na figura 7, retira da Fig 17 o quadrado **b** e substituir por o retângulo **am**, posicionar o retângulo **am** e os triângulos. Logo, a área do quadrado de lado **b** e igual à área do retângulo **a** e **m** , ou seja,

$$b^2 = am.$$

Figura18 - Atividade 3 – etapa 1



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

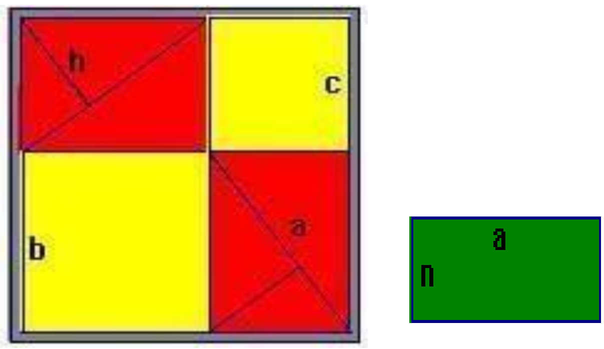
ATIVIDADE 4

Objetivo: Mostrar que no triângulo retângulo, $\mathbf{c^2 = an}$

Descrição da atividade:

Consideremos o modelo:

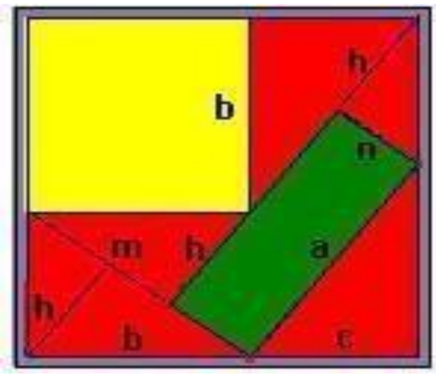
Figura 19 - Atividade 4



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

- Posicionar na base construída de lado **a+b** (Fig 10) os quadrados de lados **b** e **c** (Fig 8) e todos os triângulos construídos na Fig. 7, retira da figura 19, o quadrado **c** e substituir por retângulo **an**. Posicionar o retângulo **an** e os triângulos. Logo, a área do quadrado de lado **c** é igual a mesma área do retângulo, ou seja, $\mathbf{c^2 = am}$.

Figura20 - Atividade 4 – etapa 1



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

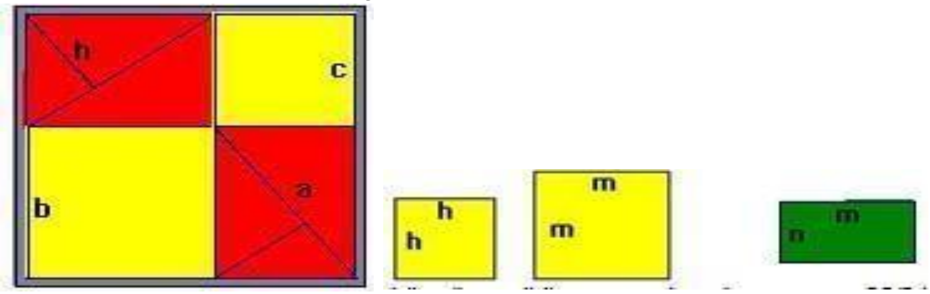
ATIVIDADE 5

Objetivo: Mostrar que no triângulo retângulo, **$h^2 = mn$**

Descrição da atividade:

Consideremos o modelo:

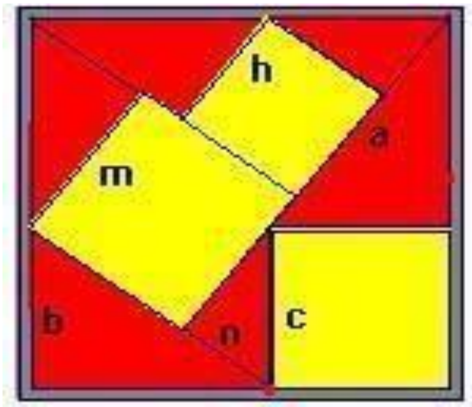
Figura21 - Atividade 5



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

- Posicionar na base **a+b** (Fig 10), os quadrados de lados **b** e **c** (fig 8) e todos os triângulos construídos na (fig 7). Retira da fig. 21, o quadrado **b** e substituir por os quadrados **h** e **m**.

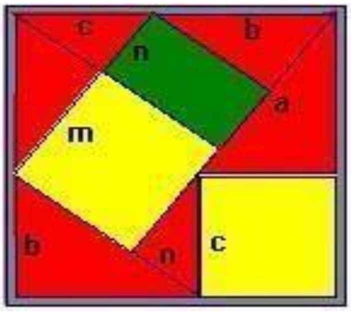
Figura22 - Atividade 5 – etapa 1



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

- Retirando o quadrado do lado **h** e substituir pelos retângulos de lados **m** e **n** e posicionar os demais triângulos e quadrados na base (Fig.22). Logo a área dos retângulos de lados **m** e **n**, compõe o quadrado de lado **h**, ou seja, **$h^2 = m \cdot n$**

Figura23 - Atividade 5 – etapa 2



Fonte: Disponível em https://www.ibilce.unesp.br. Acesso em: 22/01/2023

5. 2. 1 IMAGENS DAS ATIVIDADES EXPERIMENTAIS UTILIZANDO-SE EVA

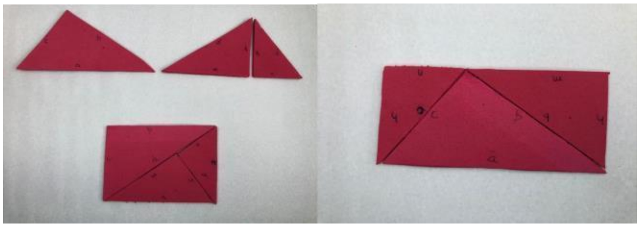
ATIVIDADE 1

Figura 24 - atividade 1 – EVA

Fonte: BURMMANN

ATIVIDADE 2

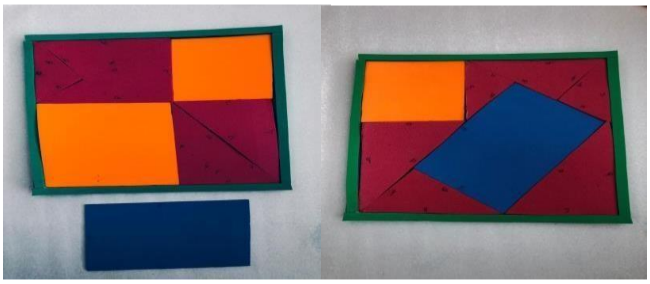
Figura 25 - atividade 2 – EVA



Fonte: BURMANN

ATIVIDADE 3

Figura 26 - atividade 3 – EVA



Fonte: BURMANN Acesso em:22/01/23

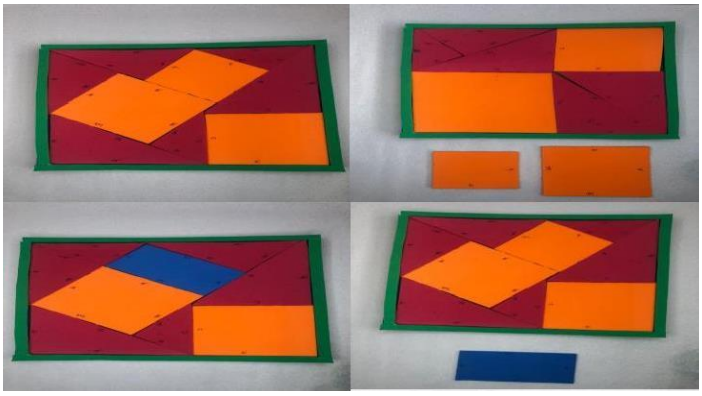
ATIVIDADE 4

Figura 27 - atividade EVA

Fonnte: BURMANN Acesso em:22/01/23

ATIVIDADE 5

Figura 28 - atividade 5 EVA



Fonte: BURMANN Acesso em: 22/01/23

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As propriedades matemáticas podem ser verificadas analiticamente ou experimentalmente. Neste trabalho foram desenvolvidas particularmente atividades experimentais para mostrar o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, utilizando modelos concretos construídos com material emborrachado (EVA). Estes modelos podem ser considerados, materiais didáticos, que visam facilitar a visualização e o entendimento das propriedades geométricas, podendo despertar (ou despertando) nos alunos um grande interesse pelos conteúdos envolvidos, dando oportunidade de cada um desenvolver o seu próprio raciocínio e conhecimento.

Espera-se que o manuseio com os modelos concretos levam os alunos a entenderem de forma natural as propriedades e teoremas mediante questionamentos e curiosidades.

Uma sugestão para o professor leitor é que ele construa com os alunos os modelos aqui apresentados, através das atividades propostas que permitirão ao professor explorar os conceitos de congruência de triângulos, triângulos retângulos e área, além de levar o próprio aluno a concluir os teoremas ou propriedades que o professor estar querendo apresentar.

È notório que o uso de materiais manipuláveis e jogos podem despertar o interesse do aluno a fim de possibilitar aos educandos conhecimentos matemáticos acessíveis e prazerosos através de jogos lúdicos assim o ensino da matemática seja mais divertido e proveitoso, buscando um maior nível de interesse na disciplina, diferenciando a rotina da classe, dessa forma melhorar a aprendizagem e a desenvoltura dos alunos.

REFERÊNCIAS

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble,1986.

BROUSSEAU, G. **Les différents rôles du maître**. Bulletin de l' A.M.Q., Montréal, 1988.

COLL, C. et al. **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2001.

COSTA, Lobo da, N.M. **Funções Seno e Cosseno: Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do Mundo Experimental e do Computador.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 1997. Disponível em: https://Matematica_Mod02_unid9.pdf (cecierj.edu.br).Acesso em: 05 set. 2023

COSTA, **Estudos Antropológicos e Sociológicos,** 1997.
.
DIAS, Camilla Ehrat. **Sistema Positivo de Ensino: ensino fundamental 9º ano, matemática:** v. 2. 2. ed. atual. Cia. Bras. de Educação e Sistemas de Ensino: Curitiba, 2022.

FIORENTINI, Dário; MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?,** Pro-Posições: v. 3 mar. 1993.

JANUÁRIO, Gilberto. **Materiais Manipuláveis:** mediadores na (re) construção de significados matemáticos. 2008. 89 f. (Especialização) – CEPPE, Universidade Guarulhos, Guarulhos, 2008.

LAMAS, Rita de Cássia; MAURI, Juliana. **O Teorema de Pitágoras e as relações métricas no Triângulo retângulo com material emborrachado.** UNESP, São José do Rio Preto, 2004. Disponível em: http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos. Matematica/ Acesso em: 22 de jan, 2023.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

MAYMONE, Annelyse; SANTOS, Judson. **Relações Métricas.** Formando Cidadãos, Sistema Integrado de Educação: Recife, 2018.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004. .

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** G. Polyia; [tradução Heitor Lisboa de Araújo], Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática uma análise da influência francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 127 p.

QUADRO, Rosana Cunha. **Relações Métricas no Triângulo Retângulo:** Um estudo didático: Florianópolis, 2004. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/9. Acesso em: 07 set, 2023.

RODRIGUES. Fredy Coelho; GAZIRE. Eliane Scheid. **Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão.** Revemat: Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187-196, 2012.

SANTOS M. C.; SILVA F. L. T.; LINS A. F. Demonstrações do teorema de Pitágoras na perspectiva do professor de matemática. **Encontro Nacional de Educação, Ciência e Tecnologia/**UEPB, 2012.

APÊNDICE A - Link com a descrição das atividades experimentais, construção e montagem do material didático manipulável: https://youtube.be/fpkDybQ3cw