INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE ALAGOAS

CAMPUS MACEIÓ

COORDENAÇÃO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANILVA CLAUDIA ALVINO DA SILVA

# UMA ANÁLISE DOS NÚMEROS REAIS SOB O OLHAR DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO

MACEIÓ-AL
2022

DANILVA CLAUDIA ALVINO DA SILVA

# UMA ANÁLISE DOS NÚMEROS REAIS SOB O OLHAR DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas - IFAL, Campus Maceió, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Anderson Rangel Batista Siqueira.

MACEIÓ-AL
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**
**Instituto Federal de Alagoas**
***Campus Maceió***
***Biblioteca Benevides Monte***

S586u Silva, Danilva Cláudia Alvino da.
Uma análise dos números reais sob o olhar do professor de matemática no ensino básico / Danilva Cláudia Alvino Silva. - Maceió, 2022.
36 f. : il.

Orientação: Prof. Me. Anderson Rangel Batista Siqueira.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió. Maceió, 2022.

Arquivo no formato digital em PDF do trabalho acadêmico.

1. Matemática – Ensino básico 2. Números reais. I. Título.

*CDD:512.786*

**Naíva Maria Amaral**
**Bibliotecária – CRB-4/989**

DANILVA CLAUDIA ALVINO DA SILVA

# UMA ANÁLISE DOS NÚMEROS REAIS SOB O OLHAR DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 05/07/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

Anderson Rangel Batista Siqueira

Prof. Me. Anderson Rangel Batista Siqueira (Orientador)

Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Gilmar Teodozio Silva

Prof. Me. Gilmar Teodozio Silva (Examinador 1)

Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Rosivaldo Pereira da Silva

Prof. Me. Rosivaldo Pereira da Silva (Examinador 2)

Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Dedico esse trabalho à Deus, minha família que foram os responsáveis e me deram todo incentivo necessário para a conclusão desse Curso.

Prepare o seu coração
Pras coisas
Que eu vou contar
Eu venho lá do sertão [agreste,
da zona da mata, do litoral]
[...] E posso não lhe agradar

Aprendi a dizer não
Ver a mortes em chorar
E a morte, o destino, tudo
A morte e o destino, tudo
Estava fora do lugar
Eu vivo pra consertar

[...]

E nos sonhos
Que fui sonhando
As visões se clareando
As visões se clareando
Até que um dia acordei

Então não pude seguir
Valente em lugar tenente
E dono de gado e gente
Porque gado a gente marca
Tange, ferra, engorda e mata
Mas com gente é diferente

Geraldo Vandré e Théo de Barros
(*Disparada)*

## RESUMO

Venho através deste trabalho, incentivar aos alunos de licenciatura em Matemática a dar mais importância ao Estudo dos números reais como forma de conscientizar os futuros professores a transmitir o conteúdo mais claro e objetivo aos estudantes do Ensino Básico, em especial ao assunto que trata do surgimento dos números Irracionais. A falta de interesse por parte de alguns professores de passar um pouco da teoria e o surgimento da história dos números reais leva ao aluno acreditar que eles existem por acaso, ocasionando aceitar fórmulas prontas, ou como acontece em outros casos em que o professor omite esse tópico, sem dar muita importância a aprendizagem, levando muitos alunos a terminarem o ensino médio praticamente sem saber o porquê deles existirem e passam despercebido de como o conjunto dos números reais podem ser descritos, que ao chegar na licenciatura se depara com vários axiomas de que se tem que provar a existência de cada elemento. Levamos em consideração o objetivo principal deste trabalho que é um estudo crítico dos números reais, sob o ponto de vista do professor de matemática, que no nosso caso é esta licencianda, pelas experiências vividas na carreira escolar, a qual se percebe que uma maioria dos licenciandos em matemática também enfrentam bastante dificuldade em tentar compreender um assunto que a princípio parece simples, porém se tem várias divergências, em virtude disso, passaremos a analisar quais os procedimentos ideais que se adequam a nossa realidade em meio ao ensino da Matemática, como também propor ao futuro professor formas de como passar o conteúdo para o discente de maneira didática e compreensiva, proporcionando ao estudante uma visão mais aprofundada do assunto, de forma que o aluno passe a gostar do conteúdo proposto. Para a realização desse trabalho adotamos a pesquisa bibliográfica e abordagem qualitativa, com base numa abordagem bibliográfica, de forma explicativa.



**Palavras-chave:** Ensino Básico; Matemática; Números Reais.

# ABSTRACT

This work attempts to encourage students of major in Mathematics to give more importance to the Study of real numbers as a way of being future teachers aware of transmitting the clearest and most objective content to Basic Education students, especially to the subject that deals with the origin of irrational numbers. The unwillingness of some teachers to talk about real number theory and history leads the student to believe that they exist by chance, wlich leads students to accept ready-made formulas. In some cases the teacher itself omits this topic, without attaching much importance to learning, and many students finish high school without knowing why real(ou irrational?) numbers exist and go unnoticed as to how the set of real numbers can be described. The main aim of this work is a critical study of real numbers, from the point of view of a mathematics teacher, this ondergraduate student herself, based on experiences lived in the school career, which can be seen that many undergraduates in mathematics also face a lot of difficulty in trying to understand a subject that seems simple at first, but there are several divergences, as a result, we will analyze the ideal procedures that suit our reality in mathematics teaching, as well as propose to future teachers ways of passing the content to students in a didactic and comprehensive approach, offering students a deeper view of the subject, so they may enjoy the proposed content. Work, uses bibliographic research and a qualitative approach, based on a bibliographic approach, in an explanatory way.



Keywords: Basic Education; Math; Real Numbers.

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Um dos papéis mais importante no ensino superior é a construção do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), que no nosso caso, de um estudante de Licenciatura em Matemática, pois na minha opinião, deveria ter um olhar especial para a Educação Básica, pois a habilitação profissional que se obterá um aluno de licenciatura ao final da graduação permite que o sujeito exerça uma das profissões mais nobre que existe no campo de trabalho: ser professor de Matemática, principalmente na Educação Básica.

Para falar de Educação, principalmente em nosso Estado, precisamos entender que a evolução do ensino acadêmico não esconde a dificuldade em compreender os números reais, fato este que pude perceber em toda carreira escolar até os dias de hoje e que ainda perdura muitas dúvidas, motivo este em que tentarei demonstrar em forma de trabalho acadêmico. Sabemos que o Conjunto dos Números Reais é formado por outros diversos conjuntos onde os elementos são números, esses números são classificados como naturais, inteiros, racionais e irracionais.

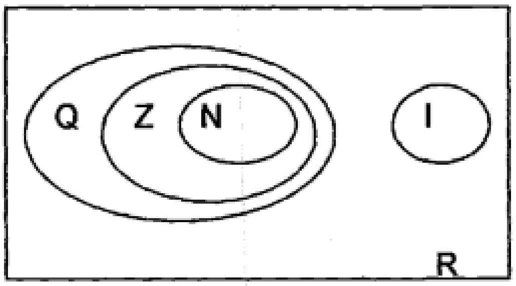
Em suma, Teles (2016, p.10) destaca na criação da Lei de Diretrizes e Bases e alguns Parâmetros para dar melhoria na apresentação dos números reais:

> Ao longo do tempo, foram tomadas medidas que servem de referência aos professores e autores de livros didáticos buscando melhorias e padronização do Ensino Básico em todo país. Tais como a implementação da nova Lei de Diretrizes e Base (LDB), a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e as propostas curriculares de cada Estado. Mas, apesar dessas referências, ainda encontramos problemas na apresentação dos números reais.

Algumas dúvidas começam a surgir nos números racionas e nos números irracionais, pois as definições dos outros conjuntos numéricos e no caso dos irracionais não é tão evidente para o aluno que está iniciando o ensino fundamental, já em sua adolescência, perdurando algumas lacunas de como o professor chegou em tal resposta.

Na classificação de quais são os números reais, podemos denomina-los como o conjunto de elementos, representados pela letra $\mathbb{R}$, que inclui os números Naturais ($\mathbb{N}$): $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, números Inteiros ($\mathbb{Z}$): $\mathbb{Z}$= {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}, números Racionais ($\mathbb{Q}$): $\mathbb{Q} = \{\ \ldots\ , \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{4}, \ldots\}$, números Irracionais ($I$): $I$ = {..., $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$, 3,141592, ...}

**Figura 01: representação dos conjuntos dos Números Reais.**




**Fonte: - http: // www.apm.pt**

Pela imagem acima nota-se um equívoco em querer apresentar o conjunto dos números irracionais menor que os racionais e até mesmo menor que os números inteiros, o que é passado de forma errônea, visto que todos os conjuntos são infinitos, nesse caso, apresentamos essa imagem de propósito para acrescentar a forma de como é ensinado por alguns livros.

Seguimos também outros conceitos de diversos autores quando cita alguns conjuntos, a exemplo de Teles (2016, p.10) “Podemos também citar que os números reais é a união dos números racionais com os irracionais, e dizer que os irracionais são os reais que não são racionais”.

Os números racionais são aqueles que podemos escrever na forma de fração entre números inteiros, com o denominador diferente de zero.

Segundo o que diz Oliveira (2009, p.8) ao parafrasear os números racionais “As frações já eram conhecida pelos egípcios e babilônios que criaram meios engenhosos de registrá-las e de fazer cálculos com elas. Mas foram os gregos influenciados pelos ensinamentos de Pitágoras, que fizeram das frações o centro de seu sistema matemático filosófico.”

Alguns autores definem que os números irracionais são aqueles com uma quantidade ilimitada de algarismos não-periódicos e que não podem ser expressos como fração.

Teles (2016, p. 10) também afirma que outra maneira muito utilizada é dizer que os números irracionais são números que não podem ser escritos como quociente entre números inteiros ou dizer que os irracionais são decimais infinitos e não periódicos.

Levando em consideração que todas essas afirmações não são falsas, ou seja, são todas comprovadas cientificamente como verdadeiras, no entanto, ainda não definem os números irracionais, permanecendo ainda várias dúvidas na cabeça do aluno.

Apesar disto, vimos que até hoje a abordagem dos números irracionais nos livros escolares é muito superficial, pois uma grande maioria de estudantes ainda não sabe ao certo explicar quais são os números irracionais e como os define, de forma que passa a acreditar que "é assim e pronto".

Um exemplo desse assunto, onde se detecta uma de sua deficiência didática, em se falando de números irracionais é quando o aluno do Ensino Básico tenta resolver uma equação polinomial do 2º grau e encontra uma raiz que não é exata, ou seja, uma raiz quando o número não é inteiro. Geralmente, o aluno tenta aproximar o resultado por um número racional ou diz que o resultado "deu errado". Forçando o professor a realizar exercícios que tenham como resultado suas raízes exatas, para ficar mais fácil a compreensão da turma.

Outro exemplo que complica ainda mais a cabeça do discente é quando se apresenta as dízimas periódicas, na explicação que são números racionais, de modo que possuem infinitas casas decimais. Já no caso das dízimas periódicas serem escritas sobre forma de fração, através de números inteiros, acreditamos que o aluno possui uma maior aceitabilidade do conteúdo.

Os principais exemplos de números irracionais são $\sqrt{2}$, $\pi$. Esses números, em sua grande maioria, são apresentados de forma bem resumida no Ensino Básico, levando o estudante a acreditar que eles existem, mas o porquê deles existirem fica limitado a sua explicação, não ficando bem definidos pelos professores, através dos livros de Matemática, como eles foram descobertos.

Como também muitos professores não tem interesse de passar tais explicações em sala de aula em virtude do grau de complexidade, vindo o aluno a ter um maior aprofundamento ao cursar a Licenciatura em Matemática. O que o aluno não conseguiu aprender no Ensino Básico, fica surpreendido da forma de como é apresentado no Ensino Superior.

Ficamos aqui com esse ponto de observação e que tentaremos despertar interesse nos futuros professores de Matemática para encontrarmos uma solução para tais dúvidas que venham surgir e assim tentar mudar esse cenário.

Esse trabalho é dividido em 04 partes, na Introdução damos uma explanação geral sobre o que é o conjunto dos números reais, mostrando como traçaremos nossas ideias, no Capítulo 1 falaremos sobre os números reais de forma geral, mas sempre colocando em evidência os números irracionais, já no Capítulo 2 citaremos sobre números racionais e irracionais, de forma a despertar no leitor essa curiosidade de buscar uma mudança pedagógica, para que o aluno não continue com dúvidas, também citamos um breve histórico do número $\pi$. No Capítulo 3 citaremos algumas sugestões usadas no ensino básico de como são passadas para os alunos, alguns exemplos de forma um pouco equivocada, e isso vem de geração a geração, creio eu que por falta de outros meios menos complexos e que de fácil entendimento. Tentaremos com isso mudar essa mentalidade e conscientizar os futuros professores a criarem meios que facilitem o processo de ensino-aprendizagem. Por fim, na conclusão daremos algumas sugestões de como apresentar de maneira didática os números reais no Ensino Fundamental e tentar conscientizar os futuros professores que atentem um olhar especial a esse assunto, a princípio fácil, mas que vai deixar dúvidas nos alunos em sua trajetória escolar.

## 2. ENTENDENDO OS NÚMERO REAIS NO ENSINO BÁSICO

Começaremos com uma definição simples do que significa Conjuntos Numéricos, visto que a álgebra é uma parte da matemática estudada a partir do 6º ou 7º ano do ensino fundamental. Antes disso, predomina o estudo da aritmética, que trata principalmente das operações com números naturais e os números racionais positivos.

No início da álgebra, aprendemos os números inteiros negativos e suas operações, depois os números racionais, tanto positivos quanto negativos. Finalmente são estudados os números irracionais e os números reais.

Na verdade, existem inúmeros conjuntos numéricos pois existem inúmeras características que podemos tomar como padrão para formar um novo grupo. Contudo, existem cinco conjuntos entendidos como principais.

Os cinco conjuntos numéricos principais são:

- Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$).
- Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$).
- Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$).
- Conjunto dos Números Irracionais ($I$).
- Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$).

**Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)**

O primeiro conjunto inventado foi o Conjunto dos Números Naturais. Ele foi criado devido à necessidade de fazer contas. Seus integrantes são os números inteiros positivos.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

As chaves são usadas para representar conjuntos e as reticências representam infinidade, afinal, os números nunca acabam. O ponto de partida é o 0. Entretanto, podemos colocar alguns subconjuntos dentro de □ . Por exemplo:

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\ldots, n, \ldots\}$, conjuntos dos números naturais não-nulos, ou seja, sem o zero;
- $\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, 8 \ldots, 2n \ldots\}$, conjunto dos números naturais pares;
- $\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, 9 \ldots, 2n + 1, \ldots\}$, conjunto dos números naturais ímpares;
- $\mathrm{P} = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$: conjunto dos números naturais primos.

**Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)**

O Conjunto dos Números Inteiros é uma extensão do conjunto dos naturais, isso porque ele inclui os números inteiros negativos. Assim, seus elementos são:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

E assim como o dos Naturais, podemos formar subconjuntos:

- $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, conjuntos dos números inteiros não-nulos, ou seja, sem o zero;
- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, conjunto dos números inteiros e não-negativos**;**
- $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, conjunto dos números inteiros positivos e sem o zero;

  $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$, conjunto dos números inteiros não-positivos;
- $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$, conjunto dos números inteiros negativos e sem o zero.

**Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)**

E entrando com os números que podem ser escritos como frações, temos o Conjunto dos Números Racionais representado pelos seguintes elementos:

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : x == \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}\, e\, b \in \mathbb{N}\}$$

Traduzindo: Todos os números que podem ser escritos como fração são racionais. Mas que números são esses?

- Todos os números inteiros;
- Decimais finitos $\{0{,}1, 3{,}5, 6{,}32\ldots\}$;
- Dízimas periódicas $\{5{,}222222\ldots, 4{,}454545\ldots, 7{,}255255255\ldots\}$.

E assim como com seus antecessores, podemos formar subconjuntos com os racionais.

- $\mathbb{Q}$***** = subconjunto dos números racionais não-nulos, formado pelos números racionais sem o zero;

- $\mathbb{Q}_+ =$ subconjunto dos números racionais não-negativos, formado pelos números racionais positivos e o zero;
- $\mathbb{Q}_+^* =$ subconjunto dos números racionais positivos, formado pelos números racionais positivos, sem o zero;
- $\mathbb{Q}_- =$ subconjunto dos números racionais não-positivos, formado pelos números racionais negativos e o zero;
- $\mathbb{Q}_-^* =$ subconjunto dos números racionais negativos, formado números racionais negativos, sem o zero.

**Conjunto Dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)**

A característica que todos os representantes do Conjunto dos Números Irracionais possuem em comum é que nenhum deles pertence ao conjunto dos Racionais.

Por mais que pareça uma brincadeira para deixar a leitura mais leve, esse é realmente o fundamento matemático para separar essas duas categorias. Não tem como um número ser racional e irracional ao mesmo tempo.

Também não existe nenhuma terceira opção nesse mesmo sentido, portanto, o que não é racional, é irracional.

Ainda podemos defini-los como números que não podem ser escritos em forma de fração. Por exemplo:

- Decimais infinitos$\{\pi, \sqrt{2}, \ldots\}$;
- Raízes não exatas $\{\sqrt{5}, \sqrt{7}$,...}.

**Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)**

Todavia, os Conjuntos dos Número Racionais e Irracionais se juntam para formar um grande conjunto que engloba todos os anteriores. Este é o Conjunto dos Números Reais. Sua expressão matemática é a seguinte:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I} = \{\mathbb{Q} + \mathrm{I}\}$$

As relações que o conjunto dos reais mantém com os demais são as seguintes:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, que está contido em $\mathbb{Q}$ e que está contido em $\mathbb{R}$.

- $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{I}$ está contido em $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q} \cup \mathrm{I} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ união com $\mathrm{I}$, corresponde a $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \emptyset \rightarrow \mathbb{Q}$ intersecção com $\mathrm{I}$, corresponde a vazio.
- $\mathrm{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \rightarrow \mathrm{I}$ corresponde a $\mathbb{R}$, subtraído de $\mathbb{Q}$.

Sabemos que a missão de definir o conjunto dos números reais para os alunos do Ensino Básico parece ser fácil, mas não é. Sua formação se dar pela união do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ (onde estão presentes os números inteiros $\mathbb{Z}$ que, por sua vez, contém os números naturais $\mathbb{N}$) e do conjunto dos números irracionais $\mathrm{I}$, conforme já foi citado acima.

Entendemos que a dificuldade maior não está na quantidade de conjuntos a serem definidos e ensinados para os alunos, tudo se inicia a partir dos números naturais, com seus conceitos e propriedades, sua origem é o professor demostrar a forma cardinal deles, depois os números inteiros e consequentemente os números racionais, com suas frações e dizimas, mas especificamente quando chega no último conjunto, nos números irracionais aí é onde está o problema.

Aos olhos de Oliveira (2009, p.8) “um dos momentos mais importantes da história da matemática foi a descoberta de que os números racionais, apesar de sua densidade, deixam “buracos” ao longo da linha dos números, ou seja, pontos que não correspondem a nenhum número racional.”

Acreditamos que a grande novidade para um estudante ao iniciar os estudos dos números reais são os números irracionais. Normalmente, eles são apresentados como um complemento necessário para a existência dos reais. Isto é, o conjunto dos números reais consiste na união $\mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$.

O que é percebido é que o conjunto dos números irracionais é apresentado aos alunos sem alguma motivação.

Pommer (2011, p.2) afirma que, no campo de ensino da Matemática, os irracionais ainda permanecem como um problema e seu ensino demanda mais pesquisas e esclarecimentos.

As matérias que falam de números Irracionais que provam um pouco da falta de compreensão dos alunos na Educação Básica, esse citada em Mendes, quando se refere que

> [...] não conseguem distinguir a diferença entre um número racional e um número irracional; números com infinitas casas decimais periódicas são confundidos com irracionais; não há uma ideia formada pelo infinito; não há uma justificativa para adquirir conhecimentos sobre os números irracionais. (MENDES, 2012, p. 29)

O aluno precisa compreender o conjunto dos números racionais para depois compreender os irracionais, um está diretamente relacionado com o outro. Mosca ressalta que os Números Irracionais são

> [...] possuem estreita ligação com o conjunto dos números racionais, principalmente no que tange à sua definição, no sentido de que se o aluno não compreender bem o significado dos assuntos envolvendo o conjunto dos números racionais, torna-se mais difícil se apoderar da compreensão dos significados do conjunto dos números irracionais. (MOSCA, 2013, p.15)

Outra situação recorrente no estudo dos números irracionais é apresentado por Bortolossi e Mózer. Esses dois autores consideram que um “erro frequente detectado entre os alunos é o de que eles considerarem, por exemplo, que $\pi$ é igual a 3,14 e que $\sqrt{3}$ é igual a 1,73” (BORTOLOSSI e MÓZER, 2016, p. 3).

Isso leva a acreditar que o estudante passa a utilizar esses conceitos “prontos” mas não se aprofunda a origem de como surgiu os irracionais, apenas o utiliza sem entendê-lo de fato. Assim também na medida que vão surgindo outros números irracionais diferentes, a exemplo do $\sqrt{2}$ e $\pi$, o estudante realiza operações com eles, porém não os conhecem na sua origem.

A definição dos números reais parece ser fácil mas não é, em se tratando do Ensino Básico. Mas uma vez registramos maior dificuldade nos números irracionais, quando se é apresentado. Para Dante, (2006, p. 14)

> Comparar a Matemática de diferentes períodos da História ou de diferentes culturas; por exemplo, pode-se contar o episódio no qual os pitagóricos só conheciam os números racionais e acreditavam apenas na existência dos segmentos comensuráveis (um pode ser medido pelo outro e a medida é um número racional). Ao medir a diagonal do quadrado de lado igual a uma unidade, usando este lado como unidade de medida, surgem os números irracionais ( $\sqrt{2}$ , no caso) e os segmentos incomensuráveis.

O professor precisa conhecer a história dos números reais de forma a firmar seus conceitos na hora de ensinar para crianças e adolescentes do Ensino Básico, basicamente a partir do 5º ano. Ao passar o conhecimento em sala de aula, em sua grande maioria são passados modelos prontos, que obriga ao aluno aceitá-los de que eles dão certo.

Quando estudamos a história e origem dos números, principalmente o Estudo da Análise da Reta, disciplina esta vista na licenciatura, vimos que não foi bem assim que o conhecimento tomou forma, cabendo ao professor o papel de tentar esclarecer esse erro que vem da infância, no começo da aprendizagem do aluno e que no nível superior ele vai ter que desenvolver os conceitos, propriedades e axiomas que mostram.

Para Dante (2006, p. 21) a essência do conhecimento matemático são os conceitos. Os alunos só podem dar significado à Matemática se compreenderem os seus conceitos e significados.

Dante (2006, p. 21) também afirma que a avaliação do conhecimento de conceitos e da compreensão deles pelos alunos deve indicar se são capazes de verbalizá-los e defini-los; identificá-los e produzir exemplos e contraexemplos; utilizar modelos, diagramas e símbolos para representar conceitos; passar de uma forma de representação para outra; reconhecer vários significados e interpretações de um conceito; comparar conceitos e integrá-los.

“Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem do mundo, com o mundo e com os outros” (FREIRE, 1982, p. 66).

A Base Nacional Comum Curricular, criada em 2017, em seu Art. 14, fala do Ensino Fundamental, que está organizada em Áreas do Conhecimento, com as respectivas competências, a saber sobre elas:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e atuar no mundo, reconhecendo também que a Matemática, independentemente de suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes. (BNCC, 2017).

Vale salientar que o conhecimento matemático sempre foi construído por erros e acertos, mas que tentaremos estimular o ser humano a pensar e desenvolver o pensamento crítico em meio a sociedade. Reafirma Lima (2012, p. 10) que

> A educação, segundo alguns discursos, configura-se como um dos principais pilares para o pleno desenvolvimento de uma nação, seja ele econômico, social ou moralmente, fator preponderante para a constituição de um sujeito como cidadão crítico e consciente de sua participação na sociedade. Sendo assim, parece-nos imprescindível termos possibilidades que propiciem o livre pensar, mas não somente isso! Aliado à ampliação de um pensamento crítico, o Ensino da Matemática tem condições de prestar um importante serviço à construção da cidadania, contribuindo de maneira decisiva ao processo de conscientização e na formação do “ser pensante”.

O professor precisa buscar esse estímulo do aluno e tentar suprir todas as dúvidas que venham a surgir, visto que o conteúdo dos Números Reais é a base de tudo, tendo como exemplo didático que quase todos iniciam o assunto utilizando a sua representação através de uma reta numérica, com origem zero, que vai do princípio da contagem, pelos Números Naturais até os Números Irracionais, onde em sua maioria se oculta uma parte do conteúdo.

De certo modo, buscamos entender que o conhecimento histórico desta ciência que é a Matemática, pode ajudar para a construção da formação inicial e continuada do professor em sala de aula, para aprimorar ainda mais os seus conhecimentos e tentar tornar a disciplina uma coisa prazerosa.  Ficamos com uma breve pergunta que pode servir de base para esta nobre pesquisa: Como o conteúdo dos números reais pode interferir na carreira escolar do aluno e tentar mudar a qualidade das aulas do professor de Matemática?

E o Porquê das aulas serem tão cansativas para os alunos do Ensino Básico? Existe algum meio de estimular os alunos no aprendizado dos números reais?

Tentamos responder a tais perguntas apresentando relações entre o conhecimento da História dos números reais, junto com a experiência vivida como estudante de Licenciatura, como também as demais pesquisas dos diversos autores aqui citados. Para isso, vamos verificar como se encontra o panorama do ensino dos números reais.

# 3. FOCALIZANDO AS MAIORES DIFICULDADES: RACIONAIS X IRRACIONAIS

O essencial é buscar métodos para a construção de um novo entendimento para a didática desse conteúdo, de modo que facilite o aprendizado do estudante sem provocar desvio em sua estrutura. Passaremos a descrever algumas observações que colhemos durante nossa pesquisa, que tem como foco principal os números racionais e irracionais.

## 3.1 NÚMEROS RACIONAIS

Algumas dificuldades que alguns alunos da Educação Básica enfrentam em sua trajetória para entender os números racionais e suas diversas representações são identificadas em literaturas com os diferentes significados que esse conjunto numérico comporta, bem como o conceito de unidade e com o ensino precoce e sem contextualização dos símbolos e algoritmos (MONTEIRO; PINTO, 2005).

As frações constituem uma boa ilustração para essa questão, pois acabam precedendo o ensino dos números racionais e, em muitas vezes, o conceito não é bem compreendido pelos discentes em razão do seu caráter multifacetado.

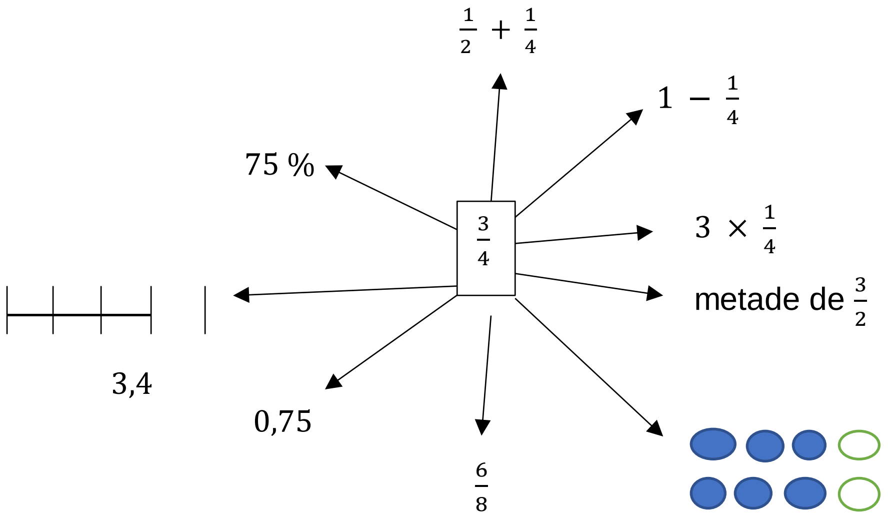
A aprendizagem de frações, para a maioria dos sujeitos, acontece com definições prontas, nomenclaturas antigas e pseudo-problemas envolvendo pizzas e barras de chocolate. Posto isso, se faz necessário que os docentes e futuros professores se atentem para as complexidades que envolvem esse conceito deveras complicado (LOPES, 2008).

Com base nos exemplos de classificação dos números racionais como parte ou como todo, fração, quociente, dentre outros existentes é possível termos uma ideia dos diversos usos que o número racional pode assumir. Além disso, podemos associar o aspecto relacional presente nos números racionais, o que acarreta em problemas de ensino, uma vez que, em muitas vezes, os professores desconhecem e/ou não abordam tais particularidades com os estudantes e, também, em problemas de aprendizagem, em que os alunos não conseguem compreender o conjunto numérico em questão (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 20071 apud PONTE; QUARESMA, 2014).

A título de exemplo, podemos pensar no número racional $\frac{3}{4}$. Considerando seus múltiplos significados, podemos pensar no número em questão de diferentes formas, a saber: medida na reta, porcentagem, fração equivalente, representação pictórica, entre outros, como ilustrado na figura abaixo (CARVALHO; PONTE, 2017).

Ademais, é importante destacar a diferença entre o caráter de quociente e o de razão. Os números racionais quando são pensados como quociente, ele visa responder às questões do tipo quanto? ao passo que quando esses mesmos números são vistos como razão a ideia presente é a de estabelecer uma relação entre a parte e o todo (RODRIGUES; CAMPOS, 2005)

**Figura 02 – Formas distintas de se pensar o número racional** $\frac{3}{4}$




**Fonte: http://www.apm.pt**

Observando o número racional $\frac{3}{4}$ escrito de várias maneiras diferentes o aluno consegue identificar como um número racional, como também a sua operação final vai resultar numa resposta de um número racional. A única dificuldade debatida é o sujeito entender que todas as partes das operações da figura acima são iguais, nas suas diversas formas diferentes de representar o número $\frac{3}{4}$. Até o discente chegar nesse entendimento, pode gerar algumas dúvidas em alguma operação, pois ele poderá realizar as contas das partes de maneira incorreta. Outros estudantes, dada uma parte da operação, encontrarão dificuldades em relacionar com o todo correspondente.

## 3.2 NÚMEROS IRRACIONAIS

Os números irracionais são comumente apresentados em livros a partir do 8º ano.

Considerando que os números racionais podem ser conhecidos por estudantes da Educação Básica, ponderar a respeito dos números irracionais seria, num primeiro olhar, lidar com um número que não satisfaz a definição de um número racional. O próprio dicionário caracteriza número irracional pelo que ele não é, a saber: “número real que não é racional” (FERREIRA, 2001).

Perceba que se definíssemos números irracionais como o dicionário fez, teríamos um obstáculo, pois estaríamos definindo um número irracional dependendo de uma entidade que, no Ensino Fundamental, momento em que tais assuntos são abordados inicialmente, é pouco conhecido. Entretanto, pouca atenção é dada ao conjunto dos números irracionais no ambiente escolar. Uma das principais razões é que os irracionais são tratados, essencialmente, para serem usados na resolução de alguns exercícios. Por outro lado, falar sobre esse conjunto, mais profundamente, pode trazer aspectos que incomodaram estudiosos durante bastante tempo, assim como pode revelar certa importância à Matemática como um corpo de conhecimento coerente e estruturalmente organizado (FISCHBEIN et al., 1995).

Alguns alunos do Ensino Básico ao ter o contado pela primeira vez com números irracionais passa por diversas dificuldades, assim relata os autores abaixo:

> Mas tratar este assunto no nível fundamental é, certamente, muito difícil. Os números irracionais não existem no mundo concreto, são abstrações matemáticas, só existem no mundo das ideias, para aceita-los é preciso imaginar processos infinitos e proximidades que tendem a zero. Ou seja, é necessária a noção de limites e continuidade. (GARCIA, FRONZA E SOARES, 2005, p.6)

Definir o número irracional pelo que ele NÃO é acaba tornando-o mais obscuro, um não-ser, a antimatéria do número racional. Um número que não é uma fração ou uma dízima não-periódica são elementos um pouco estranhos para os estudantes, uma vez que, até então, o maior conjunto numérico conhecido é o dos números racionais. Nesse sentido, estaríamos numa situação similar a procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra desconhecida e encontrar outras que também não sabemos o que significa (MOREIRA; DAVID, 2010).

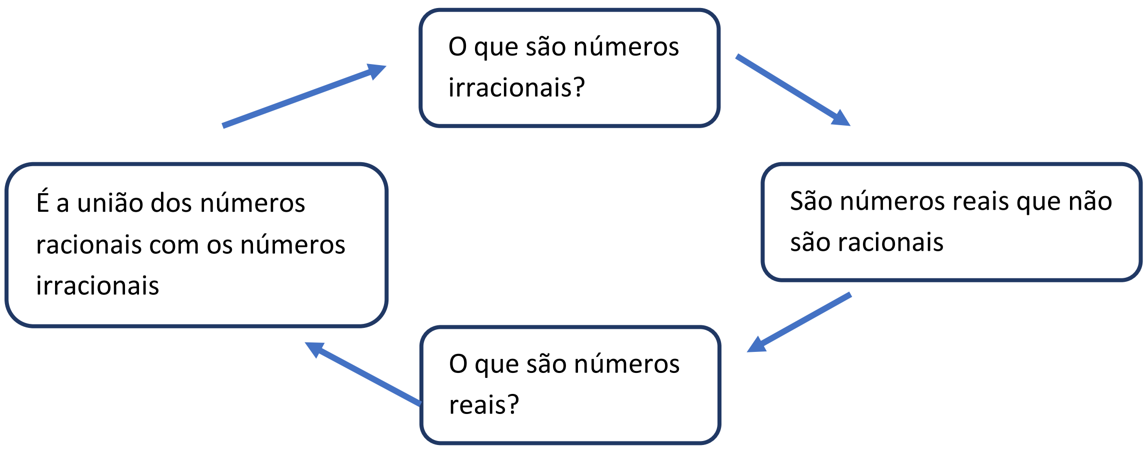
Embora tais definições sejam familiares e até mesmo convenientes, sua utilização prática acaba ficando restrita, por exemplo, como usá-las para definir a igualdade entre dois irracionais? Como realizar operações aritméticas entre dois irracionais? (HAVIL, 2012).

A problemática centra-se no fato de que apenas sabemos o que eles não são. Além disso, nessas definições os números irracionais estão sendo definidos em termos de uma de suas qualidades características, porém não como entidades em seu próprio direito. Quem pode dizer que eles, de fato, existem? (HAVIL, 2012).

Nessa direção, há a defesa de que nós professores precisamos instigar os alunos a duvidarem dessas questões, uma vez que, até que se justifique o contrário, poderia ser apenas uma aberração teórica (BROETTO, 2016).

Aí surge a pergunta: como são definidos os números reais? Em geral, como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Nesse sentido, forma-se um questionamento acerca da definição de números reais e irracionais, como será ilustrada na figura abaixo.

**Figura 03 – Questionamento acerca da definição de números reais e irracionais.**




**Fonte: O autor**

Outro aspecto que pode contribuir para que o conjunto dos números irracionais tenha esse "ar misterioso" é o fato desse conjunto não possuir um símbolo consolidado como no caso dos naturais, inteiros, racionais e reais - respectivamente $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Alguns autores usam a letra $\mathrm{I}$, outros usam $\mathrm{I}r$, enquanto outros ainda representam os irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, o que reforça ainda mais o irracional como um não-ser racional (BROETTO, 2016).

Como seria possível discutir os números irracionais com estudantes do Ensino Básico? Uma resposta viável é fornecida por Wagner Pommer:

> Especialmente no tocante aos números irracionais, tal tema carece de uma introdução conceitual que possa ser acessada não somente pela peculiar e complexa sintaxe matemática, mas também por meio da palavra. Se o tema dos números irracionais é um assunto complexo e teórico, por natureza epistemológica, não devemos renegar as dificuldades de acessá-lo ocultando-o ou evitando-o. Ao contrário, um dos modos de superar tais empecilhos é explicitá-lo através do ato de significar a palavra (POMMER, 2012, p. 95).

Por outro lado, na formação inicial do professor de Matemática ainda permanece uma abordagem técnica e deveras formal, o que não capacita esse futuro docente a tecer diálogo correspondente ao seu público, o que acarreta em problemas no momento de ensinar os números irracionais na escola básica (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

Um reflexo dessa não importância dada aos números irracionais também é evidenciada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) - no período de 2009 até 2013, como segue:

> Constatamos que não houve uma única questão envolvendo números irracionais que abordasse qualquer aspecto conceitual desse assunto. Ao invés disso, todas as questões que envolviam números irracionais propostas no período analisado o faziam de forma bastante superficial, exigindo apenas um conhecimento procedimental, como aplicação direta de fórmulas, utilização de aproximações racionais para números irracionais sem qualquer discussão, utilização de propriedades de radiciação, entre outras (BROETTO, 2016, p. 32).

Portanto, cabe aqui esse ponto de vista, que ao longo de nossos estudos, observamos essas características sobre os números irracionais que poderá servir como base de observação num assunto a princípio simples.

## 3.3 BREVE HISTÓRICO DO NÚMERO $\pi$

Acredito que o número mais famoso da história da matemática seja o $\pi$. Comumente é representado pela razão constante entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro.

A história do número $\pi$ tem início cerca de 4.000 anos atrás, sendo que a existência de uma relação constante entre "a circunferência e o seu diâmetro" era conhecida por muitas das civilizações antigas. (Oliveira, 2009, p.29).

A defesa dos argumentos utilizando, por exemplo, uma moeda em sala de aula, para explicar aos alunos a construção de conceito de número irracional, mostrando que o comprimento da circunferência pela medida do diâmetro equivale ao número $\pi$, sabe-se que tal definição não é uma verdade absoluta, pois fica ainda a dúvida no professor de buscar tal conceito para os alunos em sala de aula a respeito de experimentações empíricas para achar a constante $\pi$, visto que tais exemplos já são culturais e nenhum professor tentar buscar outros. Pois ao cursar licenciatura em Matemática, principalmente na disciplina análise da reta, onde o aluno precisa provar axiomas e definições, se aprende a fundo que alguns conceitos ensinados no Ensino Básico não são verdadeiros e muitas vezes se passam assim por falta de outros exemplos ou um conceito menos complexo.

Em minhas observações, se questionarmos os alunos do Ensino Médio se já ouviram falar de números irracionais, o número $\pi$ será o mais ouvido como resposta. Contudo, o que deduzimos essa resposta não é o fato do $\pi$ ser um número irracional obtido pela definição envolvendo elementos da circunferência, o qual foi comentado anteriormente, mas a resposta campeã será que $\pi$ = 3,14. Pois vivenciei essa resposta em todo meu período escolar. Nesse sentido, penso que vale a pena investir em aproximações maiores envolvendo esse número, assim como salientar que se trata de uma aproximação para um número irracional que terá infinitas casas decimais:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846....$$

É muito comum a apresentação de $\pi$ = 3,1415..., $\pi$ = 3,1416 ou $\pi$ = 3,14, o que acaba fixando e/ou reforçando as primeiras casas decimais do número, como em diversas questões de prova, nas quais o enunciado sugere o uso de $\pi$ igual a 3,14. Com o tempo, o significado das reticências se perde, assim como a noção de que 3,14 pode ser apenas uma aproximação para o $\pi$ e, assim, esse número se torna, na cabeça dos estudantes, igual a 3,14 ou 3,1416 (BROETTO, 2016).

Uma possível associação incorreta a respeito de números irracionais pode ser ratificada com o número $\pi$: números irracionais são aqueles que não possuem padrão lógico na parte decimal, isto é, são associados à ideia de imprecisão e não exatidão – possivelmente esse pensamento está atrelado à falta de significação da representação decimal infinito e não periódica (SOARES et al., 1999).

Com base nesse pensamento, muitos alunos são levados a um pensamento equivocado de que ser racional é aquele número que tem padrão, então irracional será o número que não possui padrão. Assim, os estudantes apontam que o número 0,1234567891011... é racional, já que apresenta padrão (BROETTO, 2016).

Vale ressaltar Teles (2016, p. 44) ao fazer referência ao número $\pi$:

> Atualmente, já foram identificados através de super computadores mais de 2 quatrilhões de dígitos decimais para o número $\pi$, mas, antes disso, muitos cálculos foram feitos por grandes estudiosos. O que podemos afirmar que o número $\pi$ é um elemento importante para a história da matemática e, em especial, para este trabalho, por ser um número irracional tão expressivo e estudado no Ensino Básico.

Em seguida, vamos apresentar um valor aproximado de $\pi$ com as primeiras 50 casas decimais.

$\pi$ = 3,14159 26535 89793 23846 83279 50288 41971 69399 3751 ...

Percebe-se que o número $\pi$ é um número com história e que ao longo dos tempos foram utilizadas diferentes aproximações para o valor de $\pi$.

Outro ponto de observação em livro do ensino médio ao falar dos números irracionais

> No capítulo 1 do livro, destinado a Trigonometria, os autores informam que o arco pode ser medido em graus ou radianos e acrescentam: “Lembre-se que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por C = $2\pi r$. Portanto, um arco de uma volta corresponde a $2\pi$rad.” (p.11). Acreditamos que seja válido aparecer no livro didático um lembrete para os alunos referente à conversão de radianos em graus, destacando que quando substituímos $2\pi$rad por 2·180 $\pi$ isso não indica que 3,14159265359... = 180 $\pi$; e sim que o arco de comprimento igual a 2 $\pi$ rad corresponde a uma volta completa na circunferência, equivalente a 360°. (Jesus, 2017, pag.34)

Tendo como referência o livro da coleção ***Matemática*** **(grifo nosso)**, dos autores Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis, pelo qual está dividido em 12 capítulos, onde apresenta como exemplos alguns acontecimentos do cotidiano, como forma do aluno aprender com ações do dia a dia. Segue abaixo, a respeito do $\pi$ quando aparece no capítulo 5 do 7º ano, no item que trata do perímetro e da área do círculo. No Manual Pedagógico os autores escrevem:

> "No 7º ano obtivemos, de maneira aproximada, a fórmula $p = 2\pi r$, por meio de algumas experiências. Agora, no 8º ano, adotamos uma abordagem mais abstrata para a mesma fórmula e também para a fórmula A = $\pi r^2$. Nessa nova abordagem, buscamos o perímetro e a área do círculo a partir de polígonos regulares inscritos ou circunscritos. A ideia é mostrar que, sendo o número de lados desses polígonos muito grande, seu perímetro e sua área estão muito próximos do perímetro e da área do círculo. Essa abordagem contém ideias difíceis e não se deve esperar que seja inteiramente compreendida. Aliás, um currículo em espiral existe por isso mesmo: quase nada pode ser inteiramente compreendido em uma única experiência. São necessárias outras vivências, é preciso mais reflexão e amadurecimento para a compreensão ser completa, o que virá a seu tempo, no ensino médio." (MP p.38)

Nada a mais é mencionado sobre o número $\pi$ a respeito se ele é irracional, como também não fica acrescentado, porém nenhum comentário, ficando para o conteúdo do ensino médio alguma informação que venha a somar sobre os irracionais, caso tenha.

Fica assim, evidente que cada livro, autor e dentre outros, uma divergência de informações quando se trata de números reais, pois é apresentado um conteúdo fragmentado de cada conjunto e sempre omitindo uma ou outra particularidade que deva somar o mar de dúvidas.

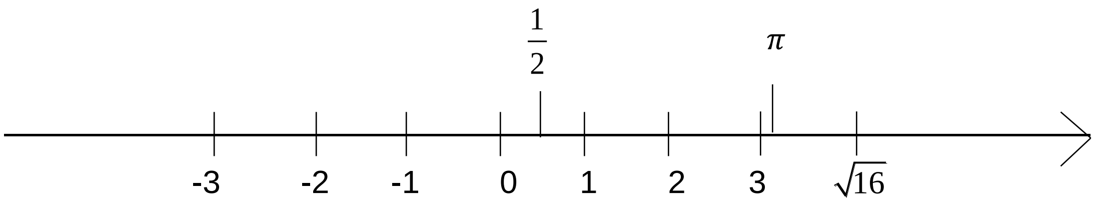
## 4. ALGUNS CASOS MAIS USADOS NA ABORDAGEM DOS NÚMEROS REAIS NO ENSINO BÁSICO

Um dos exemplos mais clássicos de abordagem dos números reais é a representação na reta numérica, com marcações de pontos correspondentes, que a princípio, apresenta se limitando aos números naturais, inteiros, racionais, através de um ponto de origem cujo valor é zero, pois existe um segmento na reta que representa cada número existente com seu valor. Quando se fala dos números irracionais, estes são citados através de aproximação.

Da coleção Matemática e Vida, do autor Vincenzo Bongiovanni, extraído do livro do 7º ano, mostra como encontrar alguns irracionais na reta e explicam que entre dois reais quaisquer existem infinitos reais. A princípio, não sei se deixei mais dúvidas, mas a título de informação que afirmamos o que tanto explicamos em nossos estudos. Como um aluno do 7º ano vai conseguir entender tal afirmação sobre números irracionais?

Essa representação na reta está associada a qualquer tipo de escolaridade e em qualquer momento que o professor se vê a necessidade de demonstrar.

**Figura 04: Representação dos números na reta real**




**Fonte: O autor**

Outra forma de representação tão falada, mas agora mostrada através de figura do número $\pi$, quando cita através do comprimento da circunferência.

**Figura 05: Cálculo do comprimento da circunferência**

O número $\pi$ (lê-se "pi"), que corresponde à razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, também é um número irracional.

$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}14159265\ldots$


**Fonte: https://www.unimep.br**

Para enriquecermos a reflexão sobre este número tão falado na Matemática, temos a pesquisa realizada por Bortoletto sobre as abordagens do ensino do número $\pi$, informando que

> [...] a maioria dos professores que introduzem $\pi$ no 5º ano não o definem como "número irracional" e sim como "número resultante de uma razão" e quanto aos professores que ensinam $\pi$ a partir do 7º ano, a maioria o define como "número irracional. (BORTOLETTO, 2008, p.59)

Posto tais exemplos, diante dos inúmeros que temos na trajetória dos números reais que são repassados em sala de aula.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, gostaria de ressaltar o quão foi importante para mim o presente estudo, pelo qual é fundamental para a conclusão de minha formação no nível superior.

Queria ressaltar a importância desse tema em que fala dos números reais, foi uma experiência extremamente valiosa e que serviu para o meu crescimento intelectual, pois uma dúvida que tenho desde a infância e que só agora percebi o quão é importante esse assunto e que através de diversos autores que pesquisei, percebi que não era uma dificuldade minha, mas de milhões de alunos que tiveram sua formação uma ideia vaga, incoerente e fragmentada sobre os números reais, pois não tiveram suas dúvidas esclarecidas.

Espero ter conscientizado para um dia mudar esse reflexo quase que cultural de que muitos alunos odeiam matemática visto que fica uma didática arcaica e mecânica a qual o discente não pode ser exigido e criticado por não ter aprendido, se passa despercebido na condição que o professor finge que ensina e o aluno finge que aprende.

Saber lidar com os diversos livros e autores de outros trabalhos acadêmicos também foi importante, pois levarei comigo uma visão crítica de cada conteúdo que irei me debruçar, pois a partir de agora, os livros serão nossa ferramenta de trabalho. À vista disso, este trabalho pode ser utilizado como instrumento auxiliador ao licenciando, considerando as diversas demonstrações aqui presentes e suas ligações com os estudos do Ensino Básico

Acredito que concluir com alegria esse estudo contribuiu para que eu tivesse uma compreensão melhor a respeito dos números reais vistos durante todo o Curso de Licenciatura em Matemática.

## REFERÊNCIAS

BORTOLOSSI, H. J.; MÓZER, G. S. **Para que servem os Números Irracionais? Indo além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes**. In: 12º. Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Anais do 12º Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016. Disponível em: https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio__Nordeste-Para-que-servem-os-numeros-irracionais.pdf. Acesso em: 15 mai 2022.

BORTOLETTO, A. R. S. **Reflexões relativas às definições do número □ (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental.** Dissertação. Universidade Metodista de Piracicaba. São Paulo. 2008. Disponível em: https://www.unimep.br/phpg/bibdig/pdfs/2006/RYXMQMJTVEXB.pdf. Acesso em: jun. 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http: //portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 7 jun 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 2017. Disponível em: http: //portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 19 jun 2022.

BROETTO, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. Vitória: Centro de Educação, 2016.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. O Ensino de números irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**, v. 33, n. 64, p. 728–747, 2019. Disponível em:

https://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n64/1980-4415-bolema-33-64-0728.pdf. Acesso em: 14 mai 2022.

CARVALHO, P.; PONTE, J. P. da. Desenvolver o pensamento relacional na aprendizagem dos números e das operações no ensino básico. **Educação e Matemática**, n. 143, p. 33–37, 2017. Disponível em: http://www.apm.pt/files/_33_Desenvolver_o_pensamento_59f1fcb7d22b5.pdf. Acesso em: 18 jun. 2022.

CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. Educational Studies in Mathematics, Berlim, v. 64, n. 3, p. 293-316, mar. 2007

Crato, N. (2006). **O "Eduques" em Discurso Directo. Uma crítica da pedagogia romântica e construtivista.** Lisboa: Gradiva.

EUCLIDES. **Os Elementos**, 300 a.C.

FERREIRA, M.C.C. - MOREIRA, P.C. - SOARES, E.F., **Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na Licenciatura**, Zetetiké - CEMPEM - FE/UNICAMPI, vol. 7 (1999) 95-117.

FERREIRA, A. B. de H. **Miniaurélio Século XXI Escolar: o minidicionário da língua portuguesa.** 4. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. v. 29, n. 1, p. 110–113, 1995. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/3482830?seq=1. Acesso em: 10 mai. 2022.

FIGUEIREDO, D.G. **Números Irracionais e Transcendentes,** Coleção Iniciação Científica, SBM, 2002.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido.** 11ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1982.

GARCIA, V.C. - SOARES, D.S. - FRONZA, J., **Ensino dos Números Irracionais no Nível Fundamental**, Volume 1, IM/DPMA-UFRGS, 2005.

HAVIL, J. The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On. New Jersey: Princeton University Press, 2012.

IMENES, L. M. P., LELLIS, M. C.. **Matemática**. São Paulo, Scipione, 2018.

JESUS, B. C. D. **Números Irracionais: uma análise de livros didáticos dos ensinos fundamental II e médio**. São João Del Rei, Minas Gerais. 2017.

LIMA, Elon Lages. (1998). **Princípio da Indução Finita**. Revista Eureka. No3. p. 41.

LIMA, D. F. **O ensino de matemática escolar sob uma perspectiva crítica.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2012.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes Ensinar frações. **Bolema**, v. 21, n. 31, p. 1–22, 2008. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2102. Acesso em: 17 jun 2022.

........... **Análise Real: Funções de Uma Variável**. 8 ed. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
............ **Curso de Análise**. 6 ed. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

MAOR, Eli. e: **a história de um número**. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2003.

MENDES, S. C. C. **Práticas pedagógicas para o ensino dos Números Irracionais**. Dissertação. Universidade Severino Sombra. Vassouras. 2012. Disponível em: http://www.uss.br/arquivos/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2012/DISSERTACA Sonia Cristina da Cruz Mendes.pdf. Acesso em: 09 Mai 2022.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A Aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, v. 14, n. 1, p. 89–107, 2005. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/244/205. Acesso em: 20 jun. 2022.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. P. **Por que análise real na licenciatura?** ZETETIK´ E, Campinas, v.13, n.23, p. 11-42, jan./jun. 2005.

MOSCA, M. A. **Números Irracionais no Ensino Médio: desdobrando o tema com equações polinomiais**. Dissertação. Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2013. Disponível em: http://bit.pofmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/762/2011 00538 MARCOS ANTONIO MOSCA.pdf?sequence=1. Acesso em: 13 mai 2022.

NERI, Cassio e CABRAL, Marco. **Curso de Análise Real**. 2 ed. Rio de Janeiro: IM - UFRJ, 2008.

OLIVEIRA, J. C.; GOMES, C. C. **Números Irracionais e Transcendentes**. Monografia (Especialização) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2009.

PASQUINI, R. C. G. **Um Tratamento para Os Números Reais via Medição de Segmentos: Uma Proposta, Uma Investigação.** Tese de Doutorado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, v, Rio Claro, 2007.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais.** 2012. 246 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2012.

QUEIROZ, F. M. **Um estudo sobre Construções dos Números Reais**. 2015. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

RODRIGUES, W. R.; CAMPOS, T. M. M. de. **Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.** São Paulo: [s.n.], 2005.

SOARES, E. F; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetike**, v. 7, n. 12, p. 95–117, 1999. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.
php/zetetike/article/view/8646776/13678. Acesso em: 2 jun. 2022.

TELES, A. L. T. **A análise real do ensino básico: Números Reais**. Trabalho de Conclusão de Curso, Instituto Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.