INSTITUTO FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS MACEIÓ
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JEFFERSON MARINHO DA SILVA

UMA ABORDAGEM DA CICLOIDE: "A HELENA DA GEOMETRIA

MACEIÓ-AL
2022

JEFFERSON MARINHO DA SILVA

UMA ABORDAGEM DA CICLOIDE: "A HELENA DA GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas, Campus Maceió, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática. Orientador: Prof.Me. Cleverton da Silva Vasconcelos

MACEIÓ-AL
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Alagoas
Campus Maceió
Biblioteca Benevides Monte

INSTITUTO
FEDERAL
Alagoas

S586u Silva, Jefferson Marinho da.
Uma abordagem da cicloide : “a Helena da geometria”. / Jefferson Marinho da Silva. – Maceió : IFAL, 2022.
35 f. : il.

Orientador: Prof. Cleverton da Silva Vasconcelos.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) **-** Instituto Federal de Alagoas / Campus Maceió, 2022.

Arquivo digital no formato PDF do trabalho acadêmico.

1. Matemática. 2. Cicloide. 3. Curva. 4. Parametrização. I. Título.

*CDD**: 516***

Nalva Maria Amaral
Bibliotecária – CRB-4/989

JEFFERSON MARINHO DA SILVA

UMA ABORDAGEM DA CICLOIDE: “A HELENA DA GEOMETRIA”

Monografia submetida ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas, *Campus* Maceió, como requisito par- cial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 25 / 01 / 2022

BANCA EXAMINADORA

Cleverton da Silva Vasconcelos

Prof. Me. Cleverton da Silva Vasconcelos(Orientador)
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Elinelson Gomes de Oliveira

Prof. Me.Elinelson Gomes de Oliveira
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

Prof. Me. Tiago Marinho da Silva
Instituto Federal de Alagoas – IFAL

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas - Campus Maceió, todos os servidores, professores e alunos.

Agradeço a Deus por está sempre comigo e ter dado essa oportunidade na minha vida, momento esse singular e precioso.

À minha esposa Graciely pela paciência, pelo incentivo, por não deixar eu desistir quando eu tive vontade.

Aos meus pais dona Cida e Paulista, aos meus irmãos Cristina, Paulinho e Tiago.

Agradeço também a todos os colegas de curso que eu tive o privilegio de conhecer nessa caminhada que não foi fácil.

Agradeço a todos os professores do curso que de certa forma contribuiu na minha formação e não poderia de deixar de agradecer em especial ao meu orientador professor Cleverton pela paciência e ajuda nessa missão de me orientar e incentivar nos momentos que fraquejei e pensei em desistir.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma breve pesquisa histórica sobre a Cicloide, além de uma construção intuitiva sobre a curva, trabalhando a definição e parametrização. Esta pesquisa discute práticas pedagógicas que vinculem os conteúdos ao contexto lúdico de apresentação da Cicloide e não apenas algébrico como nos livros de cálculos. Levando em consideração o contexto da Matemática, essa proposta apresenta como problema o pouco interesse pelo estudo da curva, tendo em vista que seu uso foi deixado de lado pelos matemáticos. Na conjuntura desses problemas, a proposta pretende despertar a relevância da Cicloide, respondendo as seguintes perguntas: como motivar o entendimento da Cicloide? Como mostrar uma praticidade através de sua aplicação? O objetivo principal da proposta é apresentar de forma mais prática o entendimento da Cicloide. Este trabalho tem como referência os estudos de Boyer (2012), Bustillo e Sassine (2011) e Stewart (2013). Com os resultados, foi possível observar que apesar de termos outras formas de calcularmos a Cicloide, a melhor forma seria com as equações paramétricas, pois elas nos traz uma forma mais simples de cálculo da curva. Os resultados também apontam para a praticidade de construção no Geogebra.

PALAVRAS-CHAVE: Braquistócrona; Cicloide; Curva; Parametrização.

ABSTRACT

This work presents a brief historical research on the cycloid, in addition to an intuitive construction on the curve, working on the definition and parameterization. This research discusses pedagogical practices that link the contents to the playful context of presenting the cycloid and not just algebraic as in calculation books. Taking into account the context of Mathematics, this proposal presents as a problem the lack of interest in the study of the curve, considering that its use was left aside by mathematicians. In the context of these problems, the proposal intends to awaken the relevance of the cycloid, answering the following questions: how to motivate the understanding of the cycloid? How to show practicality through your application? The main objective of the proposal is to present in a more practical way the understanding of the cycloid. This work is based on studies by Boyer (2012), Bustillo and Sassine (2011) and Stewart (2013). With the results, it was possible to observe that although we have other ways to calculate the cycloid, the best way would be with the parametric equations, as they bring us a simpler way of calculating the curve. The results also point to the practicality of building in Geogebra.

KEYWORDS: Brachistochrone; Cycloid; Curve; Parameterization.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Esta pesquisa apresenta um breve histórico sobre a curva Cicloide, através de uma construção intuitiva para o entendimento de sua definição e parametrização. Essa discussão trará relevância para a prática pedagógica que vincule o contexto de aplicação dos conteúdos relacionados à curva, apresentando-a de maneira lúdica, pois em vários livros de cálculo o seu aspecto é de característica algébrica.

De modo geral, a Cicloide é utilizada na arquitetura, na construção de pontes, servindo a ela devido aos arcos, estudo não mencionados nesse trabalho, mas que mostra uma importância significativa. Minhas primeiras preocupações eram mostrar os primeiros matemáticos que iniciaram os estudos sobre a Cicloide; em seguida pensou-se em mostrar, através de materiais de baixo custo, como a referida curva poderia ser mostrada de forma lúdica. Além disso, em sua origem, demonstra-se muitas curiosidades sobre as propriedades matemáticas e suas aplicações, descoberta através de observações inclusive em outras áreas de conhecimento.

A partir de então, comecei a pensar na hipótese de pesquisar os estudos sobre a Cicloide, mostrando a comparação entre a Cicloide e a Helena da geometria, como assim era chamada por ter sido cobiçada por diversos homens, assim como Helena de Tróia foi cobiçada na época. Essa curva também foi denominada "curva fatídica" no século XVII por Johann Bernoulli.

Dessa forma, foi pensado em como fazer uma definição e parametrização da curva através de cálculos que demonstrem tal processo. Além disso, mostro as duas propriedades mais importantes da Cicloide: área da curva e o comprimento de ar. Outro fator importante para estudo neste trabalho é a equação cartesiana. Seu intuito é mostrar a diferença entre a sua dificuldade, por ser mais complexa, e a paramétrica, a qual é mais simples com cálculos mais acessíveis e elegantes. Além disso, muito importante para a compreensão dessa pesquisa é a curva braquistócrona, que mostra seu percurso / trajetória em menor tempo.

Diante desses aspectos, é importante para relevância da Cicloide que se respondam as seguintes a questões de pesquisa: como motivar o entendimento da Cicloide? Como mostrar uma praticidade através de sua aplicação?

O objetivo geral da presente proposta didática é apresentar de forma mais prática o entendimento da Cicloide. Os estudos teóricos que embasaram esta pesquisa tem como referência os trabalhos de Boyer (2012), Bustillo e Sassine (2011) e Stewart (2013).

Esta pesquisa está organizada em quatro capítulos: o primeiro aborda o contexto histórico da Cicloide, onde é trabalhado com os principais matemáticos que iniciaram o estudo da curva; o segundo, traz a Cicloide de forma lúdica e algébrica; o terceiro, aborda a braquistócrona que é uma aplicação da Cicloide; e o quarto capítulo apresenta uma construção da Cicloide no Geogebra, apresentando sete passos para o melhor entendimento da curva.

2 Contexto histórico da Cicloide

A cicloide foi vista pela primeira vez, ainda que de maneira bem rudimentar por Nicholas Cusa e Charles Bouvalles, ambos eram filósofos e deram suas contribuições nas suas devidas épocas que até hoje são comentadas e discutidas. Cusa iniciou seu trabalho com a quadratura de um circulo, e depois de sua morte Bouvalles deu continuidade. Ao longo do tempo outros matemáticos trabalharam com a cicloide, dentre eles destacam-se: Galileu di Vincenzo Bonaulti de Galilei, Gilles Personne de Roberval, Marin Mersenne, Blaise Pascal.

2.1 Nicholas Cusa e Charles Bouvalles

Nicholas Cusa (1401-1464), nasceu em uma cidade chamada Kues na Alemanha, filho de Johan Krebs que era um comerciante do rio Moselle, e sua mãe Catharina Roemers. Ele tinha três irmãos e saiu de casa para fugir dos maus-tratos do pai que percebeu no filho mais interesse nos livros do que no manuseio de um remo. Cusa foi para a Itália, onde ingressou na Universidade de Pádua para cursar Direito Canônico; onde fez amizade com Pozzo Toscanelli, o qual estudava Matemática e Medicina, contudo, se tornou um renomado matemático e astrônomo. Foi daí que surgiu o interesse de Cusa pela matemática, dedicando-se a estuda-la por dois anos de sua vida. É neste contexto que Cusa trabalhou a quadratura de um dado circulo, que depois passou a ser chamada Cicloide.

Figura 1: Nicholas Cusa.

Fonte: $https : //pt.wikipedia.org/wiki/Nicolau_{d}e_{C}usa/media/Ficheiro : Nicholas_{o}f_{C}usa.jpg$

Charles Bouvalles, por sua vez, nasceu em 1471 na cidade de Picardia, França, era de uma família rica de Bovelles, por volta de 1490 foi estudar em Paris, sendo aluno do renomado humanista, teólogo e tradutor Jacques Lefèvre d'Etaples. Passados cinco anos à peste atingiu a França, e, em particular Paris; foi nesse período que o mesmo fora obrigado a fugir sem concluir seu curso. Pouco depois começou a estudar Matemática e trabalhou no problema da quadratura do circulo, o que lhe rendeu a publicação de um livro, intitulado "Introdução Geométricas", sendo a primeira versão em latim. Como este teve uma boa aceitação foi traduzido para o francês e para o holandês. Bouvalles morreu em 1553 na cidade de Noyon, França, onde ensinou filosofia até o fim de seus dias.

2.2 Galileu di Vincenzo e Gilles Personne

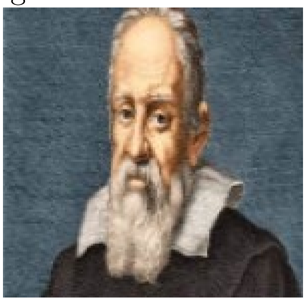
Galileu di Vincenzo Bonaulti de Galilei (1564 – 1642), nasceu na cidade de Pisa na Itália, no mesmo ano em que Michelangelo morreu. Seu pai era um músico bem destacado que se chamava Vicenzo Galilei (1520 – 1591), e sua mãe Giulia Ammannati

(1538 – 1620). Ela teve seis filhos, dos quais três morreram quando ainda eram crianças. Em 1572 Galileu e sua família mudaram-se para Florença quando ele tinha 11 anos, seu pai quis que ele estudasse em um mosteiro em Vallombrozo para aprender grego, latim e lógica. Quando retornou a sua cidade natal aos 17 anos em 1581, começou a estudar Medicina na Universidade de Pisa, com o incentivo de seu pai. Porém, como ele tinha interesse em Filosofia e Matemática, em 1581, foi para Roma onde visitou o colégio Romano.

O seu interesse era tanto com a ciência e a Matemática que solicitou à família para deixar o curso de Medicina e dedicar-se a Ciência e a matemática. Com 25 anos foi nomeado professor de matemática da Universidade de Pisa. As suas pesquisas deram a publicação de dois livros que são eles: O Mensageiro Celeste em 1610 e O Experimentador em 1623, Galileu também fez sucesso no estudo em que ele provou que a Terra girava em torno do Sol e que o mesmo era o centro do universo contrariando a igreja que afirmava, que o Sol girava em torno da Terra, sendo esta o centro do universo.

E pelo fato citado acima é que Galileu foi condenado a morte, conseguindo logo depois o relaxamento da pena para prisão perpetua domiciliar. Para tal, ele teve que fazer uma confissão afirmando que sua teoria estava errada. Foi nesta prisão que num belo dia da janela que ele percebeu a roda de uma carroça, a qual despertou nele a curiosidade de saber qual curva era gerada pela roda da carroça. A partir de então, é que veio a ideia de fazer os primeiros testes com placas de metais, não obtendo exito. Depois ele começou a enviar cartas para outros matemáticos falando sobre o estudo da Cicloide. Galileu morreu em 1642 na cidade de Arcetri,Itália.

Figura 2: Galileu Galilei.



Fonte:*https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/reportagem/historia-galileu-dos-ceus-a-inquisicao.phtml*

Gilles Personne de Roberval

Gilles nasceu em 1602 na cidade de Roberval, França, seu pai se chamava Pierre Personne e sua mãe Jeanne Le Dru. Ele era de uma família muito grande que vivia em uma aldeia, Gilles tinha muitos irmãos e irmãs, quando tinha quatorze anos começou a estudar Matemática onde um professor reparou que Gilles era diferenciado dos outros alunos e por esse motivo decidiu ensinar particularmente para ele. Quando tinha vinte e cinco anos veio a decisão de mudar seu nome, adicionando no final o "de Roberval", ficando conhecido a partir desse momento como Gilles Personne de Roberval, mais conhecido como de Roberval. Por volta de 1628 mudou-se para Paris onde fez contato com Claude Hardy, Claude Midorge, Étienne Pascal e Blaise Pascal. Exceto o de Roberval, todos estes matemáticos participavam do circulo de Marin Mersenne. Com o passar do tempo de Roberval conseguiu se tornar membro do circulo, possibilitando seu crescimento até atingir o status de Matemático profissional. Ele alugou um apartamento que tinha dois quartos onde viveu até a sua morte em 1675.

A sua primeira contribuição para o estudo da Cicloide foi com a área sob o arco da curva, a qual era três vezes a área de um dado circulo. Isto só aconteceu porque ao chegar em Paris conheceu Mersenne e o mesmo o convenceu a estudar sobre a cicloide. Entretanto, de Roberval não publicou seu trabalho e ainda acusou alguns matemáticos de fazerem plágio.

Figura 3: Gilles Roberval.

Fonte: $https : //www.ecured.cu/Gilles_deRoberval/media/File : Gilles_deRoberval.jpg$

2.3 Marin Mersenne e Blaise Pascal

Marin Mersenne nasceu em 1588 na cidade de Oize, que era uma província de Maine, França. Ele era de uma família humilde e trabalhadora, seu pai era Julian Mersenne e sua mãe Jeane Moulière. Mersenne é lembrado na matemática pelo seu trabalho com Números Primos que mais tarde levaria o seu nome, "Números de Mersenne". Ele tinha estudado na escola Jesuíta de La Fleche em 1604, depois foi estudar teologia entre os anos de 1609 à 1611 em Sorhonne. Além de ser Padre Mersenne era matemático, teólogo, teórico musical e filosofo.

Figura 4: Marin Mersenne.

Fonte: $https : //www.scielo.br/j/ss/a/HVSyzCC75xPHVVzxkSYgkDL/?lang = pt$

Ele estimulou muitos matemáticos da sua época e montou até um grupo de estudo que se chamava circulo de Mersenne onde eles discutia muitos artigos nacionais e internacionais, Mersenne chegou até estudar a Cicloide pois conhecia e admirava os trabalhos não só de Galileu mais também de outros matemáticos de sua época. Ele conseguiu definir rigorosamente a Cicloide, todavia, quando partiu para o arco da curva não teve sucesso. A partir de então, veio a ideia de propor desafios para os matemáticos da sua época, inclusive incentivou os matemáticos ao estudo da Cicloide; sua contribuição foi de suma importância, depois de ter viajado muito pela Europa retornou para Paris, França, em 1647 onde ficou até a sua morte em 1648.

Blaise Pascal

Blaise Pascal nasceu em 1623 na cidade de Clermont-Ferrande, França, seus pais eram Étienne Pascal e Antoniette Begon, Blaise era um dos três filhos do casal. Desde cedo seu pai teve preocupação com a sua educação, visto que Blaise não tinha mais sua mãe, pois a mesma morreu quando ele tinha três anos de idade, tendo como irmão Gilberte e sua irmã mais velha Jacqueline.

O interesse pela Matemática veio porque seu pai o levava para os encontros de vários Matemáticos daquela época; através desses encontros que perceberam sua inteligência e facilidade de aprender, para um garoto que nunca tinha estudado numa escola e nem lido um livro, pois, foi educado pelo seu pai, essa situação era diferente e inédita, foi então que começaram a chamá-lo de prodígio. Já com dezesseis anos, ele fez um trabalho sobre secções cónicas de Gerard Desargues, e seus trabalhos não pararam por ai ele também inventou a máquina de calcular aos dezoito anos. Em seguida, trabalhou com o calculo da probabilidade e aritmética, com esses trabalhos chegou ao tão famoso triangulo de Pascal que até hoje é usado em várias discussões.

Na física, Pascal contribuiu com seus estudos para a hidrostática onde desenvolveu grandes estudos, inventou a seringa e criou a prensa hidráulica, instrumento que se baseia em um princípio que ficou conhecido como Principio de Pascal: a pressão exercida no líquido em equilíbrio transmite-se a todos os pontos do líquido e às paredes do recipiente. Em uma noite em 1658, durante uma dor de dente que o impedia de dormir, resolveu se distrair estudando a cicloide. Milagrosamente a dor melhorou e Pascal tomou isso como um sinal de Deus que o estudo da matemática não lhe desagradava. Tendo achado certas áreas, volumes e centros de gravidade associados a cicloide, Pascal propôs meia dúzia de tais questões aos matemáticos de seu tempo, oferecendo um primeiro e um segundo prêmio para as soluções e indicando de Roberval como uns dos juízes (BUSTILLOS E SASSINE, 2009). Blaise Pascal morreu no ano de 1662 em Paris, França.

Figura 5: Blaise Pascal.

Fonte: *https://www.meteorologiaenred.com/pt/Blaise-Pascal.html*

3 A Cicloide de forma lúdica e algébrica

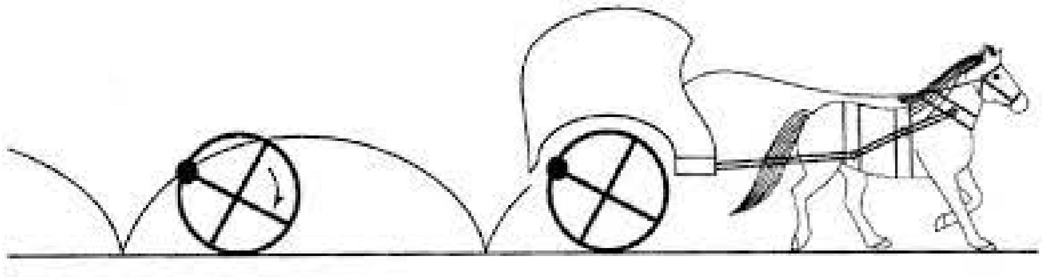
A seguir será apresentado por meio de demonstrações algébricas e lúdicas, a noção intuitiva da cicloide, a definição, as propriedades, a parametrização e a equação cartesiana.

A cicloide é traçada pela trajetória de um ponto qualquer P, fixo numa circunferência, que rola sem deslizar, ao longo de uma reta. Curiosamente, esta curva ficou conhecida por "Helena da geometria"uma vez que, tal como a "Helena de Tróia"foi muito cobiçada e disputada por vários homens, também a cicloide gerou várias disputas com matemáticos da época. O matemático Joahnn Bernoulli chegou a chamar-lhe "curva fatídica do século XVII".

3.1 Construção intuitiva da Cicloide:

Como já foi visto, Galileu Galilei ao observar a roda de uma carroça, percebeu, intuitivamente, que a trajetória de um ponto fixo na borda da roda da carroça formava uma curva, a qual ficou conhecida como Cicloide.

Figura 6: Carroça



Fonte: $BustilloseSassine(2011, p.22)$

Agora, para se obter o desenho da cicloide, de forma lúdica e simples, serão utilizados alguns materiais de fácil acesso bem como observar cinco passos bastante acessíveis. A seguir, a lista dos materiais necessários:

- Papelão;
- Tesoura;
- Cola ou fita adesiva;
- Cordão;
- Lápis;
- Palito(dente ou fósforo);
- Régua;

Figura 7: Materiais

Fonte:Autor (2021)

De posse dos materiais acima, segue-se os passos para a construção da cicloide:

- Primeiro passo: coloca-se um palito de dente em um ponto qualquer do papelão, corta-se o cordão com comprimento r qualquer. Em seguida, amarre-se as extremidades do cordão no palito de dente e no lápis de forma que esse lápis gire em torno do palito sem o cordão enrolar, formando assim um circulo de raio r, conforme as figuras abaixo.

Figura 8: Construçao.

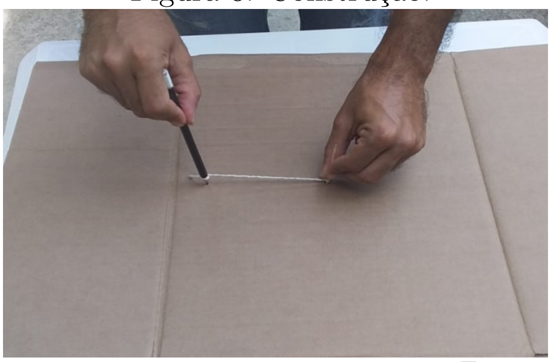


Figura 9: Formando o círculo.

Fonte: Autor(2021).

- Segundo passo: Com o auxílio da tesoura, corta-se o circulo de raio r.

Figura 10: Circulo formado.

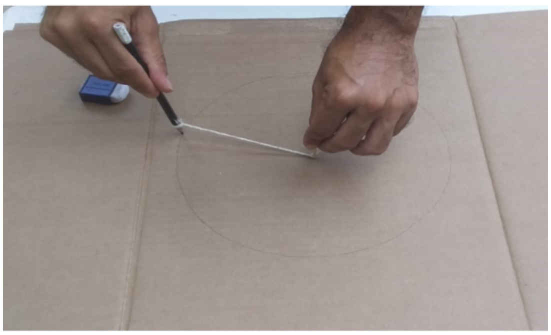


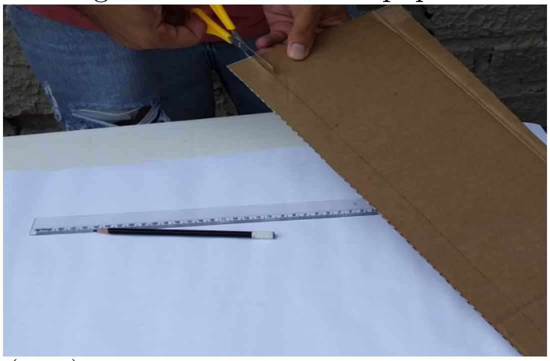
Figura 11: Círculo.

Fonte: Autor(2021).

- Terceiro passo: Ainda no papelão, traça-se uma reta com o auxílio da régua e em seguida recorte-a.

Figura 12: Traçando a reta.

Figura 13: Cortando o papelão.



Fonte: Autor(2021).

- Quarto passo: Prende-se a reta de papelão na cartolina com cola ou fita adesiva.

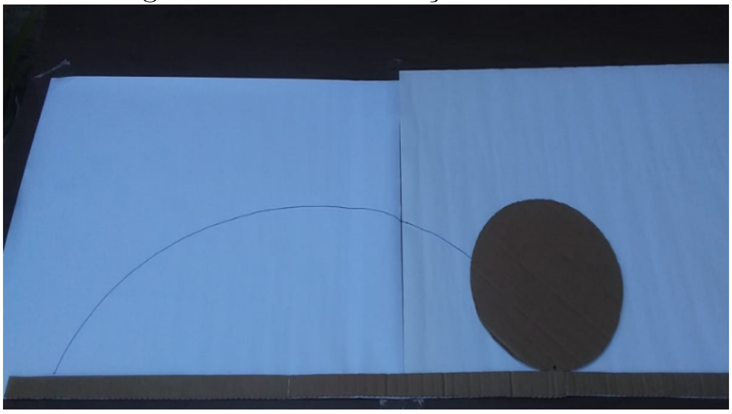
Figura 14: Reta na cartolina.

Fonte:Autor (2021)

- Quinto passo: Coloca-se o circulo de papelão sobre a reta e em seguida marca-se com o lápis um ponto fixo sobre a borda do circulo (na circunferência). Logo após, deve-se fazer com que o círculo role sobre a reta, sem deslizar. Deste modo será traçada a trajetória desse ponto fixo na borda do circulo.

Figura 15: Ponto na circunferência.

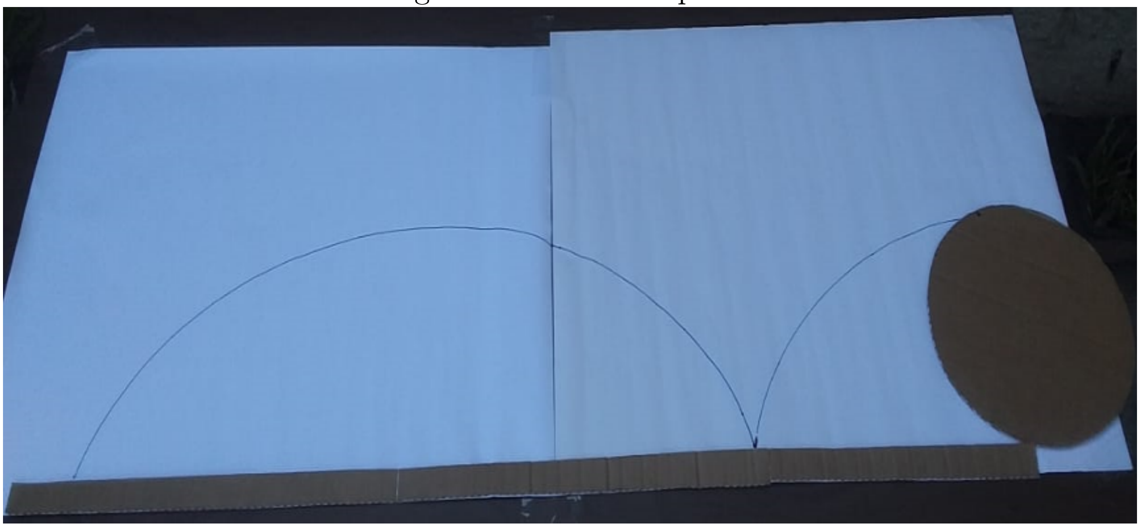
Figura 16: Cicloide traçada.



Fonte: Autor(2021).

A curva esboçada de forma lúdica por meio da trajetória de um ponto fixo (lápis) na borda do circulo, é a Cicloide.

Figura 17: Volta completa.

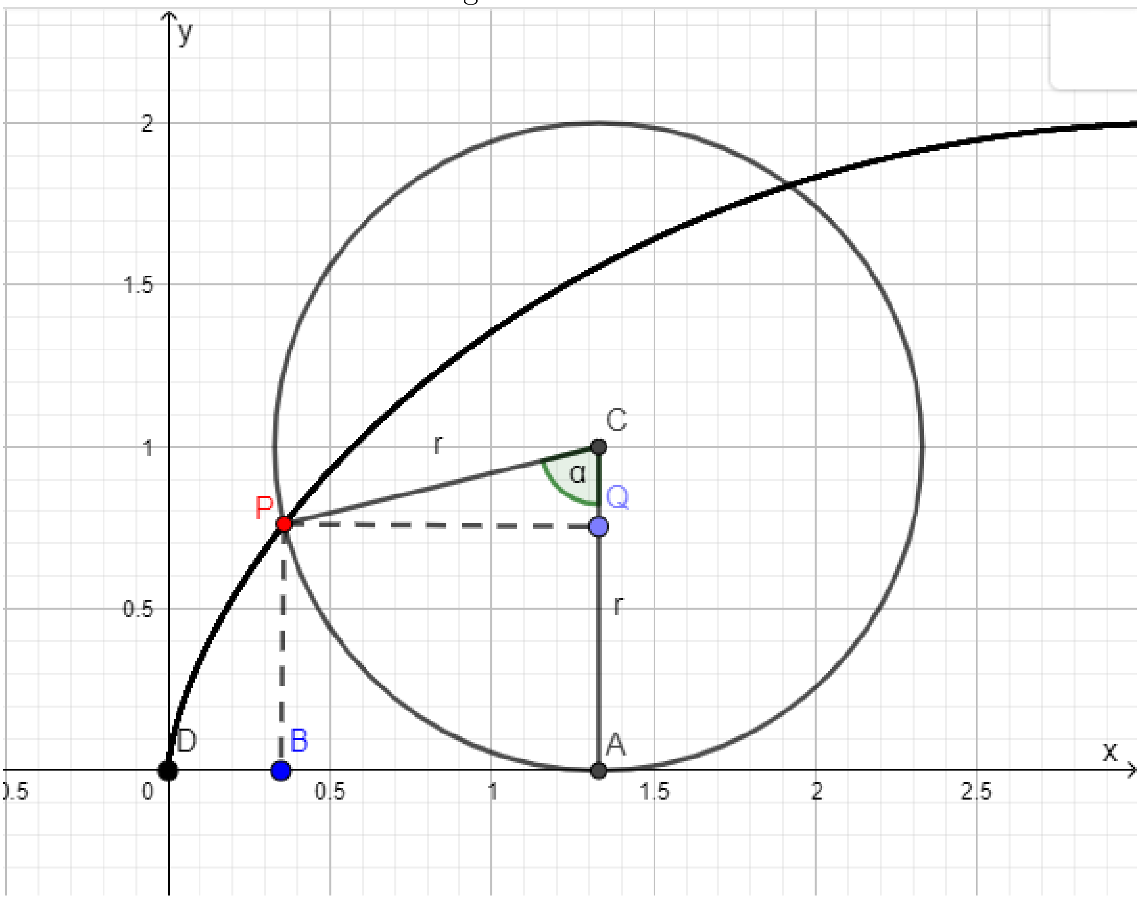


Fonte:Autor (2021)

3.2 Definição e Parametrização da Cicloide:

Seja um circulo de raio r, de centro no ponto C e uma reta denominada eixo das abscissas, e um ponto P pertencente a borda do circulo, ou seja, na circunferência. Chama-se de Cicloide a curva determinada pela trajetória do ponto P, ao girar o círculo no sentido horário sobre o eixo das abscissas, sem escorregar, conforme a figura a seguir.

Figura 18: Cicloide.



Fonte: Autor (2021).

Para parametrizar a cicloide, observa-se as seguintes informações obtidas pela figura acima. Tem-se C como o ponto no centro da circunferência, P e A como pontos da Circunferência e D a origem do plano cartesiano. Quando a circunferência começa a girar sem deslizar forma-se um ângulo denominado de α ou ângulo ACP. Quando o ponto P parte da origem D, isso significa que α é igual a 0 e quando o ponto P sai da origem e gira sem deslizar, a distância DA que se observa tem o seguinte valor.

$$\overline{DA} = arcPA = r\alpha$$

Desta maneira toma-se C$(r\alpha, r)$ como o ponto central da circunferência, como a Cicloide esta sendo formada no plano cartesiano denotamos que as coordenadas para o ponto P será o par ordenado (x, y). Conforme a figura acima mostra, tem-se:

$$x = \overline{DA} - \overline{PQ} = r\alpha - rsen\alpha = r(\alpha - sen\alpha)$$

$$y = \overline{AC} - \overline{QC} = r - rcos\alpha = r(1 - cos\alpha)$$

Com base no que foi visto antes, pode-se definir como equações paramétricas da Cicloide as seguintes equações;

$$x = r(\alpha - sen\alpha)$$

e

$$y = r(1 - cos\alpha)$$

, para

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

3.3 Propriedades da Cicloide:

Dentre as propriedades da Cicloide existem duas mais importante, a área sob a curva e o comprimento de arco. Para melhor denotar a área sob a curva Cicloide usa-se as equações paramétricas. Utilizando-se a Regra da Substituição com a formula de integrais definidas para área tem-se:

$$A = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta g(t) f'(t) dt$$

Onde, segundo (STEWART, 2013) a área sob uma curva $y = F(x)$ de a até b é $A = \int_a^b F(x)dx$ para $F(x) \geq 0$. Como faz necessário o uso da equação paramétrica, logo tem-se que; $x = f(t)$ e $y = g(t)$, para $\alpha \leq t \leq \beta$.

Através de um exemplo para encontrar a área sob um arco de cicloide que é dada pelo intervalo de $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, utilizando a substituição no seguinte parâmetro tem-se que; $y = r(1 - cos\alpha)$ e $dx = r(1 - cos\alpha)d\alpha$, logo obtém-se os seguintes resultados:

$$A = \int_0^{2\pi} y dx$$

$$A = \int_0^{2\pi} r(1 - cos\alpha) r(1 - cos\alpha) d\alpha$$

$$A = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - cos\alpha)^2 d\alpha$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2cos\alpha + cos^2\alpha) d\alpha$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} [(1 - 2cos\alpha + \tfrac{1}{2}(1 + cos2\alpha)] d\alpha$$

$$A = r^2 [\tfrac{3}{2}\alpha - 2sen\alpha + \tfrac{1}{4} sen2\alpha]_0^{2\pi}$$

$$A = r^2(\tfrac{3}{2}2\pi - 2sen2\pi + \tfrac{1}{4}sen2.2\pi) \text{ - } [r^2(\tfrac{3}{2}0 - 2sen0 + \tfrac{1}{4}sen2.0)]$$

$$A = r^2(\tfrac{3}{2}2\pi - 2sen2\pi + \tfrac{1}{4}sen4\pi) - 0$$

$$A = r^2(\tfrac{3}{2}2\pi) - 0$$

$$A = 3\pi r^2$$

Pode-se concluir que nesse exemplo a área de um arco da cicloide é denotado da seguinte maneira: A área é três vezes a área do circulo que a gera. Galileu conseguiu conjecturar esse resultado e mais dois matemáticos da época demonstraram o resultado da área de um arco de Cicloide, o francês de Roberval e o italiano Torricelli, ambos que iniciaram esse trabalho.

Agora, no caso do calculo do comprimento do arco de Cicloide, utiliza-se novamente as equações paramétricas e a fórmula de integral definida no intervalo $a \leq \alpha \leq b$ como a seguir;

$$L = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{d\alpha})^2 + (\frac{dy}{d\alpha})^2} d\alpha$$

Utilizando-se a variação $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ tem-se que;

$$\frac{dx}{dy} = r(1 - cos\alpha) \text{ e } \frac{dy}{d\alpha} = rsen\alpha$$

Com isso pode-se demonstrar e calcular o comprimento do arco da cicloide.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{dx}{d\alpha})^2 + (\frac{dy}{d\alpha})^2} d\alpha$$

Substituindo com o que já foi visto anteriormente, tem-se;

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - cos\alpha)^2 + r^2 sen^2\alpha} d\alpha$$

logo,

$$L = \int_0 2\pi \sqrt{r^2(1 - 2cos\alpha + cos^2\alpha + sen^2\alpha} d\alpha$$

agora obtém-se,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - cos\alpha)} d\alpha$$

Agora por meio da identidade trigonométrica, usa-se $sen^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$ para $\alpha = 2x$, dessa forma tem-se $[1 - cos\alpha = 2sen^2(\frac{\alpha}{2})]$ com isso $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, mudando o intervalo adquire-se $0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \pi$, então $sen(\frac{\alpha}{2} \geq 0$. Mediante no que foi dito pode-se resolver a integral.

$$\sqrt{2(1 - cos\alpha} = \sqrt{4sen^2(\frac{\alpha}{2}} = 2|sen(\frac{\alpha}{2})| = 2sen(\frac{\alpha}{2})$$

Resolvendo a integral obtém-se o seguinte resultado;

$$L = 2r \int_0^{2\pi} sen(\frac{\alpha}{2}) d\alpha = 2r[-2cos(\frac{\alpha}{2})]_0^{2\pi} = 2r[2 + 2] = 8r$$

Conclui-se que o comprimento de arco da cicloide é oito vezes o raio do circulo que a gera.

3.4 Equação Cartesiana da Cicloide:

Para obter a equação cartesiana faz-se necessário o uso da equação paramétrica e dessa forma deve-se eliminar seu parâmetro, sendo assim tem-se;

$$x = r(\alpha - sen(\alpha))$$

$$y = r(1 - cos(\alpha)).$$

Como $r \neq 0$ dividi-se ambos os membros da igualdade acima por r, dessa forma tem-se uma nova expressão;

$$\frac{x}{r} = \alpha - sen(\alpha)$$

$$\frac{y}{r} = 1 - cos(\alpha)$$

Agora isolando $sen(\alpha)$ e $cos(\alpha)$ segue-se,

$$sen(\alpha) = \alpha - \frac{x}{r}$$

$$cos(\alpha) = 1 - \frac{y}{r}$$

Como tem r dividindo x e y pode-se fazer da seguinte forma;

$$sen(\alpha) = \frac{r\alpha - x}{r}$$

$$cos(\alpha) = \frac{r - y}{r}$$

Para melhor definir eleva-se os dois membros ao quadrado com isso obtém-se o seguinte;

$$(sen(\alpha))^2 = (\tfrac{r\alpha - x}{r})^2$$

$$(cos(\alpha))^2 = (\tfrac{r - y}{r})^2$$

Assim somando ambos os lados para obter a equação cartesiana;

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = (\tfrac{r\alpha - x}{r})^2 + (\tfrac{r - y}{r})^2$$

Pelas relações trigonométricas tem que $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ então tem-se;

$$(\tfrac{x - r\alpha}{r})^2 + (\tfrac{y - r}{r})^2 = 1$$

logo;

$$r^2 = (x - r\alpha)^2 + (y - r)^2$$

Como já havia dito inicialmente que $cos(\alpha) = (1 - \frac{y}{r})$, então isola-se o parâmetro α para obter a seguinte expressão;

$$\alpha = arccos(\frac{1-y}{r})$$

Agora substituindo o α pela expressão que foi definida anteriormente, obtém-se a equação cartesiana;

$$r^2 = (x - rarccos(\frac{1-y}{r}))^2 + (y - r)^2$$

A equação cartesiana não é uma expressão elegante, por isso que a mesma não é muito utilizada. Além disso, existe a equação paramétrica que tornam os cálculos mais acessíveis e elegantes.

4 Braquistócrona, uma aplicação da Cicloide:

A Braquistócrona foi estudada e descoberta primeiramente pelo matemático suiço Johann Bernoulli(1667 - 1748), em julho de 1696. Foi na revista Acta Eruditorium, que tinha como fundador e dono o matemático Gottfried Wilhelm Leibniz, Bernoulli apresentou um problema que logo veio a curiosidade de seus companheiros matemáticos. Esse problema tinha como objetivo determinar qual deveria ser a forma da rampa, de modo que uma partícula faz deslizar do repouso e sobre a influência da gravidade passasse o menor tempo possível para atingir o próximo ponto inferior da trajetória.

Leibniz divulgou o problema através de mensagens escritas em cartas para os melhores matemáticos da época. Vários deles encontraram rapidamente uma solução, incluindo Leibniz, bem como Isaac Newton e os irmãos Jacques e Johann Bernoulli. Eles apontaram que a curva mais rápida era a Braquistócrona que por sua vez deveria ser a Cicloide.

A seguir, será apresentado um dos princípios da Física chamado de conservação de energia, que será muito útil para o estudo da Braquistócrona. Para tal, usa-se a Energia Cinética e a Energia Potencial, por intermédio da seguinte fórmula:

$$E_t = E_c + E_p$$

Sendo,

- E_t = Energia total;
- E_c = Energia cinética;
- E_p = Energia potencial;

Agora,

- $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- $E_p = mgh$
- $E_t = 0$

Logo, a fórmula principal que será utilizada é a seguinte:

$$E_t = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

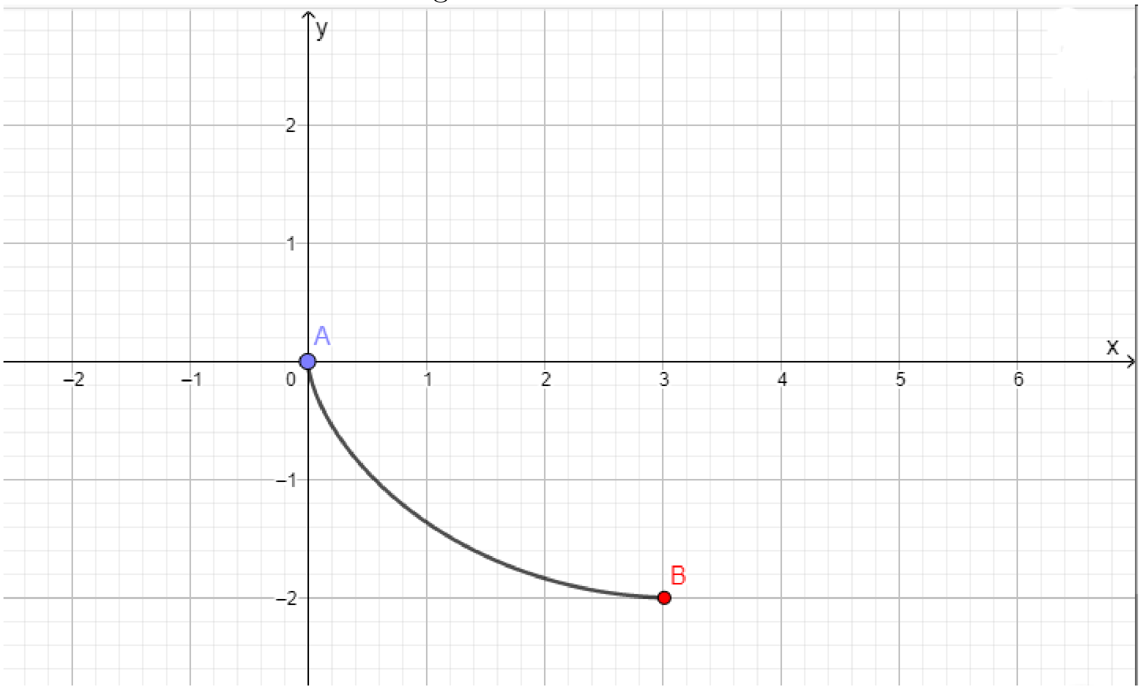
Onde;

- m = Massa;
- v = Velocidade;
- g = Gravidade;
- h = Altura;

Todavia, como a partícula vai se deslocar de um ponto A para um ponto B, conforme a figura a seguir, como y vai indo para um valor negativo, então substitui (h) por (y), resultando na seguinte expressão:

$$E_t = \frac{1}{2} mv^2 - mgy$$

Figura 19: Ponto A e B.



Fonte: Autor (2021)

Através do cálculo variacional pode-se demonstrar a curva Braquistócrona, ou seja, explicar a sua trajetória. Ao fazer tal estudo trabalha-se-á com (x) em função de (y), para facilitar os cálculos e assim conseguir diminuir o tempo de deslocamento de uma partícula. Será utilizada uma função estacionaria $T = \int dt$ de modo alcançar o menor tempo possível.

Com isso, tem-se T como funcional e dt sendo o diferencial com relação ao tempo. Pode-se agora definir $dt = \frac{dS}{v}$, onde dS é uma parte do arco da curva que tem por objetivo descrever a partícula, e seja v a velocidade partindo da origem conforme y vai diminuindo. Daí, tem-se a seguinte equação:

$$T = \int \frac{dS}{v}$$

Dessa maneira, obtém-se o diferencial de arco assim;

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2} dy = \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

Encontrando a função da velocidade de conservação de energia em que se inicia na origem, ou seja, em 0. Como a partícula vai sair do repouso a energia total da mesma é 0, com isso, usa-se a seguinte fórmula para definir a velocidade:

$$0 = \frac{1}{2} mv^2 - mgy \Rightarrow \frac{1}{2}\, v^2 = gy \Rightarrow v^2 = 2gy$$

Assim, encontrando a velocidade tem-se que:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Substituindo a velocidade na equação inicial obtém-se a seguinte integral:

$$T = \int dt = \int \frac{dS}{v} = \int \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1+(x'^2)}}{\sqrt{y}} dy$$

Lembrando que $x' = \frac{dx}{dy}$ e $x = x(y)$.

Por outro lado, é necessário encontrar uma função de modo que T seja estacionário. Um caminho possível é a utilização da equação de Euler-Lagrange, contudo, o requisito para que essa equação seja usada é que a mesma possua três variáveis de forma explicita, como por exemplo $F(x, x', y) = \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{y}}$. Calculando a derivada com relação a x tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

A seguir, observa-se o processo de derivação, com relação a x', da função que fora definida acima, obtém-se o seguinte:

Dada a função $\frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{y}}$, utilizando-se a Regra da Cadeia para derivar, tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1}{2}(1 = (x')^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x' = \frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Derivando com relação a y segue que,

$$\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

A derivada é igual a 0, pois $\frac{\partial F}{\partial x'}$ é igual a uma constante, em outras palavras, tem-se que:

$$\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = C$$

Elevando-se ambos os membros da igualdade acima, ao quadrado obtém-se:

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{1+(x')^2})^2} \cdot \frac{1^2}{(\sqrt{y})^2} = C^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x')^2}{1+(x')^2} \cdot \frac{1}{y} = C^2$$

Fazendo $C^2 = \frac{1}{2a}$ obtém-se o seguinte:

$$\frac{(x')^2}{1+(x')^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\Rightarrow 2a(x')^2 = y(1+(x')^2$$

$$\Rightarrow (2a-y)(x')^2 = y$$

Daí segue-se:

$$(x')^2 = \frac{y}{2a-y} \Rightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}$$

Utilizando a substituição trigonométrica para melhor resolver essa integral tem-se:

$$y = a(1 - cos\theta)$$

$$dy = asen\theta \text{ que é igual a } y(\theta)$$

Ou seja:

$$x = \int \sqrt{\frac{a(1-cos\theta)}{a(1+cos\theta)}} asen\theta d\theta$$

Multiplicando por $(1 - cos\theta)$ o numerador e o denominador da raiz tem-se:

$$x = \int \sqrt{\frac{(1-cos\theta)\cdot(1-cos\theta)}{(1+cos)\cdot(1-cos\theta)}} asen\theta$$

$$\Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{(1-cos\theta)^2}{1-cos^2\theta}} asen\theta d\theta$$

Como $(1 - cos^2\theta) = sen^2\theta$ por definição, pode-se retirar ele da raiz e também tira-se $(1 - cos\theta)^2$ da raiz, ficando dessa forma a integral:

$$x = \int \frac{(1-cos\theta)}{sen\theta} asen\theta d\theta$$

Cancelando $sen\theta$ resulta na seguinte integral:

$$x = a \int (1 - cos\theta) d\theta$$

Integrando obtém-se o seguinte resultado:

$$x(\theta) = a\theta - asen\theta$$

Colocando o fator comum em evidência, obtém-se:

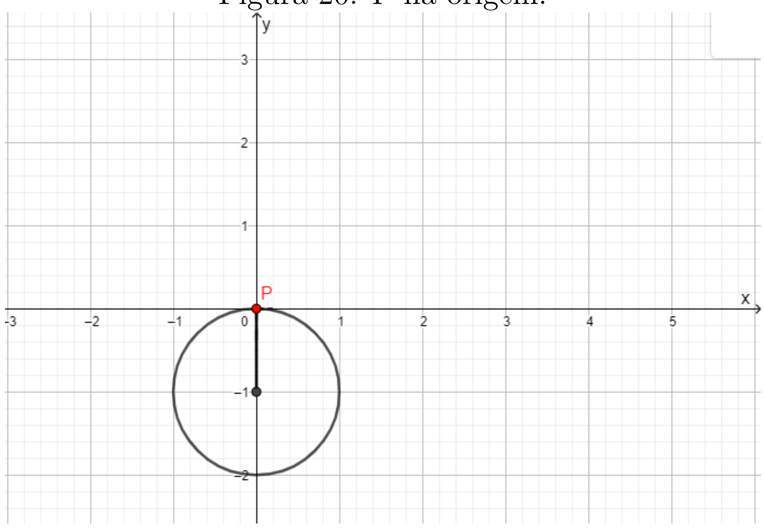
$$x(\theta) = a(\theta - sen\theta)$$

Tomando o ponto P na origem do sistema, ou seja, $P(0,0)$, significa que o ângulo θ é igual a zero e que também x e y são nulos. Para verificar tais informações basta utilizar os resultados obtidos anteriormente, daí segue que:

$$\theta = 0 \Rightarrow x = a(\theta - sen(\theta)\, x = a(0 - 0) \Rightarrow x = 0$$

$$\theta = 0 \Rightarrow y = a(1 - cos(\theta)) \Rightarrow y = a(1 - 1) \Rightarrow y = 0$$

Figura 20: P na origem.

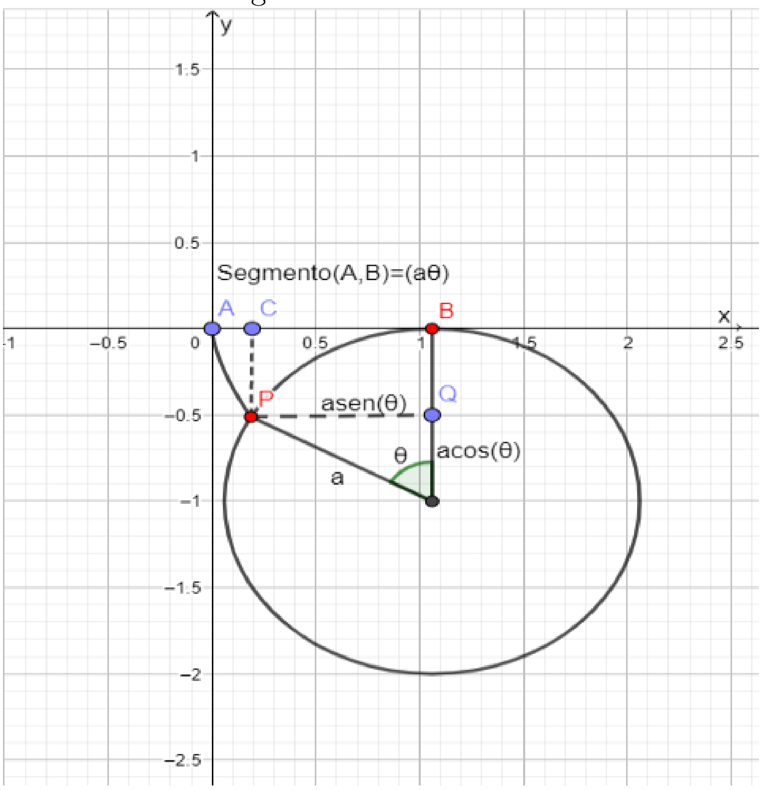


Fonte: Autor (2021)

Por outro lado, quando o circulo girar sem deslizar, o ângulo θ sofre variação, significando a distância que o ponto de contato se deslocou da origem para a direita no eixo horizontal, resulta num cumprimento igual ($a\theta$), pois, o raio (a) multiplicado pelo ângulo (θ) determina o arco do circulo que corresponde ao ângulo (θ). Mais observa-se que o ponto P está atrás da projeção do raio sobre o eixo horizontal, obtendo-se tal projeção a multiplica o raio por $sen(\theta)$. Daí, encontra-se a equação paramétrica com relação ao eixo (x).

Para calcular a componente (y) observa-se que o raio (a) está projetado na direção vertical, por isso deve-se subtrair do próprio raio para obter o seguinte resultado ($a - acos(\theta)$). Colocando-se o fator comum em evidência obtém-se $a(1 - cos(\theta))$ que é a segunda equação paramétrica da Cicloide correspondente ao eixo (y).

Figura 21: Parâmetros.



Fonte: Autor (2021)

Portanto, a curva construída de forma paramétrica é a que tem a descrição de um ponto na periferia de um circulo, o qual rola sem deslizar sobre eixo horizontal, ou seja, no eixo (x). Com isso, confirma-se que essa curva é a Cicloide. Contudo, a Braquistócrona é uma Cicloide e por curiosidade também é uma isócrona (Tautócrona), pelo simples fato dela permitir que vários objetos, deslocados de qualquer ponto da curva cheguem ao mesmo tempo no seu ponto final.

5 Construção da Cicloide no Geogebra:

O Geogebra é uma ferramenta tecnológica muito útil na área da Matemática, possibilitando a construção de curvas, planos, superfícies, sólidos, cálculos de áreas e volumes. Portanto, a seguir, será demonstrada a construção da cicloide no Geogebra, de uma forma bem detalhada, utilizando-se sete passos bastante simples de realizar:

- Primeiro passo: Criar dois controles deslizantes no ícone controle deslizante que está localizado na parte superior do Geogebra, sendo o décimo ícone da esquerda para direita. No primeiro controle deslizante nomeia-se como (t), colocando as seguintes configurações para melhor demonstrar,deixa o valor mínimo em (0), no valor máximo em (30) e para finalizar esse primeiro controle deslizante coloca-se o incremento com o valor (0,01). Dessa forma obtém-se o primeiro controle. Para o segundo controle segue os mesmos passos do primeiro, muda-se apenas o nome para (r) e suas configurações ficam assim: o valor mínimo deixa em (0), o valor Máximo em (20) e no incremento o valor de (0,1). Com isso estão construídos os controles deslizantes. Mais adiante será observada a utilidade de tais controles.

Figura 22: Ícone do controle deslizante.

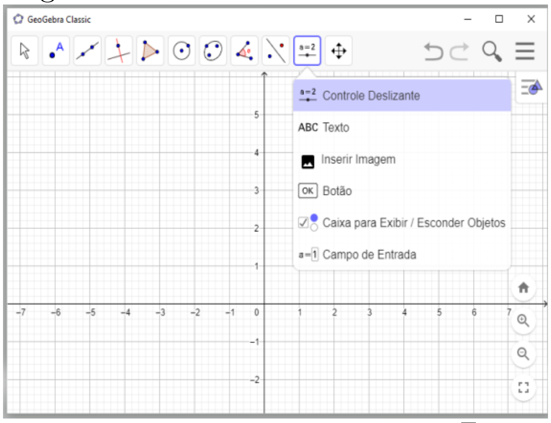
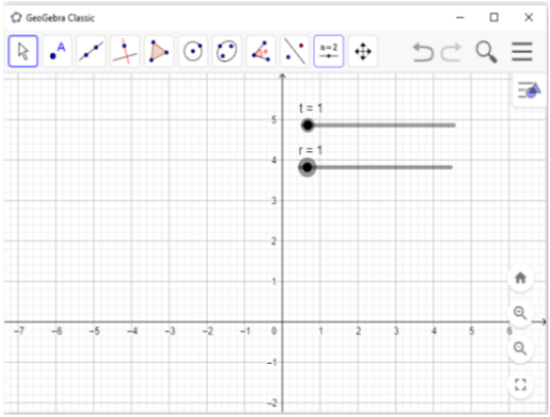


Figura 23: Controles deslizantes feitos.



Fonte: Autor(2021).

- Segundo passo: segue a criação de algumas funções que ajudará na construção da Cicloide. Digita-se no campo de entrada as seguintes funções: $f(x) = r \cdot (x - sen(x))$ e $g(x) = r \cdot (1 - cos(x))$. Em seguida, clica na tecla enter para aparecer as curvas, logo após, clica-se com o botão direito que aparecerá uma janela. Nesta janela será necessário clicar em exibir objetos para que tais curvas desapareçam, conforme a imagem a seguir:

Figura 24: Curvas.

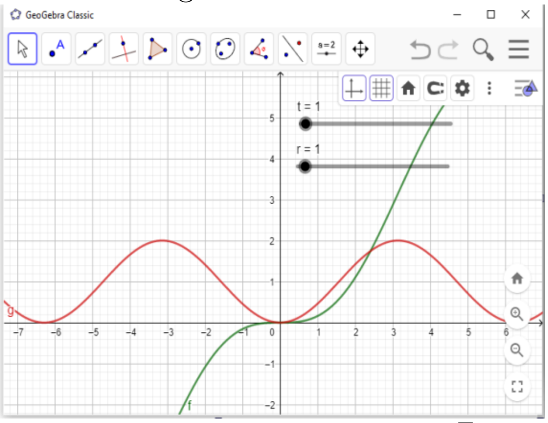
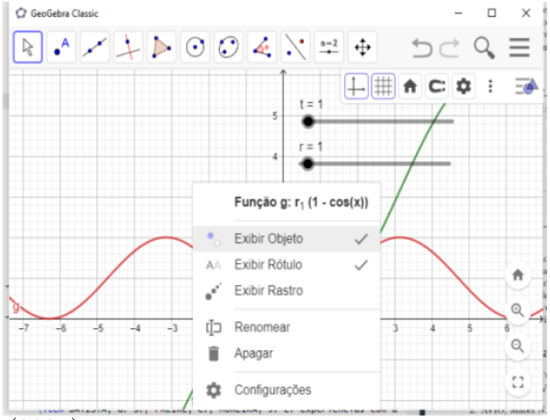


Figura 25: Eliminando as Curvas.



Fonte: Autor(2021).

- Terceiro passo: No campo entrada cria-se a Cicloide da seguinte forma; Colocando o nome curva no campo entrada vai aparecerá algumas opções, deve-se clicar na primeira que está escrita assim; Curva[<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]. Com essas informações, agora é só seguir o roteiro a seguir. Na primeira expressão coloca-se $f(s)$. Na segunda expressão coloca-se $g(s)$. Na variável coloca-se (s). No valor inicial coloca-se (0) para que a curva inicie da origem no plano cartesiano. No valor final deixa-se em função de (t). Dessa forma foi criada a curva. veja a imagem.

Figura 26: Curva inicial.

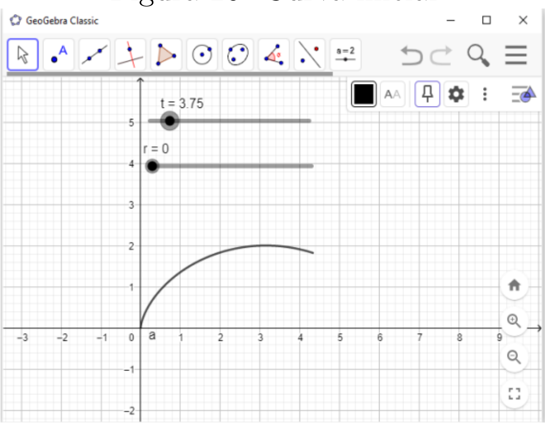
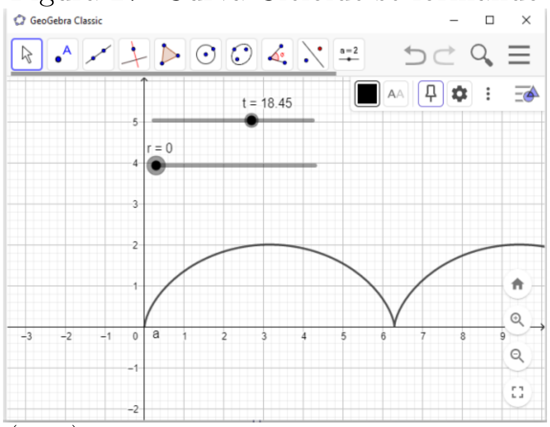


Figura 27: Curva Cicloide se formando.



Fonte: Autor(2021).

É importante verificar que quando (t) está crescendo a curva Cicloide vai se formando.

- Quarto Passo: Agora constrói-se um ponto que será chamado de (P), utilizando o campo entrada cria-se o seguinte ponto (a) em função de (t); sendo que o ponto aparecerá como (a), porém, o desejado é que apareça o ponto (P), dessa forma renomeia-se o ponto (a) para ponto (P). clica-se com o botão direito do mouse e em seguida abrirá uma janela, na qual resultará na seguinte imagem.

Figura 28: Ponto A.

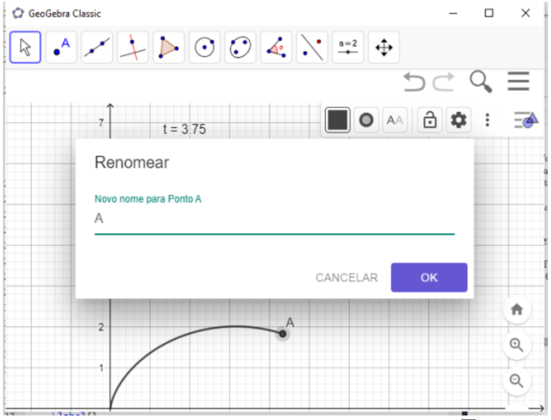
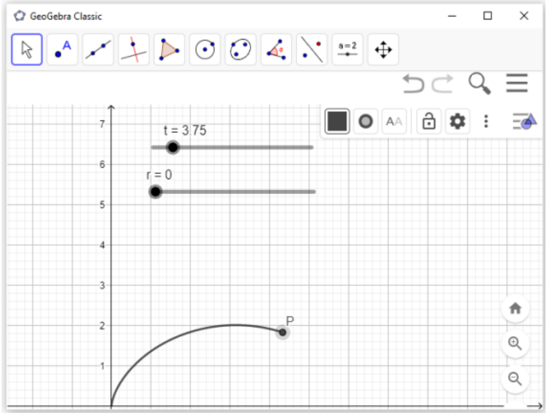


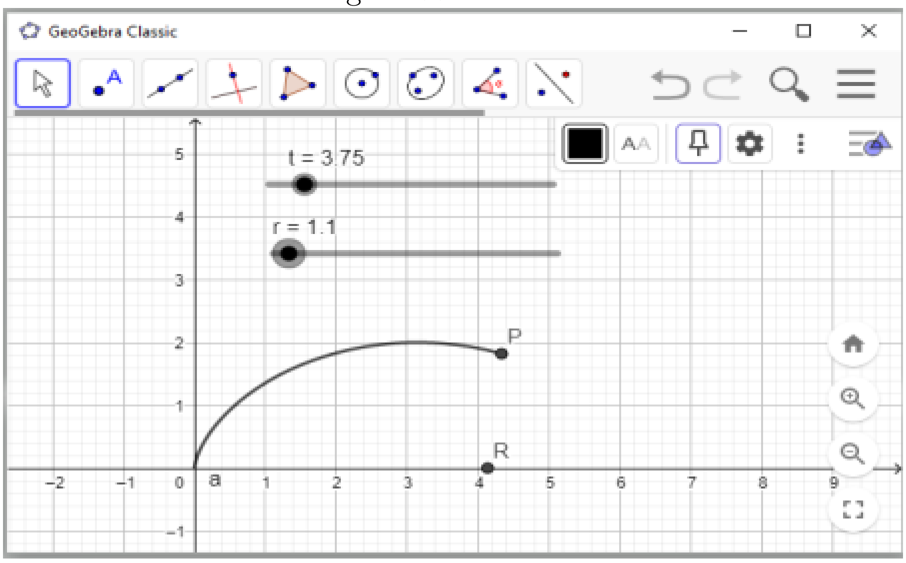
Figura 29: Ponto P.



Fonte: Autor(2021).

- Quinto passo: Cria-se um ponto no eixo de x da seguinte forma: Utilizando novamente o campo entrada coloca-se os seguintes dados $R = (r \cdot t, 0)$. Veja a imagem a seguir:

Figura 30: Ponto P.



Fonte: Autor (2021)

- Sexto passo: Nesse passo cria-se o circulo que gera a Cicloide da seguinte maneira; primeiro usando o campo entrada coloca-se o ponto do centro da circunferência com os seguintes dados $O = (r \cdot t, r)$, em seguida clica na tecla enter, com a qual o ponto vai esta lá. Agora que o ponto (O) foi criado, precisa da seguinte sequência para criar o circulo: No ícone que fica na parte superior, sendo o sexto da esquerda para direita, clica e escolhe a primeira opção que diz "Circulo dados Centro e um de seus Pontos", com isso obtém-se que o centro é o ponto (O) e que um de seus pontos localizado na periferia do circulo é (P), conforme as imagens a seguir.

Figura 31: Ponto O.

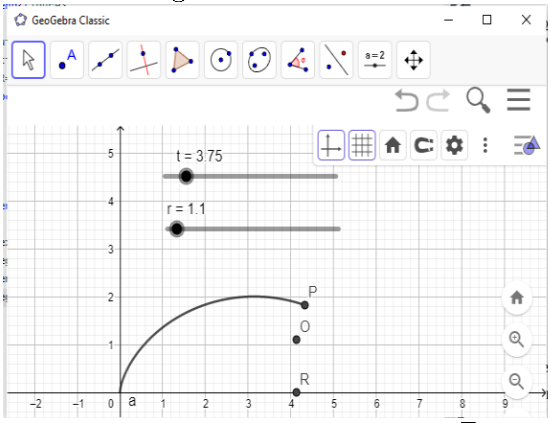
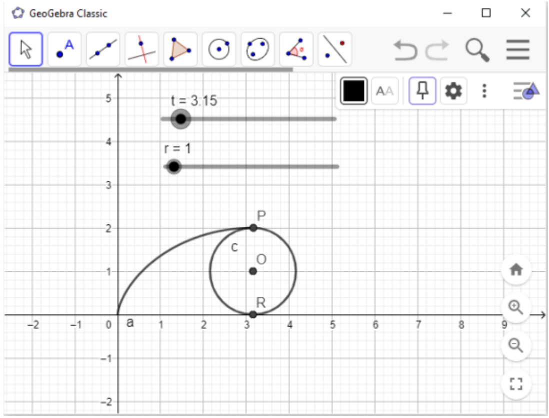


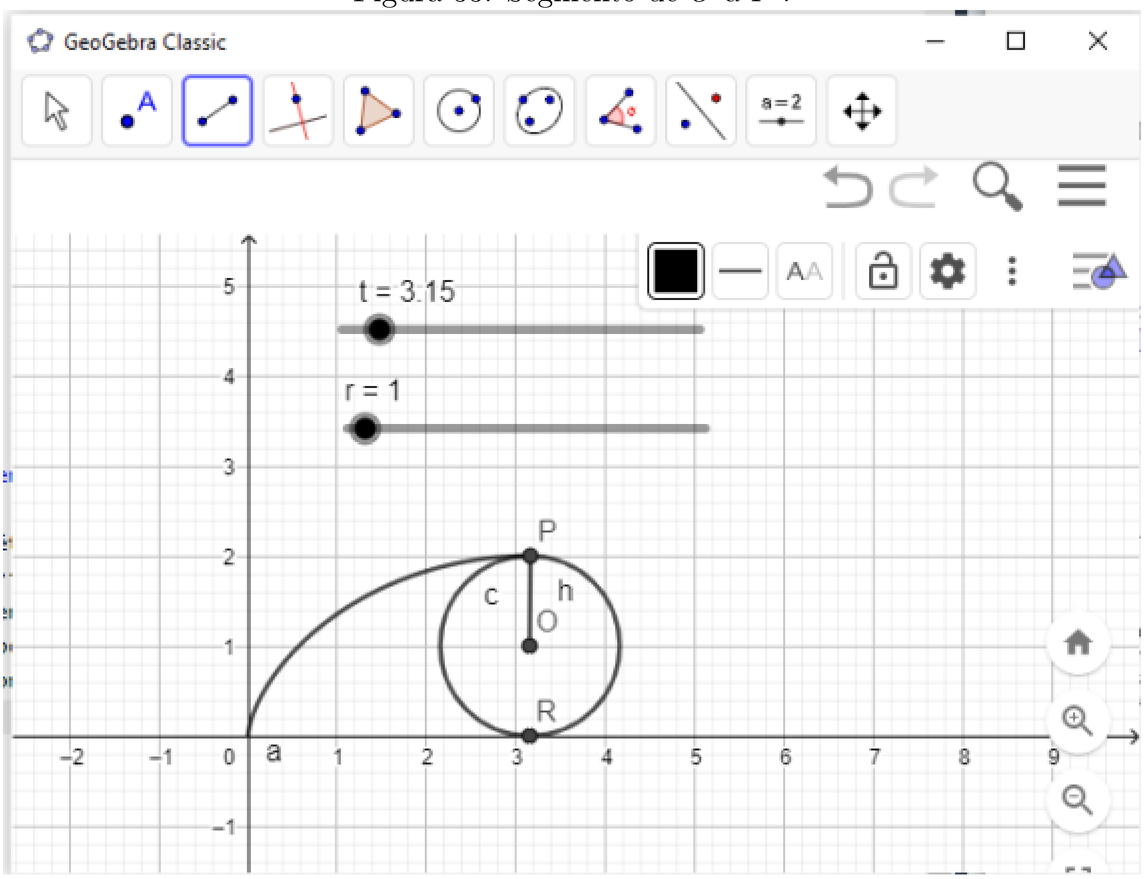
Figura 32: Circulo Pronto.



Fonte: Autor(2021).

- Sétimo passo: Agora a criação do raio da circunferência é feita assim; primeiro localiza-se o ícone que fica na parte superior, sendo o terceiro da esquerda para direita, clica-se no ícone que aparecerão as opções, daí, escolhe-se a segunda opção que esta escrito (segmento), em seguida clica nos pontos (O) e (P), construindo assim o raio, conforme a figura a seguir.

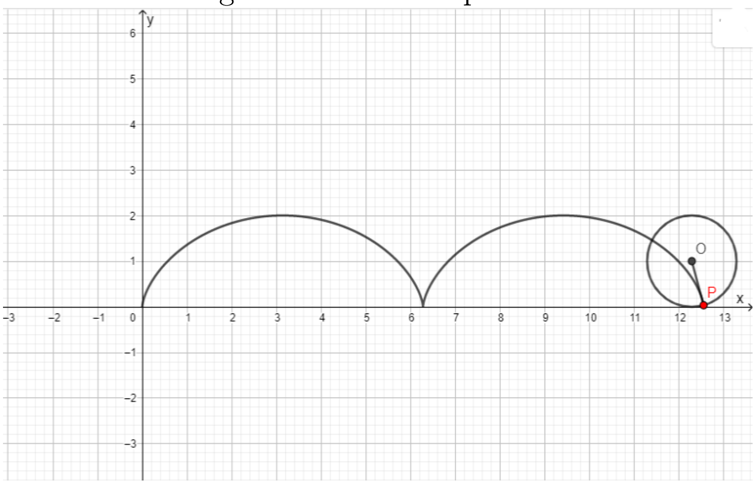
Figura 33: Segmento de O a P .



Fonte: Autor (2021)

Desta forma, conclui-se o processo de montagem da cicloide através do Geogebra, revelando a maneira simples e objetiva de tal construção. Tal ferramenta constitui-se um recurso bastante eficaz para compreensão da curva Cicloide.

Figura 34: Cicloide pronta .



Fonte: Autor (2021)

6 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo geral apresentar de forma mais prática o entendimento da Cicloide. Para isso, foi trabalhada sob viés de uma construção intuitiva sobre a curva, trabalhando a definição e parametrização.

O interesse em analisar esta temática surgiu a partir do momento em que comecei a analisar os parâmetros da curva e perceber, por exemplo, que a curva pode ser gerada através de uma roda de uma carroça com um ponto fixo. Apesar de considerar que boa parte desta pesquisa precisaria de uma análise mais exploratória, considero que as leituras e entendimentos são muito importantes para a formação de um professor de Matemática e sua prática pedagógica.

Nessa perspectiva, consideramos que as práticas pedagógicas que vinculem os conteúdos ao contexto lúdico de apresentação da Cicloide, são tão importantes quanto os algébrico demonstrados nos livros de cálculos, mas que os lúdicos apresentam uma dinâmica e facilita o ensino-aprendizagem da curva.

No que concerne aos teóricos recorri aos estudos de Boyer (2012), Bustillo e Sassine (2011) e Stewart (2013), além de outros.

As perguntas de pesquisa podem ser respondidas através dos seguintes posicionamentos: o entendimento da Cicloide pode ser visto através de uma construção lúdica com materiais manipuláveis de baixo custo e também através do aplicativo Geogebra que traz um gráfico mais aperfeiçoado. A praticidade através de sua aplicação vem por meio do uso da equação paramétrica que nos propõe uma facilidade ao determinar a curva de menor tempo.

Com os resultados, foi possível observar que apesar de termos outras formas de calcularmos a Cicloide, a melhor forma seria com as equações paramétricas, pois elas nos propõem uma forma mais simples de cálculo da curva. Os resultados também apontam para a praticidade de construção no Geogebra.

Por fim, acredito que esta pesquisa pode auxiliar outros professores em seus estudos em sala de aula, além disso, estimula outros estudantes a pesquisar mais sobre a curva.

Referências Bibliográficas

1. ACTA ERUDITORUM, Revista dos eruditos, publicada entre 1682 e 1782, mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz.

2. AVIO, Mabel N.; GÜICHAL, Edgardo; LUSENTE, María F. Uma propriedade da ciclóide. Journal of Mathematical Education, v.8, n.3,pág. 1-10, 1993.

3. BATISTA, G. S.; FREIRE, C.; MOREIRA, J. E. Experiências com a Braquistócrona. Revista Física na Escola, v. 7, n. 2, p. 58–60, 2006.

4. BIANCHINI, Waldecir. Parametrização da cicloide. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/interativo/vetores/cicloide.html>. Acesso em: 27 novembro 2021.

5. BOYER, C. B., Merzbach, U. C., História da Matemática, Editora Blucher, São Paulo, 2012.

6. BUSTILLOS, OSCAR V.; SASSINE, ANDRE. A magia da curva cicloide: braquistocrona e tautocrona. São Paulo: Scortecci, 2011. 256 p. Disponível em:

   http://repositorio.ipen.br/handle/123456789/29252. Acesso em: 09 nov. 2021.

7. CAETANO. W. L. Queda em Curvas de Menor Tempo e Tempo Independente da Altura - Braquistócrona e tautócrona, (2008).

8. CHAQUIAM, Miguel. Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula. Belém: Sbem-pa, 2017.

9. DO NASCIMENTO, Dandara Lorrayne. O ENSINO DA MATEMÁTICA NA NATUREZA: ANÁLISE DA CURVA CICLOIDE NAS FOLHAS. ebiografia.com/blaise pascal/.

10. HALLIDAY, D.; RESNIK, R.; WALKER, J. Fundamentos de Física - Ótica. - volume 4. 8. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

11. HERRERA, M. Galileo, Bernoulli, Leibniz e Newton em torno do problema da braquistócrona. Rev Mexicana Fis , v. 40, n. 3, pág. 459-475, 1994.

12. mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/.

13. plato.stanford.edu/entries/cusanus/Bib.

14. PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antonio. Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuiçao. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, p. 17-34, 2014.

15. RESENDE, Kepler Alves et al. Curvas e Aplicações. 2017.

16. ROCHA, César Efrén Valladares. El problema de la curva braquistócrona. Contexto histórico, la solución de Johann Bernoulli y una deducción analítica de la ecuación.

17. SOLUÇAO DE BERNOULLI, A. Tópicos de Física Clássica I - Sala de Aula 5 O problema braquistócrono.

18. STAMPS, THROUGH IMAGES IN POSTAL. MATEMÁTICA NA ARTE FILATÉLICA: UM OLHAR HISTÓRICO DA MATEMÁTICA POR MEIO DE IMAGENS EM SELOS POSTAIS.

19. STEWART, James. Cálculo. Volume 2, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

20. TENENBLAT, K.: Introdução à geometria diferencial, 2a Ed. revisada - São Paulo: Blucher, 2008.

21. VEGA, José Oscar. SASSINE, André. A magia da curva cicloide: braquistócrona e tautócrona. São Paulo: Scortecci, 2011.

22. VENCESLAU, A. W. N.: Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT: São Cristovão - SE, 2015.